**維基百科關於關鍵字「三角函數」的介紹 ：**

 **三角函數**（英語：Trigonometric functions）是[數學](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B8%E5%AD%B8%22%20%5Co%20%22%E6%95%B8%E5%AD%B8)中常見的一類關於[角度](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A7%92)的[函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%87%BD%E6%95%B0)。三角函數將[直角三角形](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%9B%B4%E8%A7%92%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2)的內角和它的兩個邊的[比值](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AF%94%E5%80%BC)相關聯，也可以等價地用與[單位圓](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%95%E4%BD%8D%E5%9C%86)有關的各種線段的長度來定義。三角函數在研究三角形和圓等幾何形狀的性質時有重要作用，也是研究振動、波、天體運動以及各種[週期性現象](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%91%A8%E6%9C%9F%E5%87%BD%E6%95%B0)的基礎數學工具[[1]](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0#cite_note-%E5%BE%AE%E7%A7%AF%E5%88%86-1)。在[數學分析](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%88%86%E6%9E%90%22%20%5Co%20%22%E6%95%B8%E5%AD%B8%E5%88%86%E6%9E%90)中，三角函數也被定義為[無窮級數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%97%A0%E7%A9%B7%E7%BA%A7%E6%95%B0)或特定[微分方程式](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BE%AE%E5%88%86%E6%96%B9%E7%A8%8B)的解，允許它們的取值擴展到任意實數值，甚至是[複數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A4%87%E6%95%B8_%28%E6%95%B8%E5%AD%B8%29)值。

 常見的三角函數包括[正弦函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%BC%A6%E5%87%BD%E6%95%B0%22%20%5Co%20%22%E6%AD%A3%E5%BC%A6%E5%87%BD%E6%95%B8)、[餘弦函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BD%99%E5%BC%A6%E5%87%BD%E6%95%B0)和[正切函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%88%87%E5%87%BD%E6%95%B0)[1]；在[航海學](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%88%AA%E6%B5%B7%E5%AD%A6%22%20%5Co%20%22%E8%88%AA%E6%B5%B7%E5%AD%B8)、[測繪學](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B5%8B%E7%BB%98%E5%AD%A6)、[工程學](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B7%A5%E7%A8%8B%E5%AD%A6)等其他學科中，還會用到如[餘切函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%A4%98%E5%88%87%E5%87%BD%E6%95%B8)、[正割函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%89%B2%E5%87%BD%E6%95%B8)、[餘割函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BD%99%E5%89%B2%E5%87%BD%E6%95%B0)、[正矢函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E7%9F%A2)、[半正矢函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E7%9F%A2)等其他的三角函數。不同的三角函數之間的關係可以透過幾何直觀或者計算得出，稱為[三角恆等式](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E6%81%92%E7%AD%89%E5%BC%8F)。

 三角函數一般用於計算[三角形](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2)中未知長度的邊和未知的角度，在導航、工程學以及物理學方面都有廣泛的用途。另外，以三角函數為模版，可以定義一類相似的函數，叫做[雙曲函數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%8C%E6%9B%B2%E5%87%BD%E6%95%B0)[[2]](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0#cite_note-2)。常見的雙曲函數也被稱為雙曲正弦函數、雙曲餘弦函數等等。

 早期對於三角函數的研究可以追溯到古代。例如[古埃及](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%A4%E5%9F%83%E5%8F%8A)數學家在鑑別[尼羅河](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B0%BC%E7%BE%85%E6%B2%B3)泛濫後的[土地](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9C%9F%E5%9C%B0)邊界、保持[金字塔](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%87%91%E5%AD%97%E5%A1%94)每邊[斜度](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%9C%E5%BA%A6)相同，都使用了三角術，只是他們可能還沒有對這種方式定名而已。[古希臘](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%A4%E5%B8%8C%E8%85%8A)三角術的奠基人是公元前2世紀的[喜帕恰斯](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%96%9C%E5%B8%95%E6%81%B0%E6%96%AF%22%20%5Co%20%22%E5%96%9C%E5%B8%95%E6%81%B0%E6%96%AF)。他按照[古巴比倫](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%A4%E5%B7%B4%E6%AF%94%E4%BC%A6)人的做法，將圓周分為360等份（即圓周的弧度為360度，與現代的[弧度制](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BC%A7%E5%BA%A6%22%20%5Co%20%22%E5%BC%A7%E5%BA%A6)不同）。對於給定的弧度，他給出了對應的弦的長度數值，這個記法和現代的正弦函數是等價的。喜帕恰斯實際上給出了最早的三角函數數值表。然而古希臘的三角學基本是球面三角學。這與古希臘人研究的主體是天文學有關。[梅涅勞斯](https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%A2%85%E6%B6%85%E5%8A%B3%E6%96%AF&action=edit&redlink=1" \o "梅涅勞斯（頁面不存在）)在他的著作《球面學》中使用了正弦來描述球面的[梅涅勞斯定理](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A2%85%E6%B6%85%E5%8A%B3%E6%96%AF%E5%AE%9A%E7%90%86)。古希臘三角學與其天文學的應用在埃及的[托勒密](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%89%98%E5%8B%92%E5%AF%86)時代達到了高峰，托勒密在《數學彙編》（*Syntaxis Mathematica*）中計算了36度角和72度角的正弦值，還給出了計算和角公式和半角公式的方法。托勒密還給出了所有0到180度的所有整數和半整數弧度對應的正弦值。

 [希臘文化](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B8%8C%E8%87%98%E6%96%87%E5%8C%96)傳播到[古印度](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%A4%E5%8D%B0%E5%BA%A6)後，[印度人](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%B0%E5%BA%A6%E4%BA%BA)對三角術進行了進一步的研究。公元5世紀末的數學家[阿耶波多](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%98%BF%E8%80%B6%E6%B3%A2%E5%A4%9A%22%20%5Co%20%22%E9%98%BF%E8%80%B6%E6%B3%A2%E5%A4%9A)提出用弧對應的弦長的一半來對應半弧的正弦，這個做法被後來的古印度數學家使用，和現代的正弦定義一致了[[4]](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0#cite_note-ahm-4):189。阿耶波多的計算中也使用了餘弦和正割。他在計算弦長時使用了不同的單位，重新計算了0到90度中間隔三又四分之三度（3.75°）的三角函數值表[[4]](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0%22%20%5Cl%20%22cite_note-ahm-4):193。然而古印度的數學與當時的中國一樣，停留在計算方面，缺乏系統的定義和演繹的證明。阿拉伯人也採用了古印度人的正弦定義，但他們的三角學是直接繼承於古希臘。阿拉伯天文學家引入了正切和餘切、正割和餘割的概念，並計算了間隔10分（10′）的正弦和正切數值表[[3]](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0%22%20%5Cl%20%22cite_note-klein1-3):214-215。到了公元14世紀，阿拉伯人將三角計算重新以算術方式代數化（古希臘人採用的是建立在幾何上的推導方式）的努力為後來三角學從天文學中獨立出來，成為了有更廣泛應用的學科奠定了基礎。[[3]](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0%22%20%5Cl%20%22cite_note-klein1-3):225

進入15世紀後，阿拉伯數學文化開始傳入歐洲。隨著歐洲商業的興盛，航行、曆法測定和地理測繪中出現了對三角學的需求。在翻譯阿拉伯數學著作的同時，歐洲數學家開始製作更詳細精確的三角函數值表。[哥白尼](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%93%A5%E7%99%BD%E5%B0%BC%22%20%5Co%20%22%E5%93%A5%E7%99%BD%E5%B0%BC)的學生[喬治·約阿希姆·瑞提克斯](https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E4%B9%94%E6%B2%BB%C2%B7%E7%BA%A6%E9%98%BF%E5%B8%8C%E5%A7%86%C2%B7%E7%91%9E%E6%8F%90%E5%85%8B%E6%96%AF&action=edit&redlink=1)製作了間隔10秒（10″）的正弦表，有9位精確值。瑞提克斯還改變了正弦的定義，原來稱弧對應的弦長是正弦，瑞提克斯則將角度對應的弦長稱為正弦。16世紀後，數學家開始將古希臘有關球面三角的結果和定理轉化為平面三角定理。[弗朗索瓦·韋達](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BC%97%E6%9C%97%E7%B4%A2%E7%93%A6%C2%B7%E9%9F%A6%E8%BE%BE%22%20%5Co%20%22%E5%BC%97%E6%9C%97%E7%B4%A2%E7%93%A6%C2%B7%E9%9F%8B%E9%81%94)給出了托勒密的不少結果對應的平面三角形式。他還嘗試計算了多倍角正弦的表達方式。

18世紀開始，隨著解析幾何等分析學工具的引進，數學家們開始對三角函數進行分析學上的研究。牛頓在1669年的《分析學》一書中給出了正弦和餘弦函數的[無窮級數](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%97%A0%E7%A9%B7%E7%BA%A7%E6%95%B0%22%20%5Co%20%22%E7%84%A1%E7%AA%AE%E7%B4%9A%E6%95%B8)表示。Collins將牛頓的結果告訴了[詹姆斯·格列高里](https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E8%A9%B9%E5%A7%86%E6%96%AF%C2%B7%E6%A0%BC%E5%88%97%E9%AB%98%E9%87%8C&action=edit&redlink=1" \o "詹姆斯·格列高里（頁面不存在）)，後者進一步給出了正切等三角函數的無窮級數。[萊布尼茲](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8E%B1%E5%B8%83%E5%B0%BC%E5%85%B9)在1673年左右也獨立得到了這一結果[[5]](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0%22%20%5Cl%20%22cite_note-klein2-5):162-163。[歐拉](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AC%A7%E6%8B%89%22%20%5Co%20%22%E6%AD%90%E6%8B%89)的《[無窮小量分析引論](https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%97%A0%E7%A9%B7%E5%B0%8F%E9%87%8F%E5%88%86%E6%9E%90%E5%BC%95%E8%AE%BA&action=edit&redlink=1)》（*Introductio in Analysin Infinitorum*，1748年）對建立三角函數的分析處理做了最主要的貢獻，他定義三角函數為無窮級數，並表述了[歐拉公式](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AC%A7%E6%8B%89%E5%85%AC%E5%BC%8F)，還有使用接近現代的簡寫*sin.*、*cos.*、*tang.*、*cot.*、*sec.*和*cosec.*。

 1631年徐光啟與鄧玉函、湯若望合撰《大測》首次將三角函數引入中國並確立了正弦、餘弦等譯名。

**(以上文章出處 : 維基百科網站搜尋關鍵字「三角函數」)**