對數螺線 logarithmic spiral

螺線 Spiral 是一系列曲線的統稱,凡圍繞一定點或軸轉動,同時又逐漸遠離定點之動點的軌跡,都可以稱爲螺線。常見的平面螺線有阿基米德螺線、對數螺線、雙曲螺線、連鎖螺線、科努螺線等。常見的空間螺線有圓柱螺線、一般螺線、彈簧、螺釘、螺旋樓梯等。

對數螺線是由笛卡兒在 1638 年引入,後由 J.貝努利作過詳細研究。

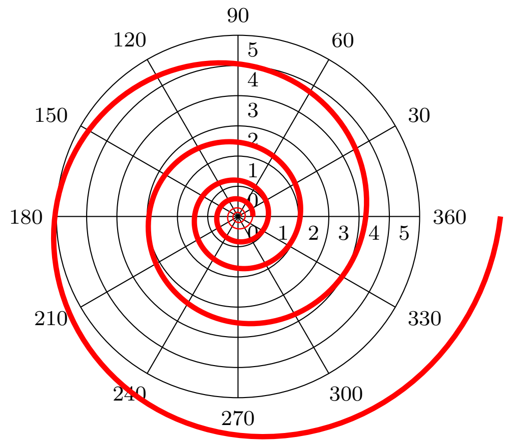
對數螺線爲滿足以下方程的動點 (極徑 r, 極角 θ) 之軌跡, 對數螺線亦稱爲 等角螺線 equiangular spiral :

極坐標方程:

$$r = ae^{b\theta}, \qquad (a, b > 0)$$

參數方程:

$$\begin{cases} x = ae^{bt}\cos t, & (a, b > 0) \\ y = ae^{bt}\sin t \end{cases}$$



右圖的 對數螺線之極坐標方程爲

$$r = e^{0.002\theta} \qquad (\text{極角爲}\theta^\circ)$$

對數螺線的一些性質:

i 當 θ 由 0 增至 $+\infty$ 時, 動點繞極點旋轉無數圈,且迅速遠離極點至無窮遠。

ii 當 $\theta \to -\infty$ 時, $r \to 0$, 動點繞極點旋轉無數圈,且無限地接近極點。

iii 對數螺線的 漸屈線 和 漸伸線 仍然是對數螺線。

iv 命 對數螺線上的 4 點爲 A(r_A, θ_A), B(r_B, θ_B), C(r_C, θ_C), D(r_D, θ_D),

v 若 θ_A, θ_B, θ_C, θ_D成等差數列, 則 r_A, r_B, r_C, r_D成等比數列。

vi 若 P, Q, R, $S, \cdots$ 爲對數螺線在坐標軸上連續的點, 有

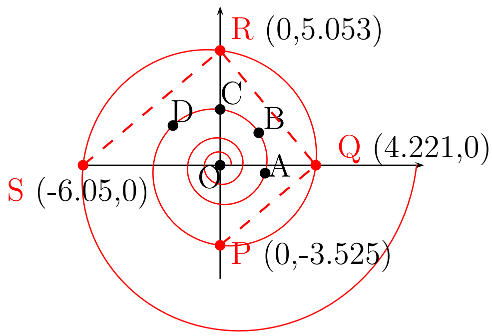
$$\angle PQR = \angle QRS = \cdots = 90^\circ$$

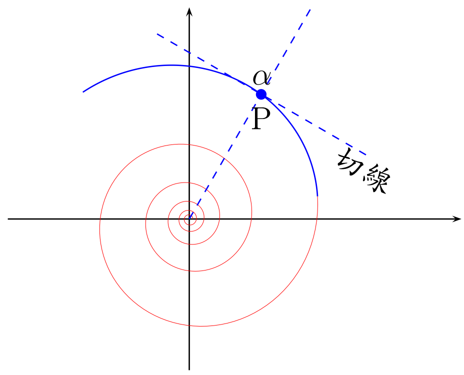
vii 兩點 $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ 之間的弧長及極點 O 至 點 P(r, θ)的弧長爲:

$$L_{\widehat{P_1P_2}} = \frac{a(r_2 - r_1)\sqrt{1 + b^2}}{b}, \qquad L_{\widehat{OP}} = \frac{ar\sqrt{1 + b^2}}{b}$$

viii 若 $a = 1$, 對數螺線上的每一點之極徑的對數與其極角成正比。

ix 極點到對數螺線上各點切線上的垂足仍是對數螺線。





等角

x 對數螺線與所有過極點的射線的 交角(α)恆等 於 $\tan^{-1}\dfrac{1}{b}$ 。

xi 對數螺線之所以亦稱爲等角螺線,實與此性質有關。

對數

- 由 對數螺線的極坐標方程 $r = ae^{b\theta}$, 有 $\log r = \log a + b\theta$ (a,b>0)
- 其極坐標方程與常見的等速螺線 (方程爲 $r = a + b\theta$) 類似,是以稱爲 對數螺線。

參考資料:

1.	谷超豪	數學詞典	上海辭書出版社	1992