# 花蓮縣第 61 屆國民中小學科學展覽會作品說明書

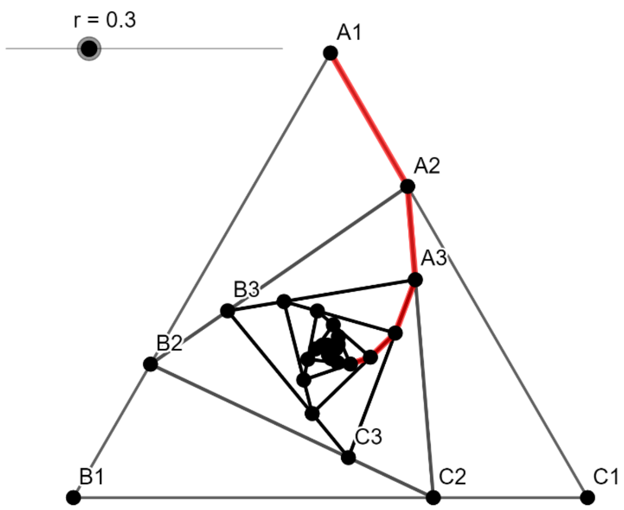
科　　別：數學組

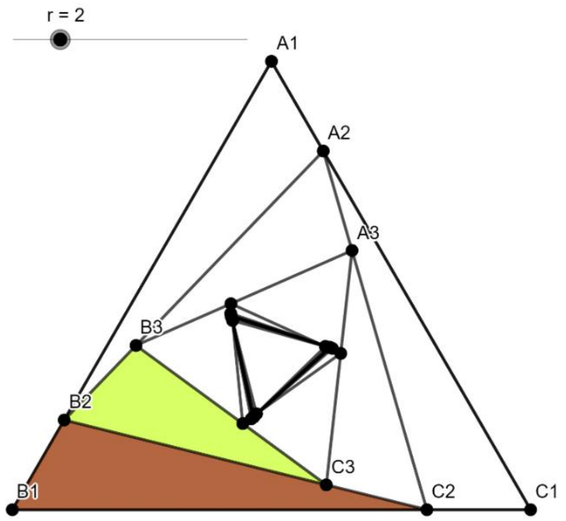
組　　別：國中組

作品名稱：同形同螺

關 鍵 詞：等角螺旋、正多邊形、餘弦定理

編　　號：



# 目錄

# 摘要

本研究探討正多邊形經特定的內縮方式而作出多層內切正多邊形後，其分割出圖形間之邊長、面積、角度等關係，以及找出每層正多邊形對應頂點連接後所形成的軌跡與等角螺線之間的關聯性。而圖形間的探討主要以 GeoGebra 數學線上繪圖軟體及試算表繪製出各種正多邊形的內縮圖形並利用其式算表驗算我們所推導出的算式。

# 壹、　研究動機

我們發現到日常中的生物會出現螺線，像是鸚鵡螺及蝸牛的殼切面、向日葵的種子排列、蕨類的嫩芽以及小漩渦、都有螺線的存在，我們想了解這些螺線是否有它的規律。

同時也聯想到，畫纏繞畫時會先畫出最外圍的一個正多邊形，大多是正三角形或是正方形，並在圖形內部依循某種固定的規則重複並規律地畫出多層的正多邊形，其圖形會產生出螺旋的視覺效果；並在書上看過正六邊形的中點連線內縮圖形（相當於每個層正六邊形長為前一層邊長的一半），我們覺得它看起來好像有類似的規律，所以想找找看若是用不同的內縮方式，各種圖形(例如：正三角形、正四邊形、正五邊形及正六邊形)畫出來的各層圖形會有什麼不同、或是彼此之間有甚麼關係。

# 貳、　研究目的

一、正 n 邊形經由相同比例的內縮方式而產生多層正 n 邊形之邊長、面積的比較。

二、正 n 邊形經由固定長度的內縮方式而產生多層正 n 邊形之邊長、面積的比較。

三、兩種不同的內縮方式與等角螺線的關係

# 參、　研究器材及設備

紙、筆、尺規、電腦、Excel、GeoGebra 數學線上繪圖軟體及試算表（內文簡稱 GGB）。

# 肆、 研究過程

正 n 邊形經由內縮產生第二層正 n 邊形的邊長、面積、角度問題。

**內縮方式-等比例內縮**：在正 n 邊形之邊長上，固定縮放倍率對邊長的進行內縮。

每層正多邊形和上一層的邊長成比例，和上一層的面積成平方比，此外夾角均相同（研究 1）

找出此切割方式的螺線總長與等角螺線的關係。（研究 2）

**內縮方式-固定內縮**：在正 n 邊形之頂點上以單位向量長度再乘以 R 倍，畫出第二層正 n 邊形。

每層正多邊形的邊長度接近等差數列（研究 3）

找出此切割方式的螺線總長與等角螺線的關係。（研究 4）

統整研究 1~4 的結果，比較等比例內縮與固定內縮之圖形與兩種內縮方式之螺線總長與等角螺線的關係。

# 伍、　研究結果

## 一、正多邊形的內縮方式形式介紹

### （一）　等比例內縮

以正三角形為例，首先 $A_1$、$B_1$、$C_1$ 逆時鐘排序繪出一個邊長為 10 公分的正三角形，此為第一層圖形並以 $n_1$ 表示。接著以等比例內縮的方式在第一層圖形裡畫出第二層的圖形，如圖 1。等比例內縮規則如下：

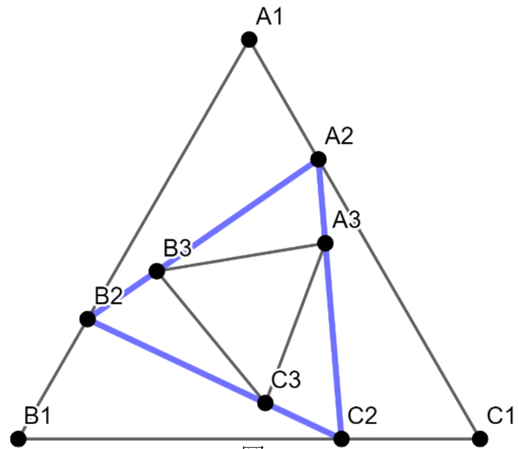


圖 1

1. 點 $A_1$ 沿著線段$\overrightarrow{A_1C_1}$的方向平移第一層正三角形邊長的 r 倍的距離，即 $A_2$，並依此類推 $B_2$、$C_2$。
2. $A_2$、$B_2$、$C_2$ 三點連成的圖形即為第二層正三角形以 $n_2$ 表示。
3. 接著同樣點 A2 沿著線段$\overrightarrow{A_2C_2}$的方向平移**第二層正三角形邊長的 r 倍的距離**，即 $A_3$，並依此類推 $B_3$、$C_3$。
4. $A_3$、$B_3$、$C_3$ 三點連成的圖形即為第三層正三角形以 $n_3$ 表示。
5. 最後以同樣的規則依序畫出多層的正三角形。

本研究定義 r 為本篇研究中等比例內縮的比例，因此在進行內縮時，每層內縮長度為該層正 n 邊形邊長的 r 倍。例如在 r 等於 0.3 時，$\overline{A_1A_2}$的長度即為 10 乘以 0.3 也就是 3 公分的長度。

### （二）　固定邊長內縮

同上所述，畫出相同邊長為 10 公分的正三角形後，第二層則以固定邊長內縮的方式畫出，如圖 2。固定邊長內縮的方式如下：

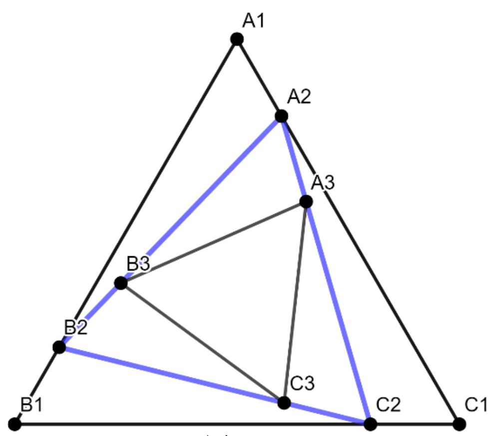


圖 2

1. 點 $A_1$ 沿著線段$\overrightarrow{A_1C_1}$的方向平移$\overrightarrow{A_1C_1}$**單位向量** R 倍的距離，即 $A_2$，並依此類

推 $B_2$、$C_2$。

2. $A_2$、$B_2$、$C_2$ 三點連成的圖形即為第二層正三角形以 $n_2$ 表示。

3. 接著同樣點 A2 沿著線段$\overrightarrow{A_2C_2}$的方向**平移$\overrightarrow{\boldsymbol{A_1C_1}}$單位向量 R 倍的距離**，即 $A_3$，並依此類推 $B_3$、$C_3$。

4. $A_3$、$B_3$、$C_3$ 三點連成的圖形即為第三層正三角形以 $n_3$ 表示。

5. 最後以同樣的規則依序畫出多層的正三角形。

與等比例內所有所不同的是，在此的每層內縮的長度皆固定為 R 公分（因為以各邊長逆時針方向之單位向量的 R 倍內縮）。例如若第一層內縮的長度為 R，第二層內縮的長度也為 R，依此類推畫出多層的正多邊形。

二、等角螺旋介紹

在趙文敏教授的文章[1]中，我們查到關於等角螺旋的敘述，

一般而言，若一曲線在每個點 P 的切向量都與某定點 O 至此點 P 所成的向量夾成一定角，且定角不是直角，則此曲線稱為一等角螺線（equiangular spiral），O 點稱為它的極點（pole）。

因此等角螺旋便是指螺線與所有過極點的射線的交角是一個固定的角度，且此定角不是直角。其餘雖然我們查到其他許多關於等角螺旋的性質，但本研究我們針對過極點的射線的交角皆為一定角的定義來與我們所做螺弦線來討論，並結合第 59 屆全國科展得獎作品，蘇熠治、陳柏諺的「正多邊形越來越『正』了，因為有『螺』！」[2]及外國學者 Jim Wilson [3] 的研究成果與我們所做的螺旋線做比較。

文獻[2]的研究分別整理出正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形等角螺線長度；而文獻[3]則是討論在正三角形、正方形等圖形不斷邊長做中點連線的動作，由此所形成的頂點軌跡總長之討論。

| 作者/參考文獻序 | 蘇熠治、陳柏諺/[2]<br>(研究螺線長) | Jim Wilson/[3]<br>(討論每層中點連線長總長) |
|---|---|---|
| 正三角形 | 螺旋線長為邊長的 2/3 倍 | 原邊長 |
| 正方形 | 原邊長 | 約為原邊長的 1.7071 倍 |
| 正五邊形 | 原邊長的$\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ | |
| 正六邊形 | 原邊長的兩倍 | |

三、等比例內縮方式所分割的三角形之邊長、面積之討論

研究 1：

1. 等比例內縮方式所畫的多層正 n 邊形之邊長具有等比關係，面積具有平方比關係。
2. 等比例內縮方式所畫的多層正 n 邊形之邊長的一般性公式為

$$a\sqrt{1-2r(1-r)(1+\cos\theta)}\text{。}$$

3. 當兩等比例內縮率和為 1 時，兩圖形間距有對應的關係。

在等比例內縮方式之下，每層正 n 邊形可分割出 n 個三角形，首先探討在正三角形的情況下，假設其邊長長度為 a、當內縮率（r）為 0.1 時，所呈現圖形如右圖 3：

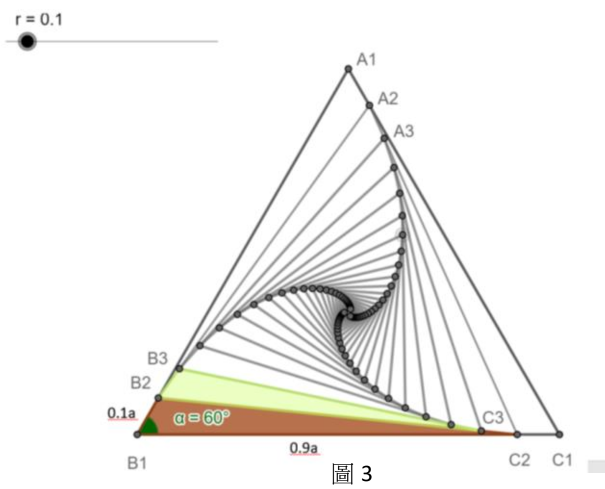


圖 3

1. 各層圖形間所分割的三個三角形是全等三角形，以$\triangle A_1A_2B_2$、$\triangle B_1B_2C_2$、$\triangle C_1C_2A_2$為例：

   $\because \overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=\overline{C_1C_2}=0.1a$

   $\overline{A_1B_2}=\overline{B_1C_2}=\overline{C_1A_2}=0.9a$

   $\angle A_1=\angle B_1=\angle C_1$

   $\therefore \triangle A_1A_2B_2 \cong \triangle B_1B_2C_2 \cong \triangle C_1C_2A_2$（SAS 全等性質）

   故$\overline{A_2B_2}=\overline{B_2C_2}=\overline{C_2A_2}$，亦即為第二層內縮正三角形之邊長。

2. $\triangle B_1B_2C_2$ 與 $\triangle B_2B_3C_3$ 中，

$\because \overline{B_1B_2} : \overline{B_1C_2} = \overline{B_2B_3} : \overline{B_2C_3} = 1 : 9$

$\angle B_2B_1C_2 = \angle B_3B_2C_3 = 60^\circ$

$\therefore \triangle B_2B_1C_2 \approx \triangle B_3B_2C_3$（SAS 相似性質）

以此類推，可知**等比例內縮方式所畫的多層正 n 邊形之邊長具有等比關係，面積具有平方比關係。**

3. 由上述兩點也可用來討論當內縮率 r 為 0.9 時所分割的三角形與 r 為 0.1 時的三角形也互為全等三角形（因為兩個三角形皆有一邊為 0.1$a$ 及 0.9$a$，且兩夾角皆為 60 度，即 SAS 全等），因此在 r 為 0.1 及 r 為 0.9 的圖形間有對應關係，進而推得當兩內縮率和為 1 時，其兩種圖形間有對應關係（可參考圖 4 及圖 5）。

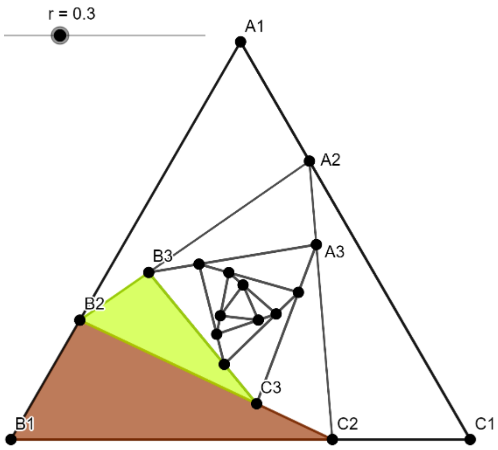



圖 4

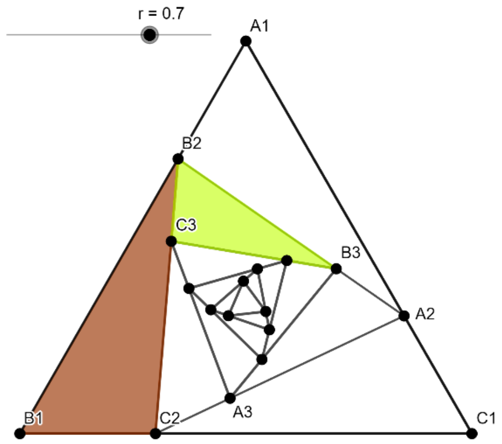



圖 5

4. 當我們知道三角形的兩邊及其夾角，便可由餘弦定理推得出已知角度的對邊，由餘弦定理可知三角形邊長分別為

$$a = \sqrt{(b\hat{}2 + c\hat{}2 - 2bc\cos A)}$$

$$b = \sqrt{(a\hat{}2 + c\hat{}2 - 2ac\cos B)}$$

$$c = \sqrt{(a\hat{}2 + b\hat{}2 - 2ab\cos C)}$$

承 1.，$\overline{B_2C_2}$為

$$\sqrt{(0.1a)^2 + (0.9a)^2 - 2 \times 0.1a \times 0.9a\ cos60^\circ} \quad （\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2}）$$

$$= \sqrt{0.01a^2 + 0.81a^2 - 0.1 \times 0.9a^2}$$

$$= a\sqrt{0.01 + 0.81 + 2 \times 0.1 \times 0.9 - 3 \times 0.1 \times 0.9} \text{ (算式 1)}$$

$= a\sqrt{1^2 - 3 \times 0.1 \times 0.9}$ (算式 2)

$= a\sqrt{0.73}$

第二層正三角形邊長為 $a\sqrt{0.73}$ ，即第一層邊長的$\sqrt{0.73}$倍，再令第二層邊長為 b= $a\sqrt{0.73}$ ，並用同樣的規則計算後，可得到第三層邊長為$b\sqrt{0.73}$之結果，即第二層邊長的$\sqrt{0.73}$ 倍，依此類推後，**在內縮率 r 為 0.1 的情況下，每層正三角形邊長具有等比關係且公比為$\sqrt{0.73}$。**

以內縮率 r 重新整理上述算式 1 及算式 2 的部分，可知內縮分割的三角形兩邊長分別為 r 與$1-r$且夾角為 60 度，此時第三邊為

$$a\sqrt{r^2 + (1-r)^2 + 2r(1-r) - 3r(1-r)} = a\sqrt{1 - 3r(1-r)}$$

接著將此算式推導至正 n 邊形，並假設其邊長同樣為 $a$ 且內角為θ的情況下可得如下

$$a\sqrt{r^2 + (1-r)^2 + 2r(1-r) - 2r(1-r) - 2r(1-r)\cos\theta}$$
$$= a\sqrt{1 - 2r(1-r)(1+\cos\theta)}$$

由此可以整理出各個正多邊形每層邊長的公比與面積比如下表一。

正四邊形、正五邊形及正六邊形圖形詳如附錄。

表一　等比例內縮正 n 邊形每層邊長之公比與面積比

| 圖形 | θ（即內角） | $\cos\theta$ | 每層邊長比 | 每層面積比(即邊長平方比) |
|---|---|---|---|---|
| 正三角形 | 60° | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{1-3r(1-r)}$ | $1-3r(1-r)$ |
| 正方形 | 90° | 0 | $\sqrt{1-2r(1-r)}$ | $1-2r(1-r)$ |
| 正五邊形 | 108° | $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ | $\sqrt{1-2r(1-r)(\frac{5-\sqrt{5}}{4})}$ | $1-2r(1-r)(\frac{5-\sqrt{5}}{4})$ |
| 正六邊形 | 120° | $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{1-r(1-r)}$ | $1-r(1-r)$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | |
| 正 n 邊形 | θ | $\cos\theta$ | $\sqrt{1-2r(1-r)(1+\cos\theta)}$ | $1-2r(1-r)(1+\cos\theta)$ |

四、等比例內縮所形成的多層對應頂點軌跡之討論

研究 2

1. 以等比例方式內縮時，圖形經過多層的迭代後會趨向聚集於中心點。
2. 對應頂點軌跡相當於每層正 n 邊形邊長總和的 r 倍。
3. 當內縮率（r）逼近無窮小的時候，其螺線總長相當於等角螺線的長度。

將各層圖形之對應頂點，$A_1$、$A_2$、$A_3$……$A_n$，依序相連，所呈圖形即為本篇所指之對應頂點軌跡，我們亦稱之為該圖形的螺線。

**以等比例方式內縮時，圖形經過多層的迭代後會趨向聚集於中心點**，故經由 GGB 繪圖軟體所得之試算表資料，本研究設定當內縮的第 n 層正多邊形之邊長四捨五入到小數點後第 4 位為 0 時，即停止不再迭代。

我們利用 GGB 繪圖軟體繪製等比例內縮正三角形（內縮率 r 介於 0.1 到 0.5 之間），並以此軟體內建試算表來計算各層邊長，其結果如表二。我們利用研究 1 的算式並搭配 excel 列表計算發現與 GGB 試算表格中的結果一致，並發現**等比例內縮時，正三角形的邊長總和*r 恰為對應頂點軌跡長度**。

正三角形在不同內縮率(r)下之圖形如下圖 6-圖 8，**當內縮率 r 越趨近於 0 時，其對應頂點軌跡越接近等角螺旋，其螺線總長相當於等角螺線的長度。**第 59 屆全國科展得獎作品「正多邊形越來越『正』了，因為有『螺』！」[2]中也有同樣的結論。

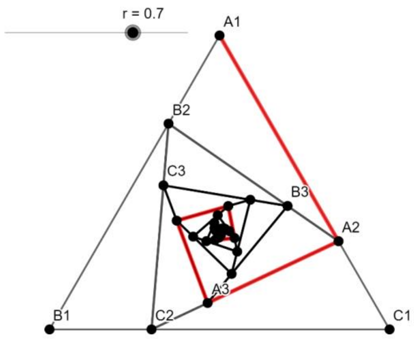


圖 6

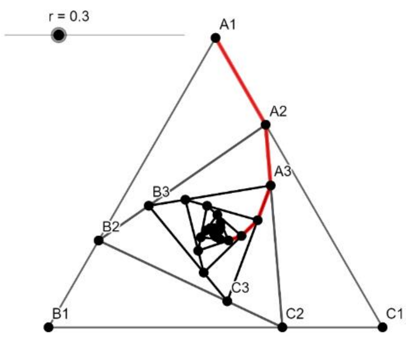


圖 7

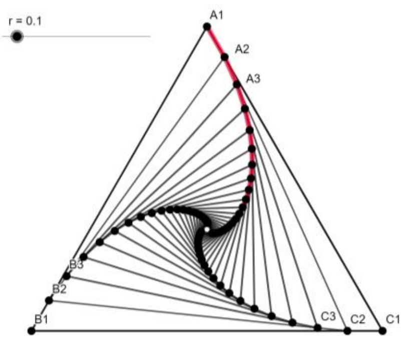


圖 8

我們並將 GGB 繪製正三角形、正方形、正五邊形以及正六邊形之試算表資料，整理出每層邊長比、每層正多邊形之面積比、夾角（即每層對應頂點軌跡轉向下一層時的偏移角度）和螺線總長（即每層對應頂點軌跡的總長度），並附上文獻[2]及 Jim Wilson [3] 的研究成果做比對發現有同樣的趨勢。相關資料整理於表三到表六，正四邊形、正五邊形及正六邊形圖形詳如附錄。

表二　等比例內縮時正三角形的邊長和對應頂點軌跡長度關係

| 層數 | r=0.1 | | r=0.2 | | r=0.3 | | r=0.4 | | r=0.5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 邊長 | $\overline{A_nA_{n+1}}$ | 邊長 | $\overline{A_nA_{n+1}}$ | 邊長 | $\overline{A_nA_{n+1}}$ | 邊長 | $\overline{A_nA_{n+1}}$ | 邊長 | $\overline{A_nA_{n+1}}$ |
| $n_1$ | 10 | 1 | 10 | 2 | 10 | 3 | 10 | 4 | 10 | 5 |
| $n_2$ | 8.5440 | 0.8544 | 7.2111 | 1.4422 | 6.0828 | 1.8248 | 5.2915 | 2.1166 | 5 | 2.5 |
| $n_3$ | 7.3000 | 0.7300 | 5.2000 | 1.0400 | 3.7000 | 1.1100 | 2.8000 | 1.1200 | 2.5 | 1.25 |
| $n_4$ | 6.2371 | 0.6237 | 3.7498 | 0.7500 | 2.2506 | 0.6752 | 1.4816 | 0.5926 | 1.25 | 0.625 |
| $n_5$ | 5.3290 | 0.5329 | 2.7040 | 0.5408 | 1.3690 | 0.4107 | 0.7840 | 0.3136 | 0.625 | 0.3125 |
| $n_6$ | 4.5531 | 0.4553 | 1.9499 | 0.3900 | 0.8327 | 0.2498 | 0.4149 | 0.1660 | 0.3125 | 0.1563 |
| $n_7$ | 3.8902 | 0.3890 | 1.4061 | 0.2812 | 0.5065 | 0.1520 | 0.2195 | 0.0878 | 0.1563 | 0.0782 |
| $n_8$ | 3.3238 | 0.3324 | 1.0139 | 0.2028 | 0.3081 | 0.0924 | 0.1162 | 0.0465 | 0.0781 | 0.0391 |
| $n_9$ | 2.8398 | 0.2840 | 0.7312 | 0.1462 | 0.1874 | 0.0562 | 0.0615 | 0.0246 | 0.0391 | 0.0196 |
| $n_{10}$ | 2.4263 | 0.2426 | 0.5272 | 0.1054 | 0.1140 | 0.0342 | 0.0325 | 0.0130 | 0.0195 | 0.0098 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 總和 | 68.6812 | 6.8681 | 35.8564 | 7.1713 | 25.5281 | 7.6584 | 21.2382 | 8.4953 | 20.0000 | 10.0000 |

經表二之整理結果，等比例內縮時，正三角形的邊長總和*r 恰為對應頂點軌跡長度。

表三　等比例內縮正三角形不同內縮率之邊長比、面積比、夾角與螺線總長

| 縮放率 | 邊長比 | 面積比 | 夾角 | 螺線總長 | 螺線總長的理論值 |
|---|---|---|---|---|---|
| r=0.9 | 0.85 | 0.73 | 5.82 | 61.79 | |
| r=0.8 | 0.72 | 0.52 | 13.9 | 28.67 | |
| r=0.7 | 0.61 | 0.37 | 25.28 | 17.86 | |
| r=0.6 | 0.53 | 0.28 | 40.89 | 12.74 | |
| r=0.5 | 0.50 | 0.25 | 60.00 | 10.00 | 10（為原邊長） |
| r=0.4 | 0.53 | 0.28 | 79.11 | 8.50 | |
| r=0.3 | 0.61 | 0.37 | 94.72 | 7.66 | |
| r=0.2 | 0.72 | 0.52 | 106.1 | 7.17 | |
| r=0.1 | 0.85 | 0.73 | 114.18 | 6.87 | |
| r 無窮小時 | | | | | $\frac{20}{3}$（為原邊長的 2/3 倍） |

註：1. 當 r 固定時每一層的三角形夾角都會一樣。

2. 以 r=0.5 為分界點，r = 0.3 與 r = 0.7，夾角和為 120 度(正三角形單一外角度數)，其餘亦有相似關係。

表四　等比例內縮正四邊形不同內縮率之邊長比、面積比、夾角與螺線總長

| 縮放率 | 邊長比 | 面積比 | 夾角 | 螺線總長 | 螺線總長的理論值 |
|---|---|---|---|---|---|
| r=0.9 | 0.91 | 0.82 | 6.34 | 95.24 | |
| r=0.8 | 0.82 | 0.68 | 14.04 | 45.59 | |
| r=0.7 | 0.76 | 0.58 | 23.2 | 29.33 | |
| r=0.6 | 0.72 | 0.52 | 33.69 | 21.5 | |
| r=0.5 | 0.71 | 0.5 | 45 | 17.07 | $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\cos\frac{\pi}{4}}\right)\times 10 \fallingdotseq 17.071067$ |
| r=0.4 | 0.72 | 0.52 | 56.31 | 14.33 | |
| r=0.3 | 0.76 | 0.58 | 66.8 | 12.56881 | |
| r=0.2 | 0.82 | 0.68 | 75.96 | 11.37 | |
| r=0.1 | 0.91 | 0.82 | 83.66 | 10.56 | |
| r 無窮小時 | | | | | 10（為原邊長） |

表五　等比例內縮正五邊形不同內縮率之邊長比、面積比、夾角與螺線總長

| 縮放率 | 邊長比 | 面積比 | 夾角 | 螺線總長 | 螺線總長的理論值 |
|---|---|---|---|---|---|
| r=0.9 | 0.94 | 0.88 | 5.83 | 139.99 | |
| r=0.8 | 0.88 | 0.78 | 12.45 | 68.07 | |
| r=0.7 | 0.84 | 0.71 | 19.8 | 44.44 | |
| r=0.6 | 0.82 | 0.67 | 27.73 | 32.88 | |
| r=0.5 | 0.81 | 0.65 | 36 | 26.17 | |
| r=0.4 | 0.67 | 0.82 | 44.27 | 21.92 | |
| r=0.3 | 0.84 | 0.71 | 52.2 | 19 | |
| r=0.2 | 0.88 | 0.78 | 59.55 | 17.02 | |
| r=0.1 | 0.94 | 0.88 | 66.17 | 15.53 | |
| r 無窮小時 | | | | | 約 14.4721（即原邊長的$\frac{5+\sqrt{5}}{5}$） |

表六　等比例內縮正六邊形不同內縮率之邊長比、面積比、夾角與螺線總長

| 縮放率 | 邊長比 | 面積比 | 夾角 | 螺線總長 | 螺線總長的理論值 |
|---|---|---|---|---|---|
| r=0.9 | 0.95 | 0.91 | 5.21 | 195.3 | |
| r=0.8 | 0.92 | 0.84 | 10.89 | 95.82 | |
| r=0.7 | 0.89 | 0.79 | 17 | 95.82 | |
| r=0.6 | 0.87 | 0.76 | 23.41 | 95.82 | |
| r=0.5 | 0.87 | 0.75 | 30 | 37.32 | |
| r=0.4 | 0.87 | 0.76 | 36.59 | 31.16 | |
| r=0.3 | 0.89 | 0.79 | 43 | 26.94 | |
| r=0.2 | 0.92 | 0.84 | 49.11 | 23.92 | |
| r=0.1 | 0.95 | 0.91 | 54.79 | 21.61 | |
| r 無窮小時 | | | | | 20（原邊長的 2 倍） |

五、固定內縮方式所分割的三角形之邊長、面積之討論

研究 3

1. 固定內縮所繪出每層正 n 邊形邊長一般式為 $\sqrt{a_n^2 - 2R(a_n - R)(1 + \cos\theta)}$ 。

2. 固定內縮所分割的多層三角形邊長接近等差數列，其面積比等同於邊長比。

同研究 1 的作法，在固定內縮的情況下，一樣使用餘弦定理來推導每層正 n 邊形邊長的一般式，首先令第一層正 n 邊形邊長為$a_1$、內角為θ且固定向內縮 R 長度的情況下，此形式所分割的三角形邊長分別為$a_1$及$a_1 - R$且此兩邊夾角即為此正 n 邊形的內角θ。因此可以推導出分割三角形之第三邊邊長（同為第二層內縮的正三角形邊長）為

$$\sqrt{R^2 + (a_1 - R)^2 + 2R(a_1 - R) - 2R(a_1 - R) - 2R(a_1 - R)\cos\theta}$$

$$= \sqrt{a_1^2 - 2R(a_1 - R)(1 + \cos\theta)} \text{ (算式 3)}$$

我們利用此一般式以 excel 試算表迭代的方式算出各層邊長，再與 GGB 試算表的結果互相比對，結果相符。固定內縮方式所推導之一般式並沒有像等比例內縮的一般式一樣，各層正多邊形邊長具有等比的關係，因此各層正多邊形面積固然也沒有相對應平方比的性質，但若單看數據而言，**在 R 小於 0.5 的情況下，每層邊長非常接近等差數列**，我們將正三角形在固定內縮 R 為 0.1 到 0.5 並迭代計算邊長到第 10 層的結果整理於表八，以說明固定內縮的每層正多邊形邊長接近等差數列的現象。

此外，在固定內縮的情況之下，圖形中各層正 n 邊形所切割出的小三角形，彼此均具有一個相同的邊 R 與夾角θ，可得每層分割三角形具有相同的高，**故每層分割三角形面積相當於每層正多邊形的邊長比。**

如右圖 9，以 R=2 為例

$\because \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = 2R$

$\angle B_2B_1C_2 = \angle B_3B_2C_3 = 60^\circ$

並分別由 $B_2$、$B_3$ 對$\overline{B_1C_2}$ 、$\overline{B_2C_3}$做垂直線段 h，此時兩三角形中之 h 均相同。

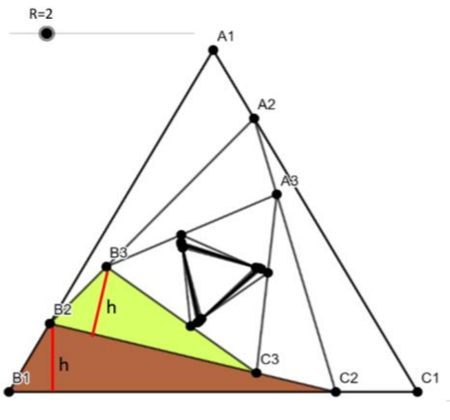


圖 9

正四邊形、正五邊形及正六邊形圖形詳如附錄。

表七 固定內縮的正多邊形的一般式整理

| 圖形 | θ（內角） | $\cos\theta$ | 第 n 層邊長 |
|---|---|---|---|
| 正三角形 | 60° | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{a_n^2-3R(a_n-R)}$ |
| 正方形 | 90° | 0 | $\sqrt{a_n^2-2R(a_n-R)}$ |
| 正五邊形 | 108°° | $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ | $\sqrt{a_n^2-2R(a_n-R)\frac{5-\sqrt{5}}{4}}$ |
| 正六邊形 | 120° | $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{a_n^2-R(a_n-R)}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 正 n 邊形 | θ | $\cos\theta$ | $\sqrt{a_n^2-2R(a_n-R)(1+\cos\theta)}$ |

表八 固定內縮的正三角形在 R 為 0.1 至 0.5 之下前 10 層的邊長長度(與前一層差距)

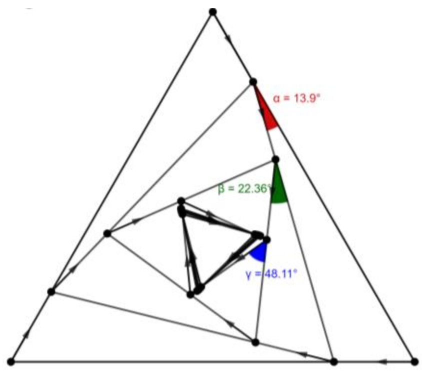
| 層數 | R=0.1 | R=0.2 | R=0.3 | R=0.4 | R=0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| $n_2$ | 9.85(-0.15) | 9.70(-0.30) | 9.55(-0.45) | 9.41(-0.59) | 9.26(-0.74) |
| $n_3$ | 9.70(-0.15) | 9.40(-0.30) | 9.11(-0.45) | 8.81(-0.59) | 8.52(-0.74) |
| $n_4$ | 9.55(-0.15) | 9.10(-0.30) | 8.66(-0.45) | 8.22(-0.59) | 7.78(-0.74) |
| $n_5$ | 9.40(-0.15) | 8.81(-0.30) | 8.22(-0.45) | 7.63(-0.59) | 7.05(-0.74) |
| $n_6$ | 9.25(-0.15) | 8.51(-0.30) | 7.77(-0.45) | 7.04(-0.59) | 6.31(-0.74) |
| $n_7$ | 9.10(-0.15) | 8.21(-0.30) | 7.32(-0.45) | 6.45(-0.59) | 5.58(-0.73) |
| $n_8$ | 8.95(-0.15) | 7.91(-0.30) | 6.88(-0.45) | 5.86(-0.59) | 4.85(-0.73) |
| $n_9$ | 8.80(-0.15) | 7.61(-0.30) | 6.43(-0.44) | 5.27(-0.59) | 4.12(-0.73) |
| $n_{10}$ | 8.65(-0.15) | 7.32(-0.30) | 5.99(-0.44) | 4.68(-0.59) | 3.40(-0.72) |

## 六、固定內縮所形成的多層對應頂點軌跡之討論

研究 4

1. 固定內縮的對應頂點軌跡，在縮放率逼近無窮小時，其軌跡長度極為接近等角螺線。
2. 固定內縮多層後會圖形中心為趨於邊長為 R 的小正多邊形，且偏移角度趨於正多邊形的外角。

同研究 2 所述，固定內縮的對應頂點軌跡亦為 $A_1$、$A_2$、$A_3$……$A_n$ 依序相連，亦稱之為螺線。在圖層無限迭代下，固定內縮的圖形與等比例內縮圖形有所不同，固定內縮所呈現的圖形不會趨近於中心點，反而**會縮成邊長接近為 R 之小正 n 邊形**，且在後續迭代過程中變動幅度不大，相當於圖形頂點間不停地逆時針轉動，互換位置。故在此研究經 GGB 繪圖軟體所得之試算表資料，設定當小正 n 邊形邊長四捨五入到小數點後第四位不再變動時，即停止不再迭代，正 n 邊形於不同的固定內縮率（R）收斂的情況整理如下表九。




本研究所指之頂點對應軌跡的偏移角度係為第 n 層與第 n+1 層間　　之夾角，如右圖 10。

圖 10

當 R=2，偏移角度較大，看起來會與等角螺旋線相差較大；R=0.3，偏移角度較小，看起來會與等角螺旋線相差較小，如下圖 11、12。所以我們可以推論，當 R 的倍率越小，對應頂角軌跡越平滑，看起來為更像等角螺旋線，且此時軌跡長度也會接近等角螺線。

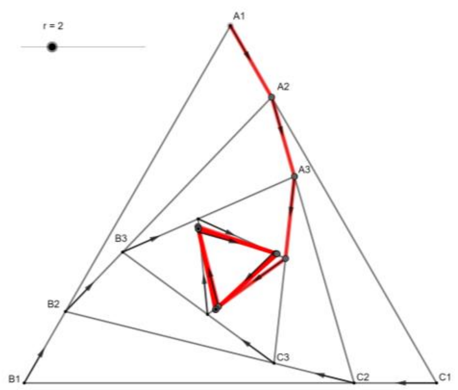



圖 11

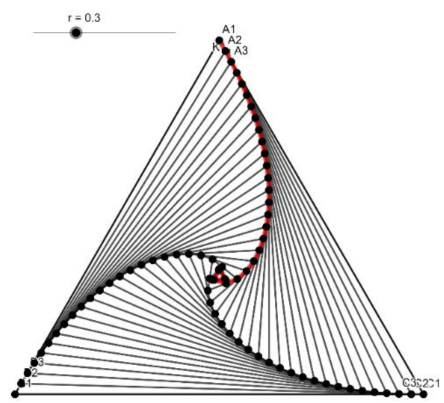



圖 12

在固定內縮的情況下，每層螺線（即每層對應頂點連線）長度皆固定為 R，因此在不斷迭代下螺線的長度為無限大,且偏移角度幾乎不動,幾乎固定於該正多邊形的外角，以正三角形為例，當達到穩定階段，每層偏移角度幾乎為 120 度；若是正四邊形時，當圖形達到穩定則偏移角度為 90 度，依此類推。

因此我們已邊長的收斂層數當作一個停止點，當圖形迭代接近到中心的正多邊形，螺線總長為收斂層數呈上固定內縮距離 R，例如在 R 為 0.1 的情況下，正三角形收斂層數為 75，因此該圖形的螺線總長為 0.1 乘上 75 即 7.5。

我們將此結果列於表九，並發現實隨著 R 越來越小，螺線長度逼近於等角螺線的理論值。

表九　正 n 邊形在不同固定內縮率(R)下之所需收斂層數與螺線總長

| 固定內縮率(R) | 正三角形<br>收斂層數<br>(螺線總長) | 正四邊形<br>收斂層數<br>(螺線總長) | 正五邊形<br>收斂層數<br>(螺線總長) | 正六邊形<br>收斂層數<br>(螺線總長) |
|---|---|---|---|---|
| 螺線理論值 | 約 6.6666 | 10 | 約 14.4721 | 20 |
| R = 0.1 | 75 (7.5) | 105 (10.5) | 156 (15.6) | 217 (21.7) |
| R = 0.2 | 45 (9) | 55 (11) | 83 (16.6) | 117 (23.4) |
| R = 0.3 | 34 (10.2) | 38 (11.4) | 59 (17.7) | 84 (25.2) |
| R = 0.4 | 28 (11.2) | 30 (12) | 47 (18.8) | 67 (26.8) |
| R = 0.5 | 26 (13) | 25 (12.5) | 40 (20) | 57 (28.5) |
| R = 0.6 | 23 (13.8) | 21 (12.6) | 35 (21) | 51 (30.6) |
| R = 0.7 | 22 (15.4) | 19 (13.3) | 31 (21.7) | 46 (32.2) |
| R = 0.8 | 21 (16.8) | 17 (1713.6) | 29 (23.2) | 42 (33.6) |
| R = 0.9 | 21 (18.9) | 15 (13.5) | 27 (24.3) | 39 (35.1) |
| R = 1 | 20 (20) | 14 (14) | 25 (25) | 37 (37) |

正四邊形、正五邊形及正六邊形圖形詳如附錄。

# 陸、 討論與結論

一、 在圖層無限迭代下，等比例內縮圖形與固定內縮的圖形有所不同，等比例內縮所呈現的圖形會趨近於中心點，固定內縮的圖形反而會縮成邊長接近為 **R** 之小正 **n** 邊形。

二、 在等比例內縮方式的正 **n** 邊形中，我們發現當兩種內縮率和為 **1** 時，其圖形有對應關係（因其所分割的三角形全等），但在固定內縮方式所得的圖形卻無此關係。

三、 等比例內縮方式所畫的第 **n** 層正多邊形之邊長的一般式為 $\boldsymbol{a_n\sqrt{1-2r(1-r)(1+\cos\theta)}}$。

四、 固定內縮所繪出第 **n** 層正多邊形邊長的一般式為 $\boldsymbol{\sqrt{a_n^2-2R(a_n-R)(1+\cos\theta)}}$。

五、 等比例內縮方式所分割的多層三角形，邊長具有等比關係，面積具有平方比關係；固定內縮方式所分割的多層三角形邊長接近等差數列，其面積比等同於邊長比**(**等高三角形面積比等於邊長比**)**。

六、 在等比例內縮圖形中，頂點對應軌跡的偏移角度皆固定；而在固定內縮圖形中，頂點對應軌跡的偏移角度需迭代多層後才會穩定，且會趨近於正 **n** 邊形的外角。

七、 不論是等比例內縮或固定內縮圖形，在 **r/R** 無窮小時，兩者之對應頂點軌跡十分接近等角螺線。

## 柒、 未來發展

經過作圖我們才發現同樣的正多邊形經過不同的內縮規則可以發展出不同的螺線軌跡，但當縮放率無限小時卻趨近於等角螺線，與我們原先的預設不一樣是很有趣的發展（原以為兩種螺線軌跡至終會有所不同）。關於我們研究，可惜在時間的因素下沒辦法詳細討論關於內縮圖形的轉正問題，即對應頂點在經過多次迭代後是否能回到原先位置的角度，亦沒能更深入探究固定內縮圖形的其他性質，此外我們也發現同樣的正多邊形經由不同的排列方式（非內縮的方式），亦可做出同樣螺旋線的視覺效果，甚至在非正多邊形相同作法之下的討論，諸如此類，光是多邊形圖形間各種變化能夠不斷延伸討論，期許未來能有機會做更深入的研究。

## 捌、 參考文獻資料


[1] 趙文敏，等角螺線及其他，「數學知識」網站，
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_09_1/index.html

[2] 蘇熠治、陳柏諺，正多邊形越來越「正」了，因為有「螺」！，中華民國第 59 屆全國科展國中組團隊合作獎。

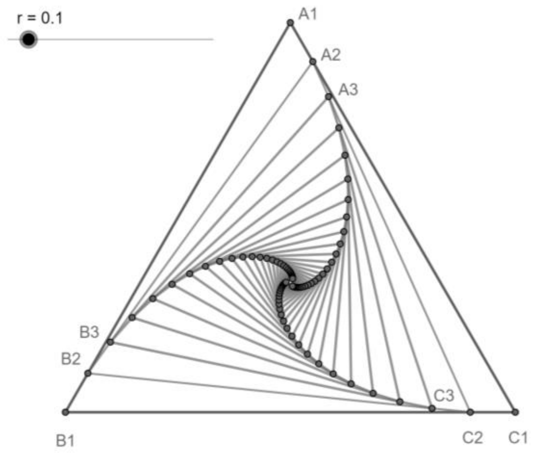
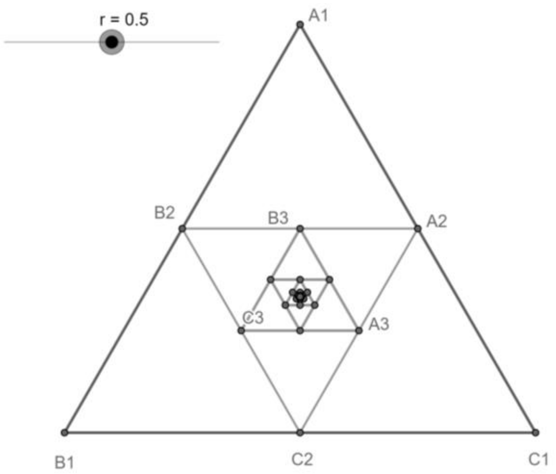
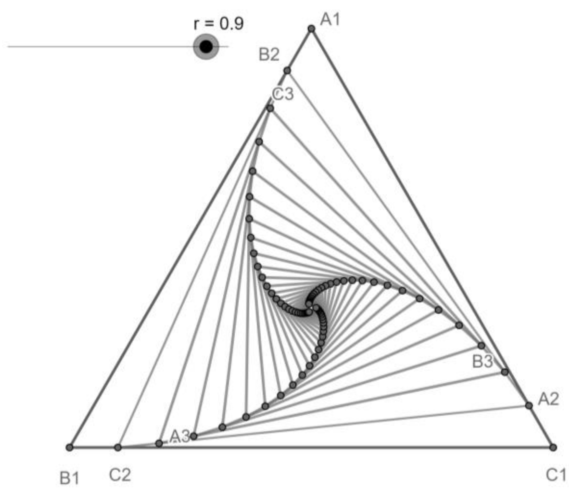
[3] Mathematics Education Program EMAT 6690, Jim Wilson，
http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa09/KimS/EMAT6690/Essay2/P1.html

[4] 對數螺線 logarithmic spiral，http://www.mathsgreat.com/curve/curve_indiv_025.pdf

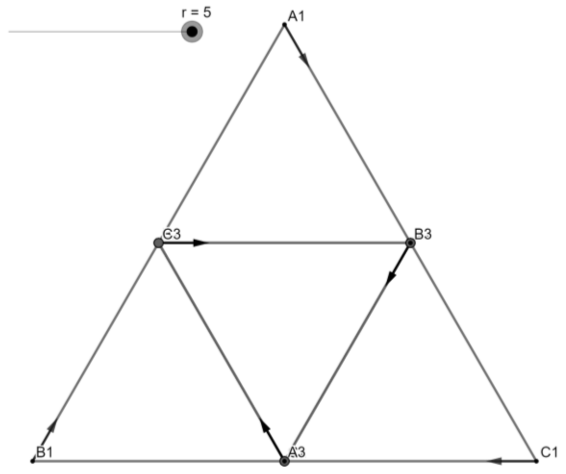
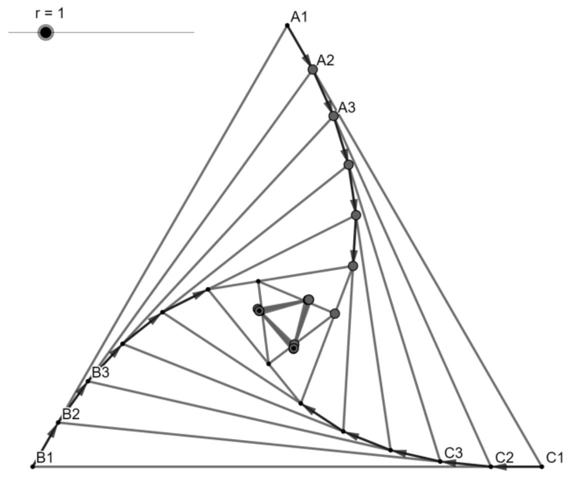
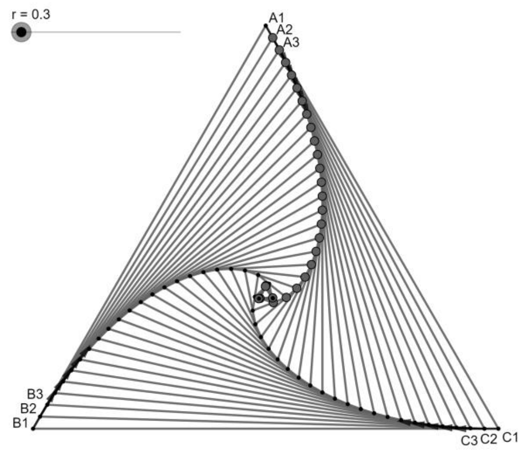
[5] 維基百科，餘弦定理，
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%A4%98%E5%BC%A6%E5%AE%9A%E7%90%86

# 玖、 附錄

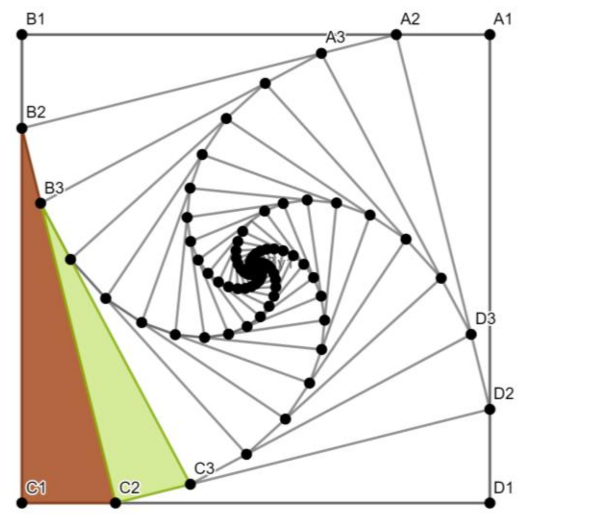
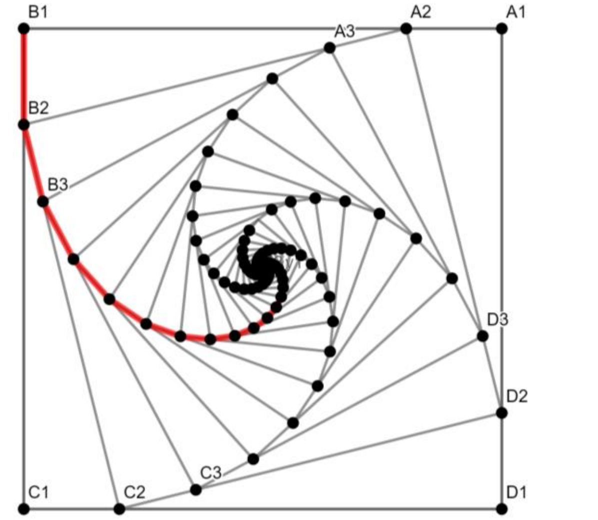
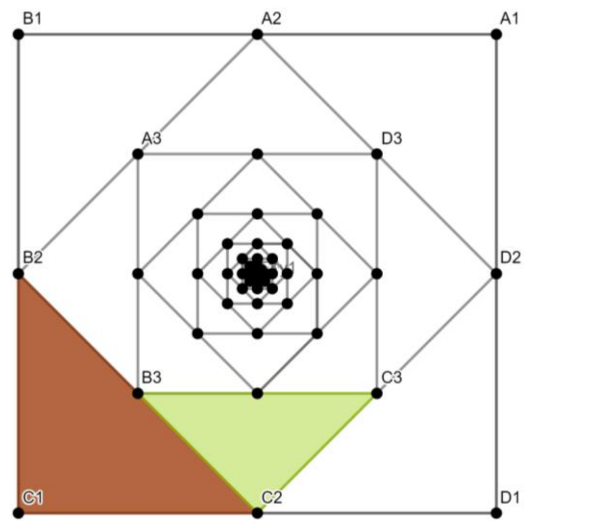
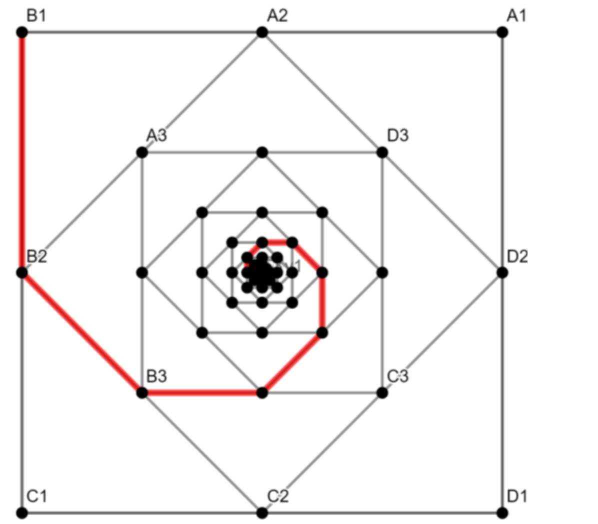
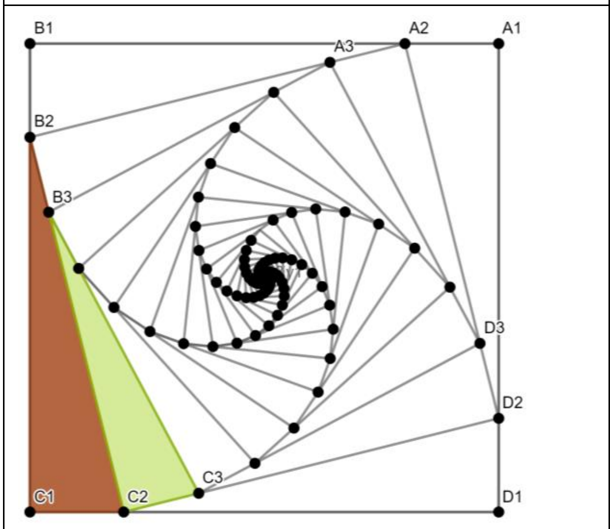
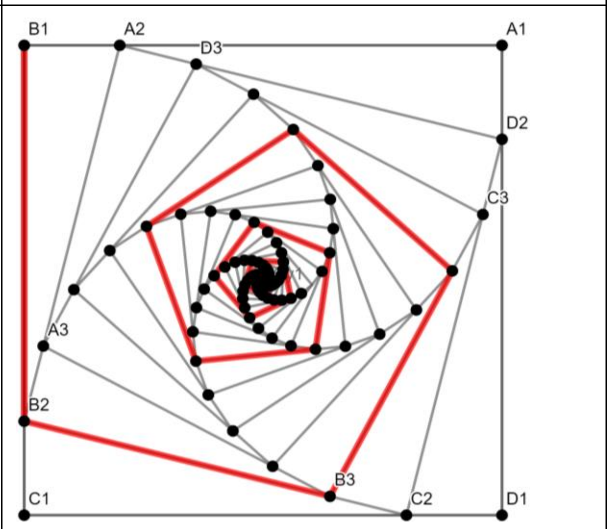
## 附錄一　正三角形以等比例縮放方式在不同縮放率(r)下之圖形與說明

| 圖形 | 說明 |
|---|---|
|  | 1. 正三角形的座標點經過多層的迭代後，會越來越往中心點集中，當 r 越趨近於 0 或 1 時，需要迭代更多層才能接近中心點。<br>2. 當 r<0.5 時，圖形的對應頂點軌跡會是順時針，r 越小時圖形會越密集。 |
|  | 3. r=0.5 時，新一層的點恰好都會在前一層的各邊中點上。以 r=0.5 為分界點，我們發現 r = 0.3 與 r = 0.7 兩個圖形，雖然對應頂點軌跡旋轉的方向不同，但兩圖形會互相對稱，r = 0.2 與 r = 0.8 兩個圖形間亦有相同的關係。 |
|  | 4. 當 r>0.5 時，圖形的對應頂點軌跡會是逆時針，r 越大時圖形會越密集。 |

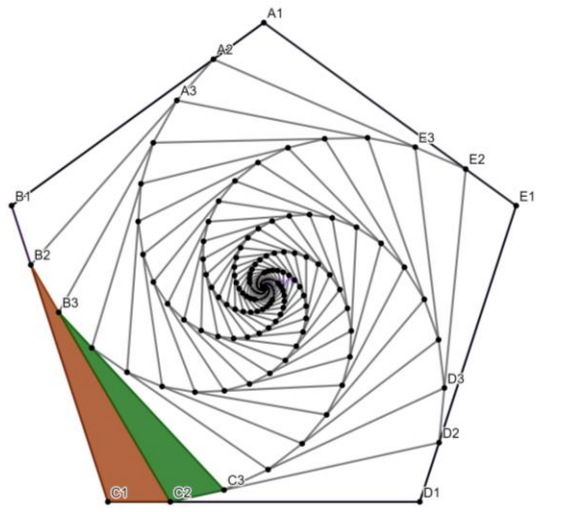
## 附錄二　正三角形以固定邊長縮放方式在不同縮放率(R)下之圖形與說明

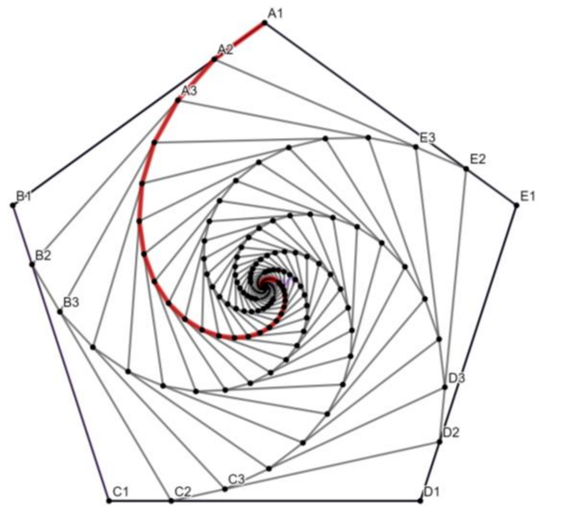
| 圖形 | 說明 |
| --- | --- |
|  | R=5 時，n2 圖形的三頂點 $A_2$、$B_2$、$C_2$ 為各邊的中點，接續的 $n_3$、$n_4$、$n_5$……等圖形恰好會跟 $n_2$ 圖形完全重疊，視覺效果只有 2 層圖案呈現，僅有各圖層的頂點順時針變動。 |
|  | 當 R 越小，圖形越密集，視覺上會有明顯的旋轉效果，圖形不一定會無限趨近於同一點，會縮成邊長為 R 之小正 n 邊形。 |
|  | |

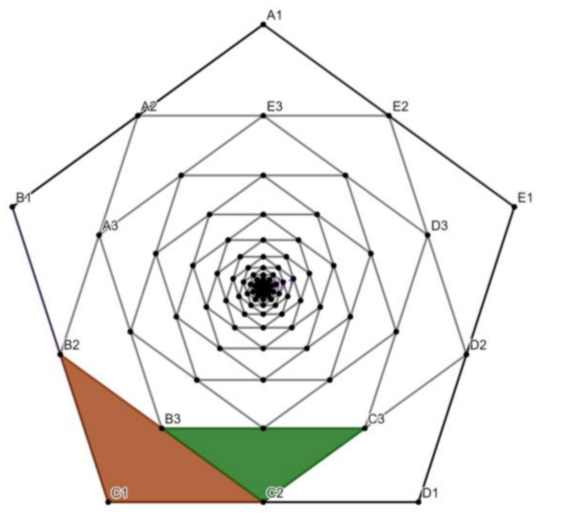
## 附錄三　正四邊形以等比例縮放方式在不同縮放率(r)下之面積與螺線圖形

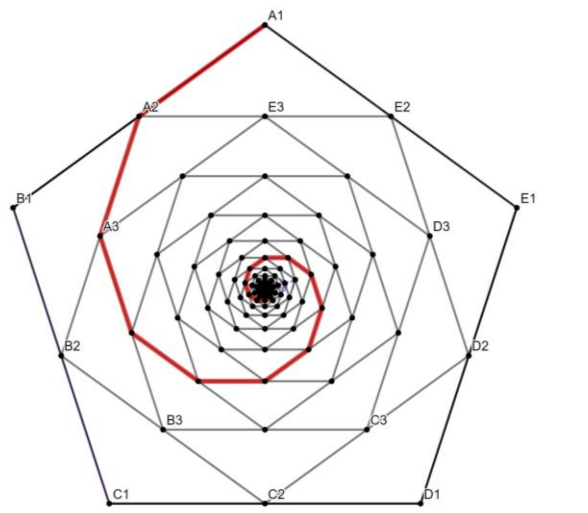
| 正四邊形-等比例縮放-面積圖形 | 正四邊形-等比例縮放-螺線圖形 |
|---|---|
| r=0.2 | r=0.2 |
|   |   |
| r=0.5 | r=0.5 |
|   |   |
| r=0.8 | r=0.8 |
|   |   |

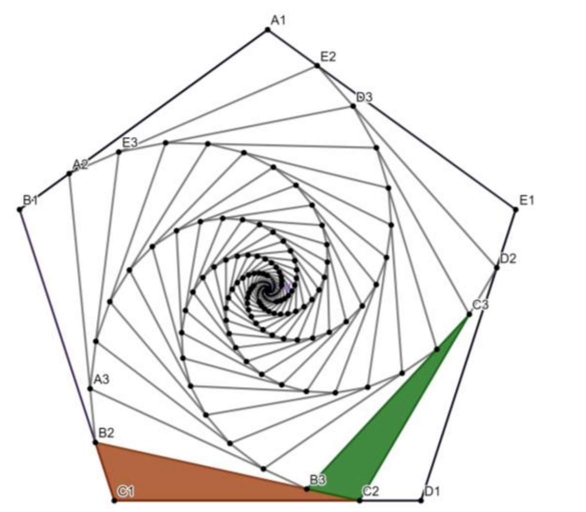
# 附錄四　正五邊形以等比例縮放方式在不同縮放率(r)下之面積與螺線圖形

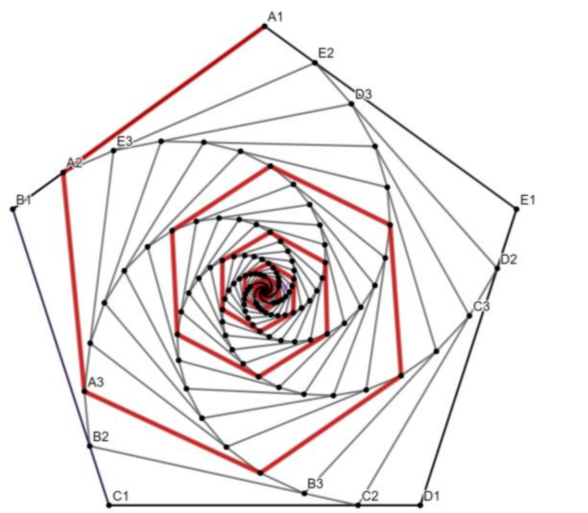
<table>
<tr><td>正五邊形-等比例縮放-面積圖形</td><td>正五邊形-等比例縮放-螺線圖形</td></tr>
<tr><td>r=0.2</td><td>r=0.2</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>r=0.5</td><td>r=0.5</td></tr>
<tr><td>


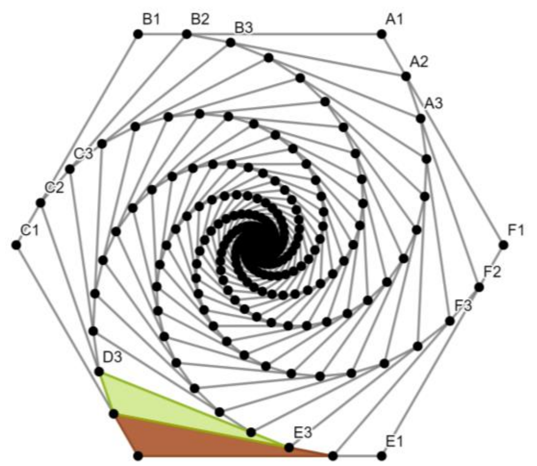
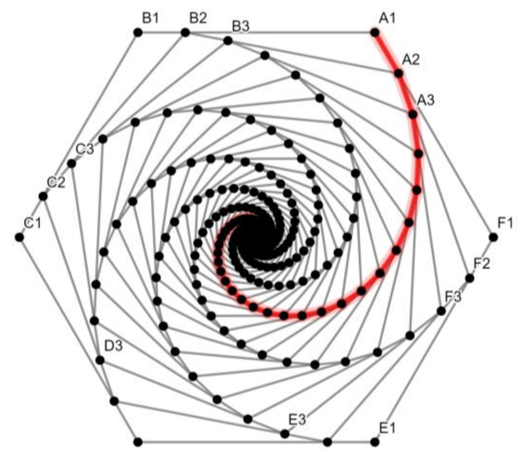
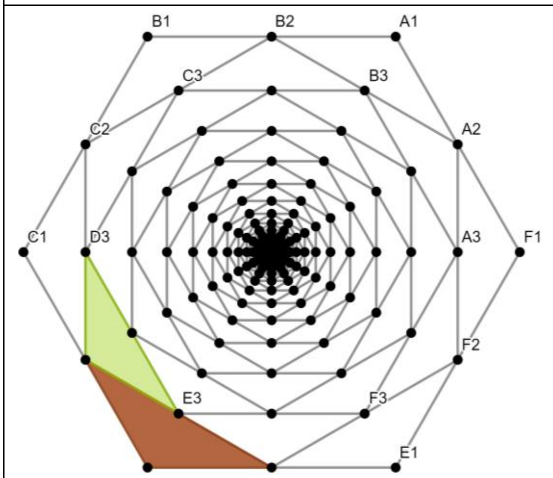
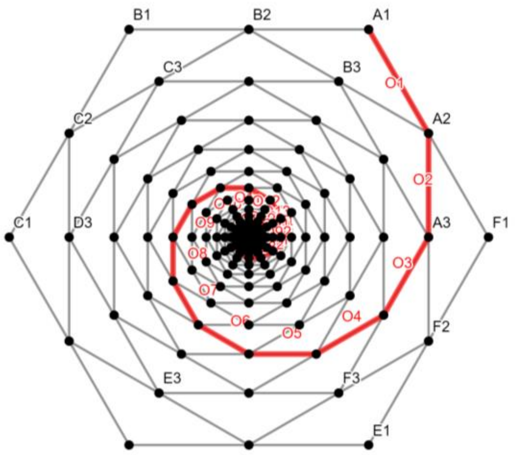
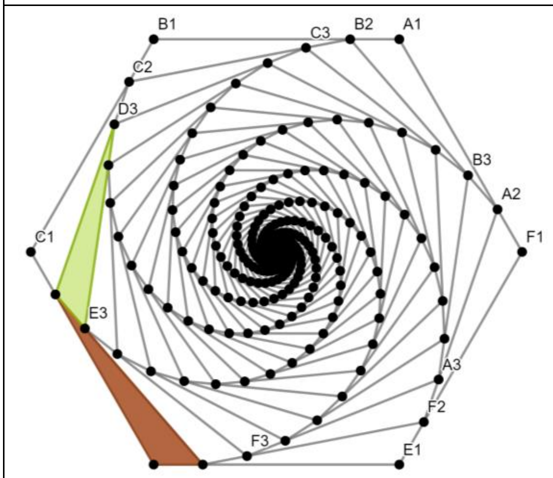
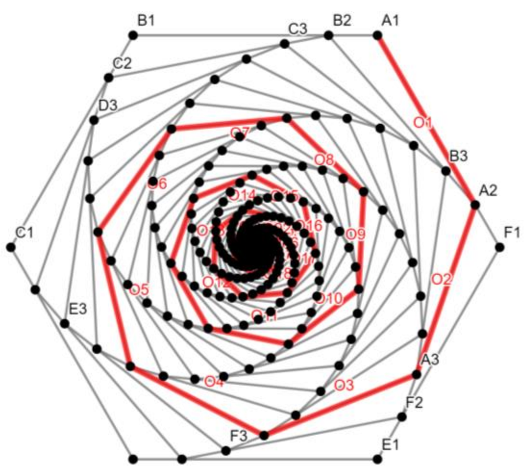
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>r=0.8</td><td>r=0.8</td></tr>
<tr><td>


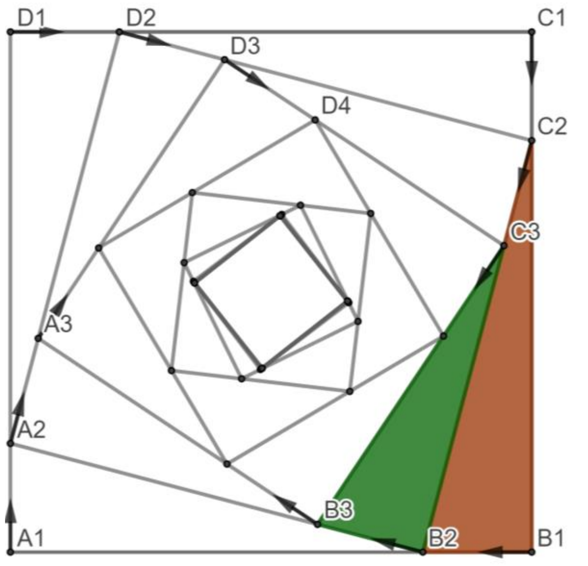
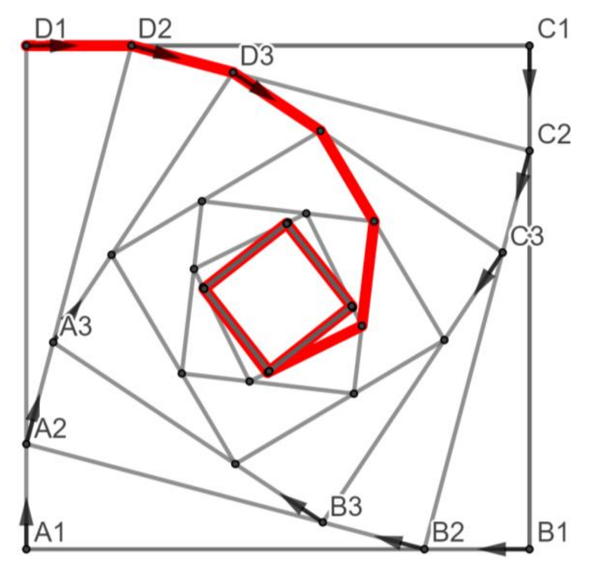
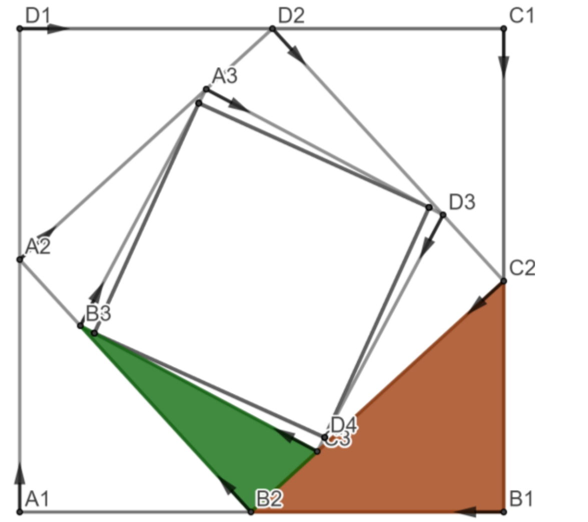
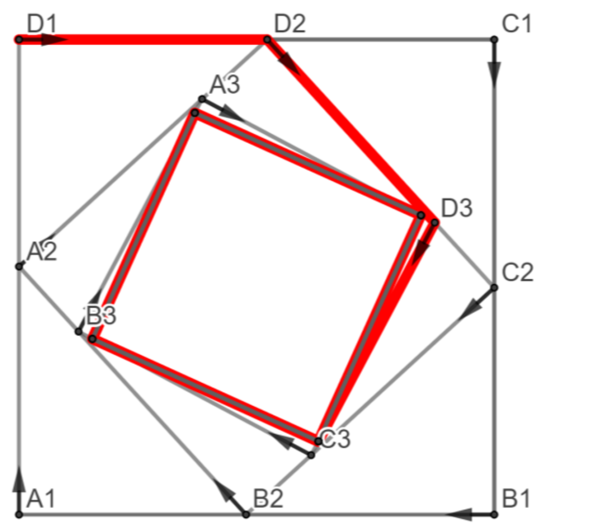
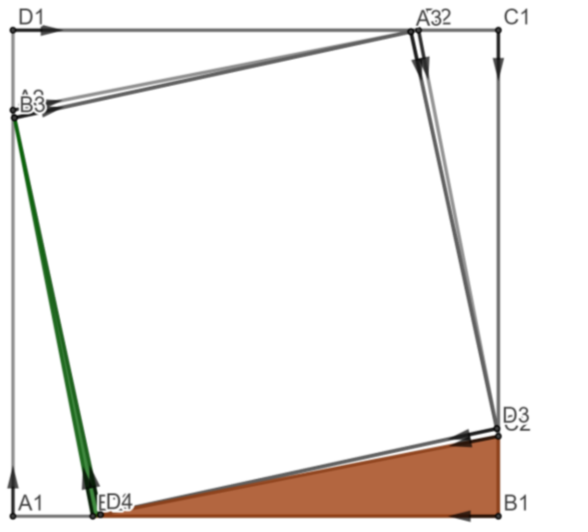
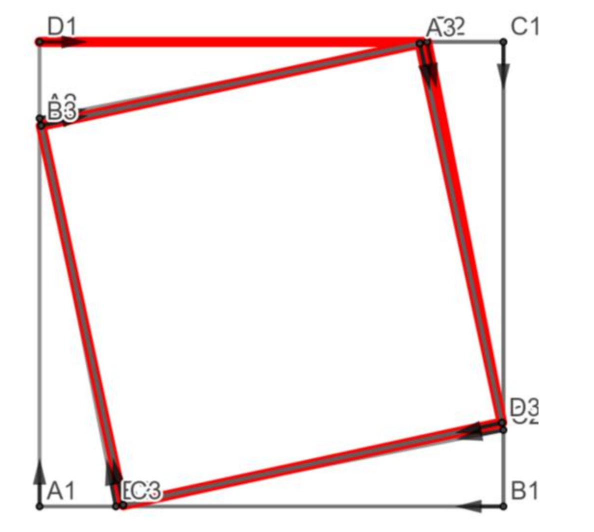
</td><td>


</td></tr>
</table>

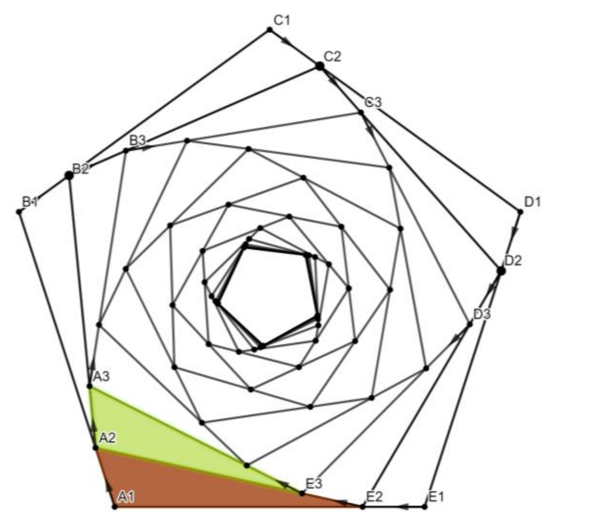
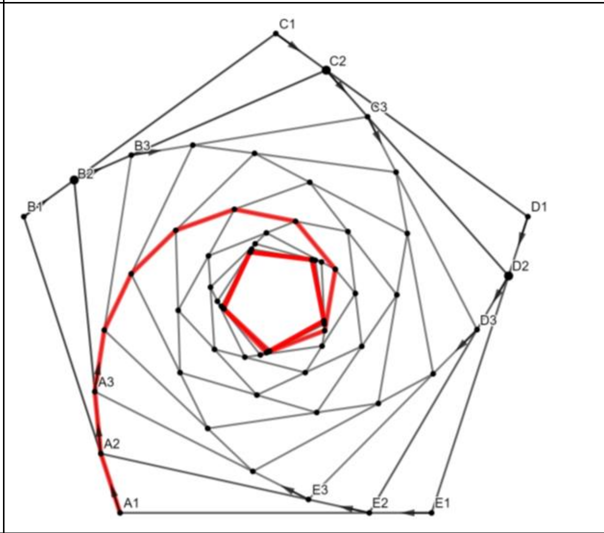
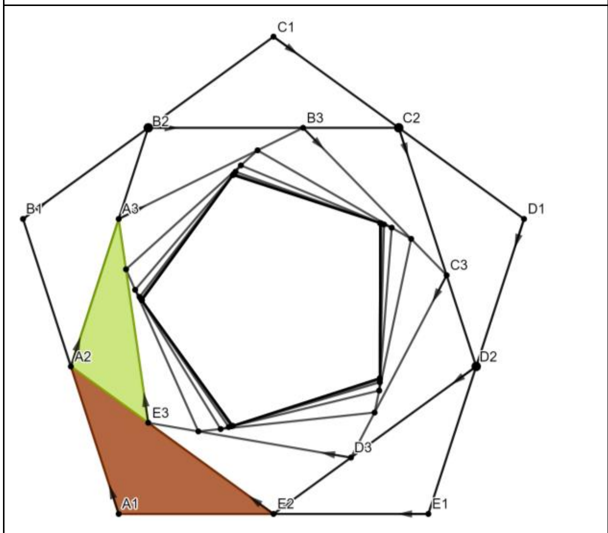
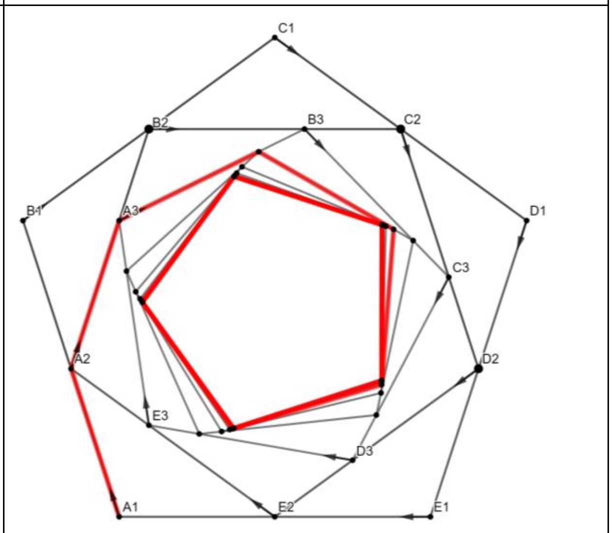
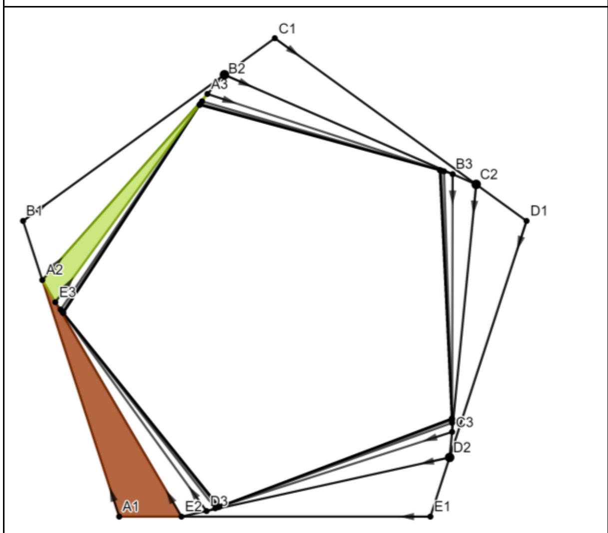
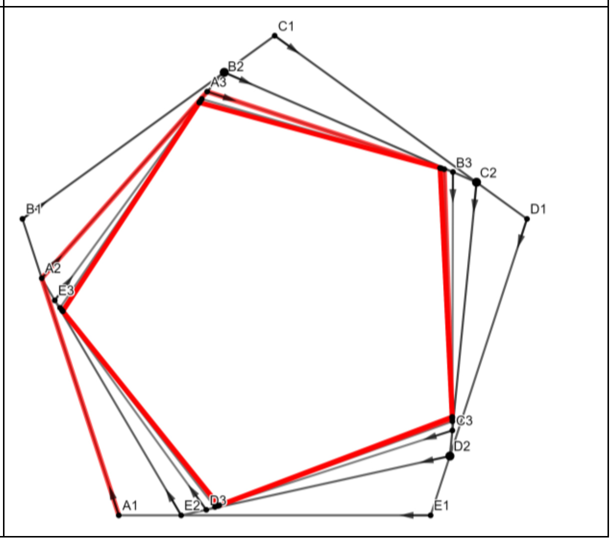
## 附錄五　正六邊形以等比例縮放方式在不同縮放率(r)下之面積與螺線圖形

<table>
<tr><td>正六邊形-等比例縮放-面積圖形</td><td>正六邊形-等比例縮放-螺線圖形</td></tr>
<tr><td>r=0.2</td><td>r=0.2</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>r=0.5</td><td>r=0.5</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>r=0.8</td><td>r=0.8</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

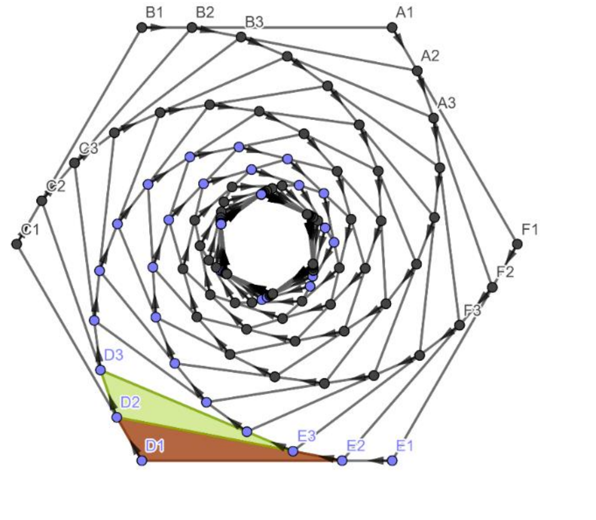
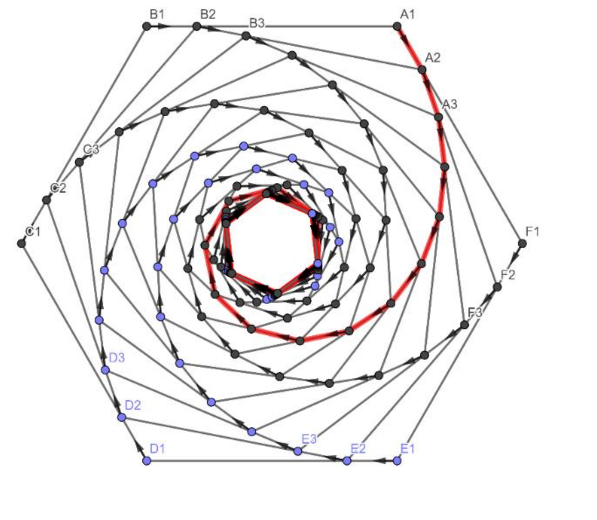
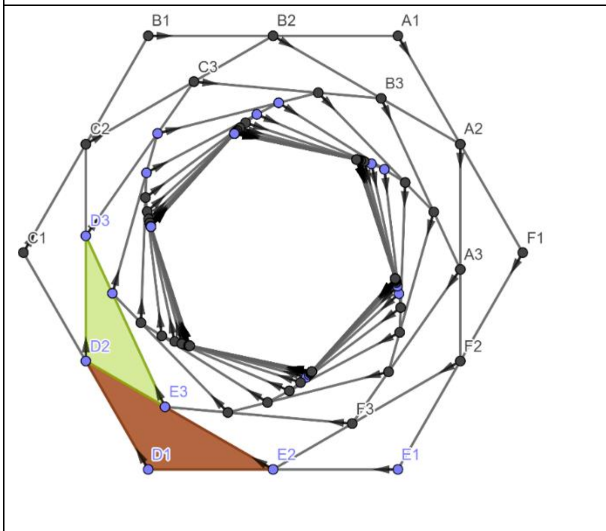
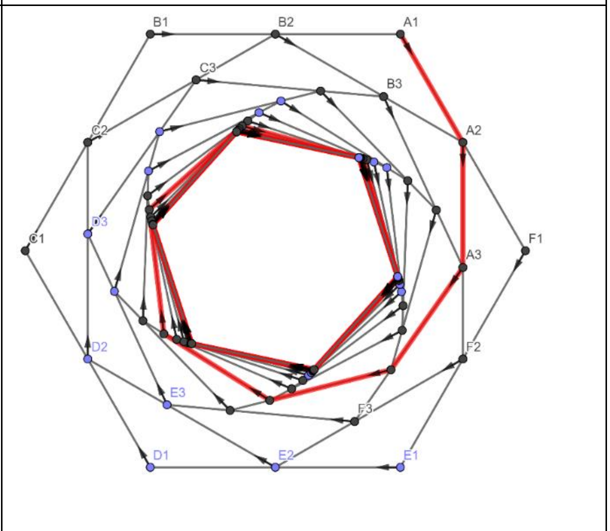
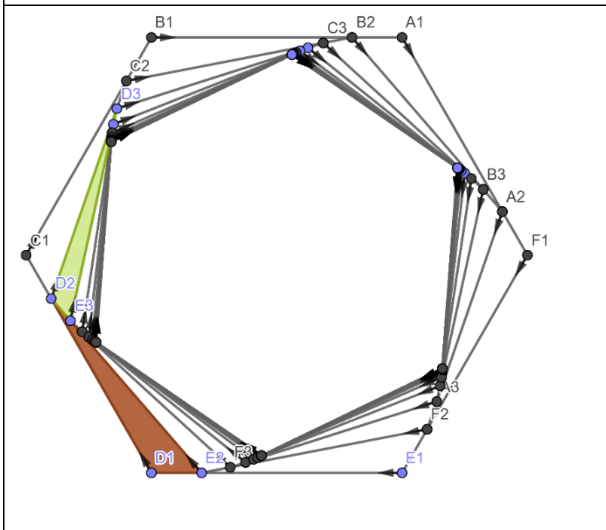
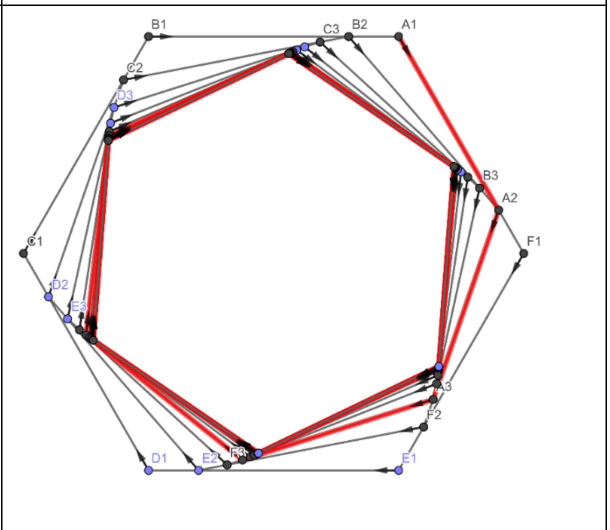
## 附錄六　正四邊形以固定邊長縮放方式在不同縮放率(R)下之面積與螺線圖形

| 正四邊形-固定邊長縮放-面積圖形 | 正四邊形-固定邊長縮放-螺線圖形 |
|---|---|
| R=2 | R=2 |
|  |  |
| R=5 | R=5 |
|  |  |
| R=8 | R=8 |
|  |  |

## 附錄七　正五邊形以固定邊長縮放方式在不同縮放率(R)下之面積與螺線圖形

| 正五邊形-固定邊長縮放-面積圖形 | 正五邊形-固定邊長縮放-螺線圖形 |
|---|---|
| R=2 | R=2 |
|  |  |
| R=5 | R=5 |
|  |  |
| R=8 | R=8 |
|  |  |

## 附錄八　正六邊形以固定邊長縮放方式在不同縮放率(R)下之面積與螺線圖形

| 正六邊形-固定邊長縮放-面積圖形 | 正六邊形-固定邊長縮放-螺線圖形 |
|---|---|
| R=2 | R=2 |
|  |  |
| R=5 | R=5 |
|  |  |
| R=8 | R=8 |
|  |  |