

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

團隊合作獎

030407

正多邊形越來越「正」了，因為有「螺」！

學校名稱：新竹縣立自強國民中學

作者： 國二 蘇熠治 國二 陳柏諺	指導老師： 鄭芬如 陳彥伶
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：正多邊形、二次函數、等角螺線

摘要

1. 本研究採用**解析幾何**方法發現，由正 n 邊形的特殊切割，發現了新正 n 邊形面積或與原正 n 邊形的面積比值都與切掉的小等腰三角形**腰長**或小正 n 邊形**邊長**具有特殊的二次函數的關係，亦即 $\omega_n \left[(r+x)^2 - (r+x) \right] + \lambda_n$ ，其中 $\omega_n = \frac{n \sin \theta_n}{2}$ 、 $\lambda_n = \frac{n}{4} \cot \left(\frac{\theta_n}{n-2} \right)$ ， $\theta_n = \frac{(n-2)\pi}{n}$ ；也因此，當切掉的小正 n 邊形的邊長在一定的長度時，可得出最小第二層正 n 邊形，且此時所切掉的小正 n 邊形是最大的。
2. 承 1，繼續特殊切割，並重複這些動作往內部一直畫出越來越小的正 n 邊形，當層數夠多時，這樣的作圖最終會收斂成中間一點。最終取出每一層正 n 邊形對應的頂點，則頂點軌跡可生成**等角螺線**，經證明得其總弧長及所掃面積分別與最外層正 n 邊形邊長及面積具一定關係存在。

壹、研究動機

在練習 2015 年 AMC8 的考古題時，看到一個題目：「邊長為 5 英寸的正方形被切掉了邊長為 1 英寸的四個小正方形，問在剩下的圖形內，能放下的最大正方形的面積是多少？」，當時我們用畢氏定理與相似性質解決了這個問題。後來又在一本「原來數學這麼有趣」[1]的書中，看到一篇介紹**蜘蛛與螺線**的文章，讓我們又想到前面 AMC8 的那一題正方形考古題，突然覺得可以在第二層最大的正方形中，切掉 4 個小正方形後，進而得到第三層最大正方形，甚至繼續依此方法往內部作出更多層的最大正方形。基於此想法，於是決定往這方面研究下去。另外於參考文獻[7]中，我們發現等角螺線的總弧長與正 n 邊形的**邊數**有關。因此，我們嘗試利用**解析幾何**不同的解法來重新證明文獻[4]中的等角螺線公式是否仍然具有相同的性質。最後延伸應用在正 n 邊形中，找出是否存在未發生的一些新發現。

貳、研究目的

1. 在邊長為 1 的原生正 n 邊形之 n 個頂點處切掉腰長為 r 的小等腰三角形後，作出剩下圖形中最大正 n 邊形（第二層正 n 邊形），探討：
 - 1.1 第二層正 n 邊形的面積與 r 的關係式；
 - 1.2 原生正 n 邊形與第二層正 n 邊形的面積關係；
 - 1.3 第二層正 n 邊形最小面積、切掉的小等腰三角形最大面積與 r 之關係。
2. 承 1，在 n 個頂點處改切掉邊長為 r 的小正 n 邊形，得到第二層正 n 邊形，
 - 2.1 重新探討在 1.1~1.3 所發現關係式的一般化並與 1.1~1.3 的結果做比較。
 - 2.2 驗證 2.1 中所有關係的一般化結果。
3. 承 1、2 的作法，依照切掉的小正 n 邊形與原生正 n 邊形的邊長比例關係，繼續在原圖形中往內部作出第三層、第四層、 \cdots 的漸小正 n 邊形，再依每層對應的頂點形成的等角螺線，如「討論與結論」中表格三的 4 張圖，探討：
 - 3.1 原生正 n 邊形中 n 條等角螺線長與原正 n 邊形邊長的倍數關係；
 - 3.2 任一條等角螺線掃過的面積與原正 n 邊形面積的關係。

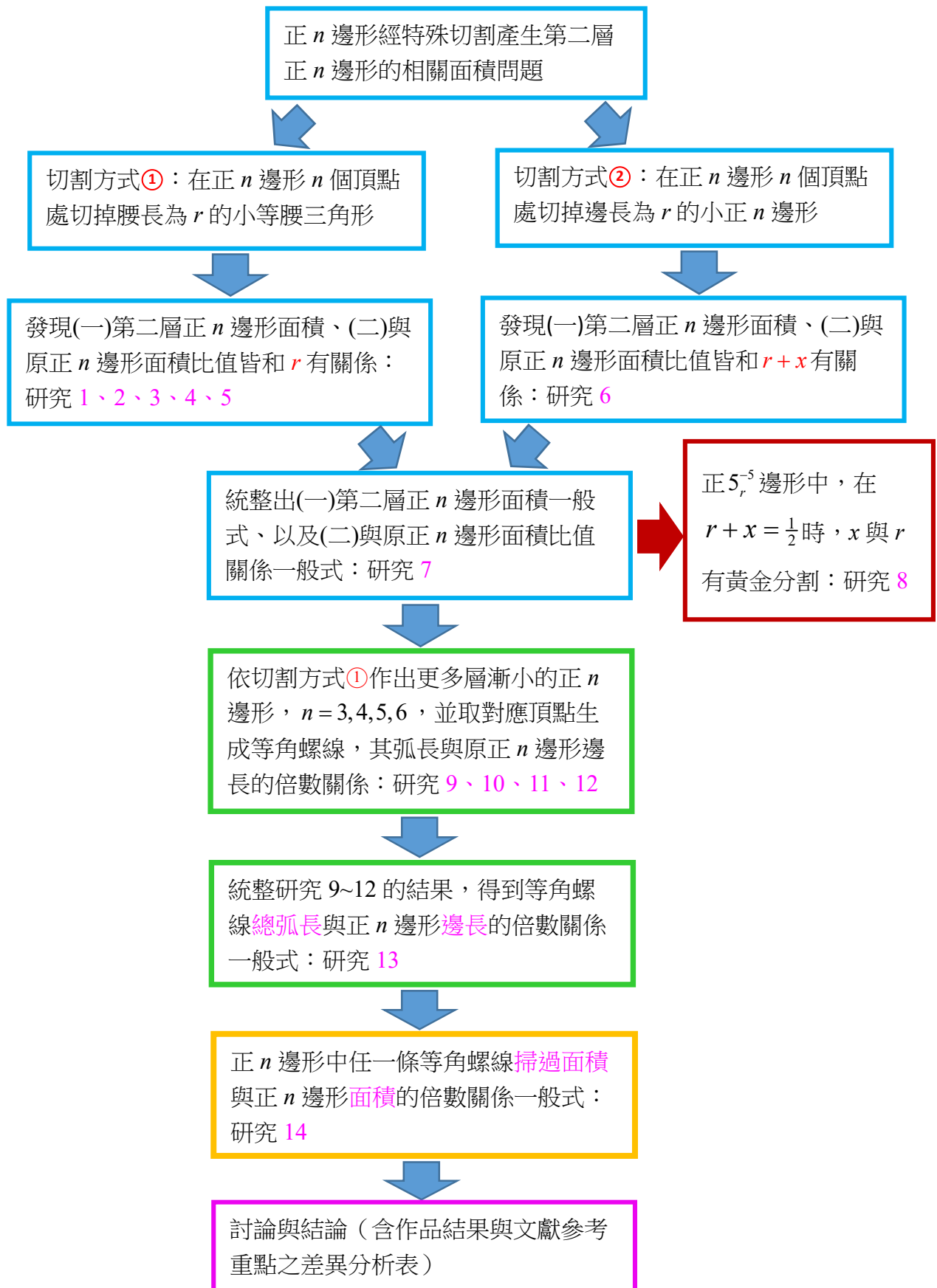
參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP 動態幾何繪圖軟體

肆、研究過程或方法

本文第一節先介紹已知性質，第二節則介紹新名詞的定義，第三節開始則依研究架構流程圖進行所有結果的探討，最後對文獻參考重點與本作品研究結果做差異性的分析比較。

研究架構圖



一、已知性質介紹：

性質 1：如圖 1，在 $36^\circ-54^\circ-90^\circ$ 的特殊直角三角形中，

$36^\circ-54^\circ-90^\circ$ 的對邊邊長比為 $(\sqrt{5}-2\sqrt{5}):1:(\sqrt{5}-1)$ 。

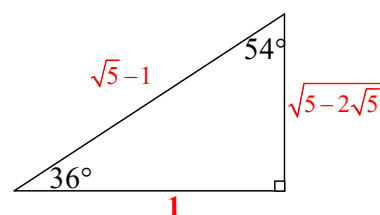


圖 1： $36^\circ-54^\circ-90^\circ$ 特殊直角三角形的邊長比例關係

性質 2：若一正 n 邊形的邊長為 a ，則其面積為 $\frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 。

二、名詞定義：

原生正 n_r^{-n} 邊形：

1. n ：邊長為 1 的原生正多邊形邊數；
2. $-n$ ：是指在頂點處切掉的小正 n 邊形邊數，本作品中只會探討 -3 和 $-n$ ，也就是切掉小等腰三角形與小正 n 邊形二種情形；
3. r ：是指切掉的小正 n 邊形的邊長。

例如圖 2 是一個原生正 3_r^{-3} 角形 $A_1A_2A_3$ ，其中 $n=3$ ， $-n=-3$ 是指頂點處

切掉的是小正三角形， r 為每個切掉的小正三角形之邊長。

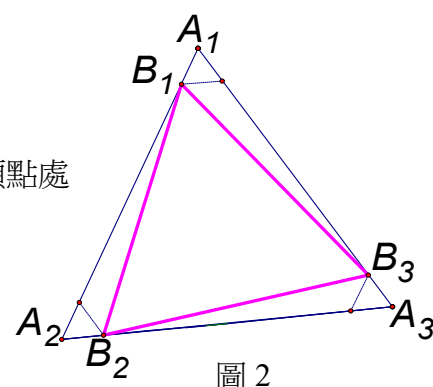


圖 2

三、探討原生正 n_r^{-3} 邊形中第二層正 n 邊形的面積與 r 的關係

(一)原生正 3_r^{-3} 角形：

我們只探討切掉小正三角形的情形，如圖 3 所示，

切掉的 3 個全等的小正三角形分別為 $\Delta A_1B_1A_{1,3}$ 、 $\Delta A_2B_2A_{2,1}$ 和

$\Delta A_3B_3A_{3,2}$ ，其中在 $\Delta A_3B_3A_{3,2}$ 中，令其邊長為 r ，高為 h ，

則可得到研究 1 如下。

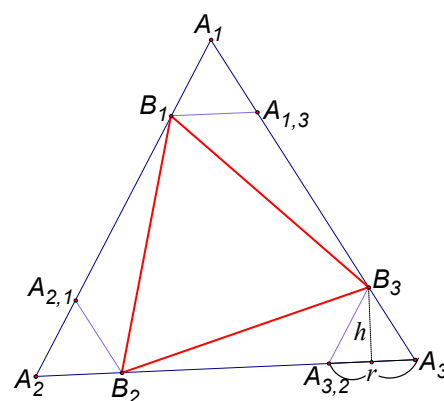


圖 3

研究 1：如圖 3

在原生正 3_r^3 角形 $A_1A_2A_3$ 中，在 3 個頂點處切掉三個邊長為 r 的小正三角形 $\Delta A_1B_1A_{1,3}$ 、

$\Delta A_2B_2A_{2,1}$ 和 $\Delta A_3B_3A_{3,2}$ ，則

(1)最大正 $\Delta B_1B_2B_3$ 的面積與 r 的關係式為 $\frac{3\sin\theta_3}{2}(r^2-r) + \frac{3\cot\theta_3}{4}$ ， $\theta_3 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

(2)在一般情形下，正 $\Delta B_1B_2B_3$ 與原生正 3_r^3 角形 $A_1A_2A_3$ 的面積比值為

$$2\sin\theta_3 \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)(r^2-r)+1$$

證明：(1) 因為 $h=r \times \sin 60^\circ$ 且 $\Delta A_3B_3B_2 = (1-r) \times r \sin \theta_3 \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{\sin \theta_3}{2}(r-r^2)$$

又正 n 邊形面積公式為 $\frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ ，則正 $\Delta A_1A_2A_3 = \frac{3}{4} \times 1^2 \times \cot \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \times \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\therefore \text{正}\Delta B_1B_2B_3 = \Delta A_1A_2A_3 - 3 \times \frac{\sin \theta_3}{2}(r-r^2) = \frac{3\sin\theta_3}{2}(r^2-r) + \frac{3\cot\theta_3}{4}$$

(2) 在一般情形下，

$$\frac{\Delta B_1B_2B_3 \text{面積}}{\Delta A_1A_2A_3 \text{面積}} = \frac{\frac{3\sin\theta_3}{2}(r^2-r) + \frac{3\cot\theta_3}{4}}{\frac{3\cot\theta_3}{4}} = 2\sin\theta_3 \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)(r^2-r)+1, \theta_3 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \quad \blacksquare$$

由研究 1 的結果(1)、(2)可知，

1. 第二層正三角形 $\Delta B_1B_2B_3$ 的面積與 r 為二次函數關係。

於是可以利用配方法找出 $\Delta B_1B_2B_3$ 面積的最小值，如圖 4，

$$\therefore \Delta B_1B_2B_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{16},$$

當 $r = \frac{1}{2}$ 時，正 $\Delta B_1B_2B_3 = \frac{\sqrt{3}}{16}$ 最小，此時 $\Delta A_1B_1A_{1,3}$ (即 $\Delta A_1B_1B_3$) $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}$ 最大

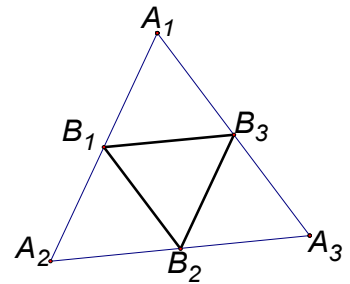


圖 4

2. 在 $r = \frac{1}{2}$ 時，正 $\Delta B_1B_2B_3$ 面積為原生正 3_r^3 三角形 $A_1A_2A_3$ 面積的 $\frac{1}{4}$ 倍是最小倍數關係。

(二)原生正 4_r^3 邊形：也就是正方形切掉 4 個小等腰直角三角形，如圖 5，切掉的 4 個全等的小等腰直角三角形分別為 $\Delta A_1B_1A_{1,2}$ 、 $\Delta A_2B_2A_{2,3}$ 、 $\Delta A_3B_3A_{3,4}$ 和 $\Delta A_4B_4A_{4,1}$ ，令其腰長為 r ，則可得到研究 2 如下。

研究 2：

在原生正 4_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，在 4 個頂點處切掉四個腰長為 r 的小等腰直角三角形，則

(1)正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 的面積與 r 的關係式為 $2\sin\theta_4(r^2 - r) + \cot\left(\frac{\theta_4}{2}\right)$ ， $\theta_4 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

(2)正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 面積與原生正 4_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的面積比值為 $2\sin\theta_4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)(r^2 - r) + 1$

證明：(1)因為 4 個全等直角 Δ 之面積和 $= (1-r) \times r \sin\theta_4 \times \frac{1}{2} \times 4 = 2\sin\theta_4(r - r^2)$

$$\text{又正方形 } A_1A_2A_3A_4 \text{ 面積} = \frac{4}{4} \cot\left(\frac{\theta_4}{4-2}\right) = \cot\left(\frac{\theta_4}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{正方形 } B_1B_2B_3B_4 \text{ 面積} &= \cot\left(\frac{\theta_4}{2}\right) - 2\sin\theta_4(r - r^2) \\ &= 2\sin\theta_4(r^2 - r) + \cot\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \end{aligned}$$

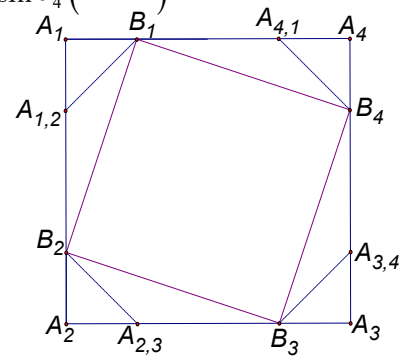


圖 5

(2) 在一般情形下，

$$\begin{aligned} \frac{\text{正方形 } B_1B_2B_3B_4 \text{ 面積}}{\text{正方形 } A_1A_2A_3A_4 \text{ 面積}} &= \left[2\sin\theta_4(r^2 - r) + \cot\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \right] \div \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\sin\theta_4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)(r^2 - r) + 1 \quad \text{故得證} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

由研究 2 的結果(1)、(2)可知，如圖 6，

1. 第二層正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 的面積與 r 有關，為 r 的二次函數關係。

當 $r = \frac{1}{2}$ 時，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 面積 = $\frac{1}{2}$ 最小，此時

$\Delta A_1B_1A_{1,2}$ (即 $\Delta A_1B_1B_2$) = $\frac{1}{8}$ 最大。

2. 在 $r = \frac{1}{2}$ 時，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 面積為原生正 4_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 面積的 $\frac{1}{2}$ 倍是最小倍數關係。

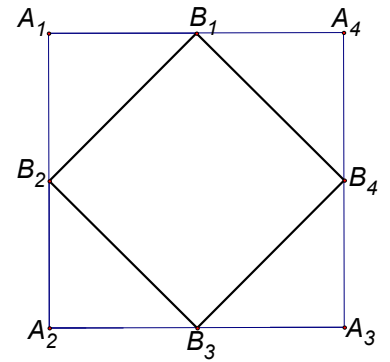


圖 6

從研究 1、2 的結果，可以看到第二層的正三角形、正方形面積皆與原生正三角形、正方形中切掉的小等腰三角形之腰長有二次函數的關係，且此函數的每一項係數都是整數。接下來觀察原生正 5_r^3 邊形時，發現其內角是比較特殊的角，故其對邊的長度也是成特殊的根式比例關係，我們繼續探討原生正 5_r^3 邊形、正 6_r^3 邊形、……等在可能會有相同規律關係下，其二次函數的係數是否也有不錯的形式。

(三)原生正 5_r^3 邊形：也就是正五邊形切掉 5 個小等腰三角形

如圖 7，切掉的 5 個全等的小等腰三角形分別為

$\Delta A_1A_{1,2}B_1$ 、 $\Delta A_2A_{2,3}B_2$ 、 $\Delta A_3A_{3,4}B_3$ 、 $\Delta A_4A_{4,5}B_4$ 和 $\Delta A_5A_{5,1}B_5$ ，

令其腰長為 r ，則可得到研究 3 如下。

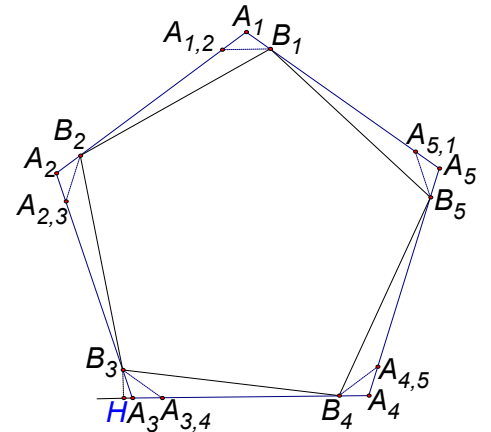


圖 7

研究 3：

在原生正 5_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中，在 5 個頂點處切掉五個腰長為 r 的小等腰三角形，則

(1) 正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的面積與 r 的關係式為 $\frac{5 \sin \theta_5}{2} (r^2 - r) + \frac{5}{4} \cot \left(\frac{\theta_5}{3} \right)$ ，

(2) 正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 面積與原生正 5_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的面積比值為

$$2 \sin \theta_5 \tan \left(\frac{\pi}{5} \right) (r^2 - r) + 1。$$

證明：(1)由性質 2 可知，邊長為 t 的正五邊形面積公式為 $\frac{5t^2}{4} \cot\left(\frac{\theta_5}{5-2}\right)$

當 $t=1$ 時，原生正 5_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 面積 = $\frac{5}{4} \cot\left(\frac{\theta_5}{5-2}\right)$

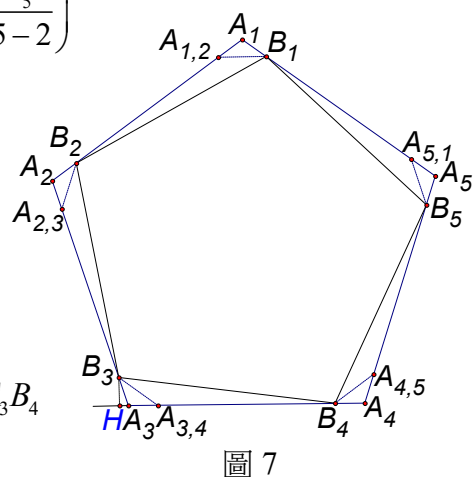
圖 7 中，若 $\Delta A_3A_3A_4B_3$ 的腰長為 r ，高為 $\overline{B_3H} = r \sin \theta_5$ ，

$$\therefore \Delta B_3A_3B_4 \text{ 面積} = (1-r) \times r \sin \theta_5 \times \frac{1}{2} = \frac{\sin \theta_5}{2} (r - r^2)$$

$$\therefore \text{正五邊形 } B_1B_2B_3B_4B_5 = \text{原生正 } 5_r^3 \text{ 邊形 } A_1A_2A_3A_4A_5 - 5 \times \Delta B_3A_3B_4$$

$$= \frac{5}{4} \cot\left(\frac{\theta_5}{5-2}\right) - \frac{5 \sin \theta_5}{2} (r - r^2)$$

$$= \frac{5 \sin \theta_5}{2} (r^2 - r) + \frac{5}{4} \cot\left(\frac{\theta_5}{3}\right)$$



(2)在一般情況下，

$$\frac{\text{正五邊形 } B_1B_2B_3B_4B_5 \text{ 面積}}{\text{正五邊形 } A_1A_2A_3A_4A_5 \text{ 面積}} = \left[\frac{5 \sin \theta_5}{2} (r^2 - r) + \frac{5}{4} \cot\left(\frac{\theta_5}{3}\right) \right] \div \frac{5}{4} \cot\left(\frac{\theta_5}{3}\right)$$

$$= 2 \sin \theta_5 \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) (r^2 - r) + 1$$

故得證 ■

由研究 3 的結果(1)、(2)可知，

1. 第二層正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的面積與 r 有關，為 r 的二次函數關係。

當 $r = \frac{1}{2}$ 時，正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 面積 = $\frac{8\sqrt{25+10\sqrt{5}} - 5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{32}$ 最小，

此時 $\Delta A_1B_1A_{1,2}$ (即 $\Delta A_1B_1B_2$) = $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{32}$ 最大，如圖 8。

2. 在 $r = \frac{1}{2}$ 時，正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 面積為原生正 5_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 面積的 $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$ 倍是最小倍數關係。

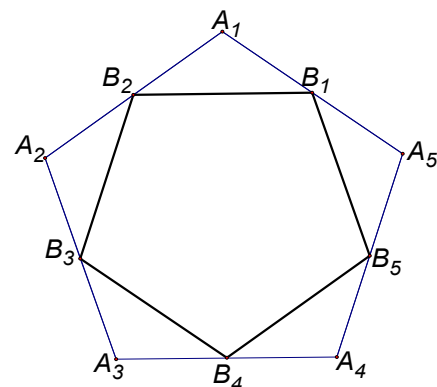


圖 8

(四)原生正 6_r^{-3} 、 7_r^{-3} 邊形：也就是正六邊形切掉 6 個小等腰三角形、正七邊形切掉 7 個小等腰

腰三角形，令其腰長為 r ，則我們得到研究 4、5 如下。

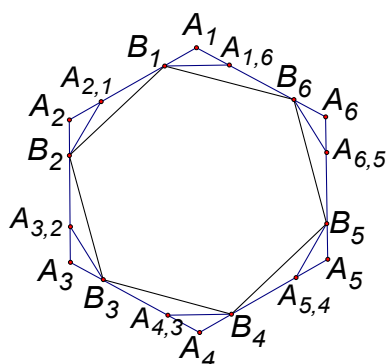


圖 9

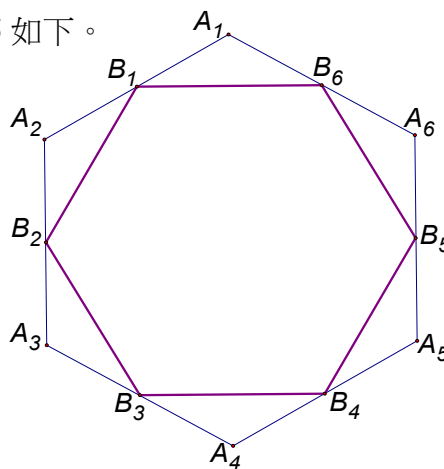


圖 10

研究 4：如圖 9

在原生正 6_r^{-3} 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 中，

(1)正六邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 的面積與 r 的關係式為 $3\sin\theta_6(r^2 - r) + \frac{3}{2}\cot\left(\frac{\theta_6}{4}\right)$ ，

(2)正六邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 面積與原生正 6_r^{-3} 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的面積比值為

$$2\sin\theta_6 \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)(r^2 - r) + 1$$

證明：同前述研究。

由研究 4 的結果(1)、(2)可知，

1. 當 $r = \frac{1}{2}$ 時，正六邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 面積 = $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ 會最小，此時 6 個切掉的小等腰三角形

= $\frac{\sqrt{3}}{16}$ 會最大，如圖 10。

2. 在 $r = \frac{1}{2}$ 時，正六邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 面積是原生正 6_r^{-3} 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積的 $\frac{3}{4}$ 倍
是最小倍數關係。

研究 5：如圖 11

在原生正 7_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 中，

(1) 正七邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ 的面積與 r 的關係式為 $\frac{7 \sin \theta_7}{2}(r^2 - r) + \frac{7}{4} \cot \frac{\theta_7}{5}$ ；

(2) 正七邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ 面積與原生正 7_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 的面積比值為 $2 \sin \theta_7 \tan\left(\frac{\pi}{7}\right)(r^2 - r) + 1$ 。

證明：同前述研究。

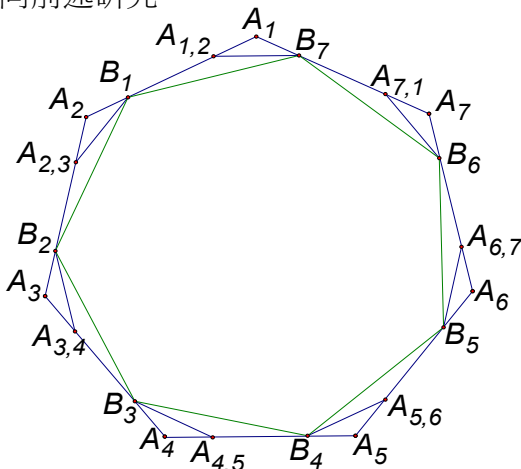


圖 11

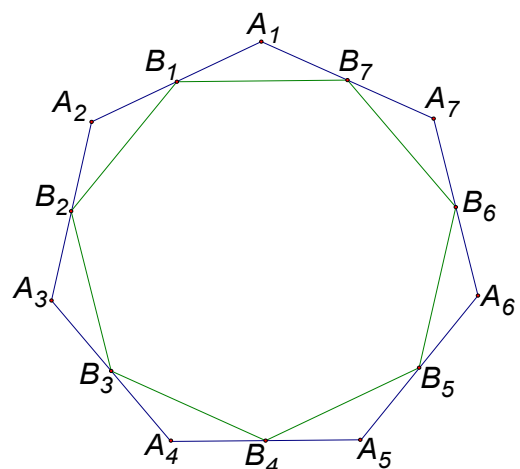


圖 12

由研究 5 的結果(1)、(2)可知，

1. 當 $r = \frac{1}{2}$ 時，正七邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ 面積 = $\frac{7}{8} \times \left(2 \cot \frac{\theta_7}{5} - \sin \theta_7 \right)$ 會最小，此時 7 個切掉的小

等腰三角形面積 = $\frac{1}{4} \left(\sin \frac{\theta_7}{2} \times \cos \frac{\theta_7}{2} \right)$ 會最大，如圖 12， θ_7 代表正七邊形的內角度數。

2. 當 $r = \frac{1}{2}$ 時，正七邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ 面積是原生正 7_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 面積的

$\frac{1}{2} \times \left[2 - \sin \theta_7 \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) \right]$ 倍是最小倍數關係。

四、探討原生正 4_r^4 、 5_r^5 、 \dots 、 n_r^n 邊形中第二層正 n 邊形的面積與 r 的關係

從研究 1 到 5，我們是針對原生正 n 邊形切掉 n 個腰長為 r 的小等腰三角形後，得到內部第二層的最大正 n 邊形，探討其面積與 r 的關係後，又得到其最小面積的情形。接下來繼續探討原生正 n 邊形切掉邊長為 r 的小正 n 邊形時，內部得到第二層的最大正 n 邊形面積與 r 之間，彼此又有什麼關係呢？當然第二層正 n 邊形的 n 個頂點已無法是切掉小正 n 邊形的一個頂點，而是第二層正 n 邊形的 n 個邊必會通過切掉小正 n 邊形的一個頂點而得之，如圖

13，第二層正五邊形的一邊 $\overline{B_1B_2}$ 通過小正五邊形

$A_1A_2A_3A_4A_5$ 的其中一個頂點 $A_{1,4}$ ，也因為如此，

圖形中多出了一個線段 $\overline{A_{1,5}B_1}$ 。於是本研究假設

這樣的線段為 x ，也就是 $\overline{A_{1,5}B_1} = \overline{A_{2,5}B_2} = \overline{A_{3,5}B_3}$

$= \overline{A_{4,5}B_4} = \overline{A_{5,5}B_5} = x$ 。我們從原生正 4_r^4 邊形開始討論切掉 4 個

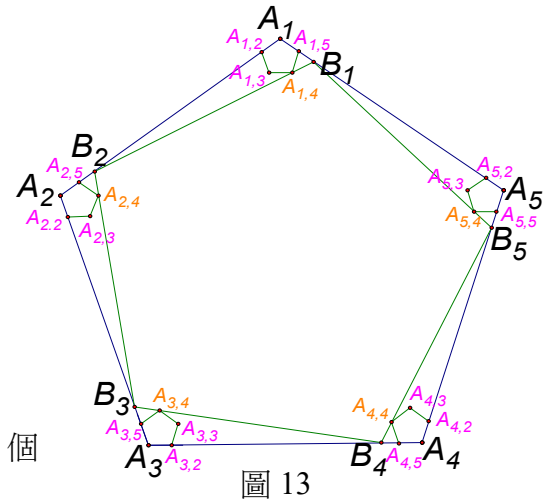


圖 13

小正方形後得到內部最大正方形 $B_1B_2B_3B_4$ 面積與 r 的關係演變成如何呢？推導分析如下：

如圖 14，由畢氏定理， $\therefore \overline{B_1B_2}^2 = \overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_1B_2}^2$

$$\therefore \text{正方形 } B_1B_2B_3B_4 \text{ 面積} = 2(r+x)^2 - 2(r+x) + 1$$

上式剛好與研究 2 中關係式 $2\sin\theta_4(r^2-r) + \cot\left(\frac{\theta_4}{2}\right)$ 的係數數值化

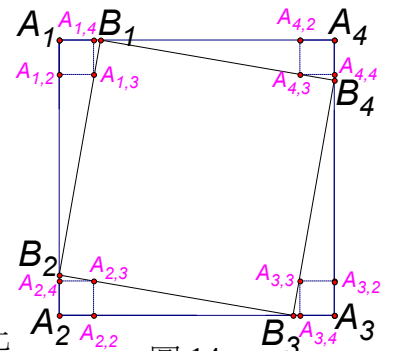


圖 14

結果 $2r^2 - 2r + 1$ 有相同規律形式。於是本研究進一步想到切掉小等腰三角形或小正 n 邊形其實是一樣的，如圖 15，也就是小等腰三角形的腰長 r' 等於小正 n 邊形的邊長 r 加上多出來的 x 。於是在原生正 n 邊形的 n 個頂點處切掉小正 n 邊形後，得到第二層正 n 邊形面積或該面積是原生正 n 邊形面積的幾倍關係，一定也會與 $r+x$ 的二次函數有關，且具有與研究 1~5 相同規律的係數關係。最後推論並驗證得到研究 6。

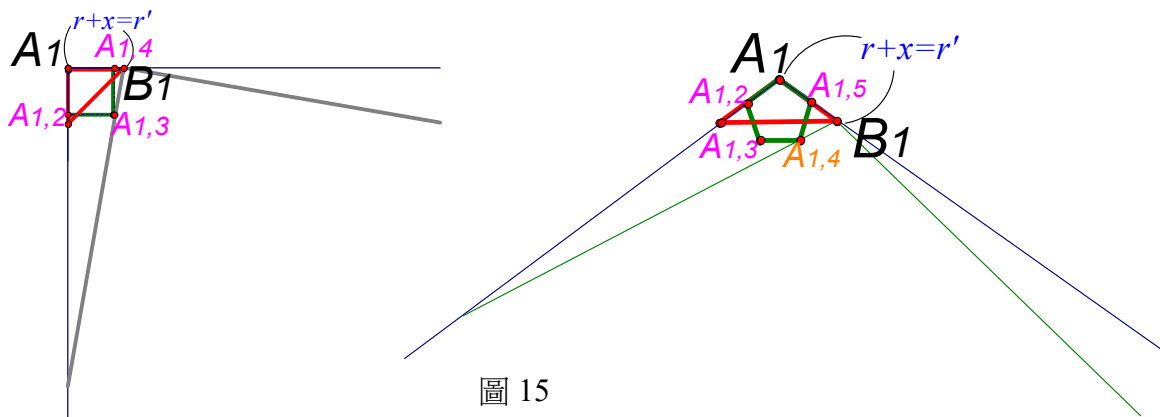


圖 15

研究 6：如圖 16

在原生正 n_r^n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 中， $n = 3, 4, 5, \dots$ ，在 n 個頂點處切掉 n 個邊長為 r 的小正 n 邊形，令 $\overline{B_1A_{1,n}} = \overline{B_2A_{2,n}} = \overline{B_3A_{3,n}} = \dots = \overline{B_nA_{n,n}} = x$ ， $\theta_n = \frac{(n-2)\pi}{n}$ 為正 n 邊形的任一內角度數， $\pi = 180^\circ$ 角的徑度量。則

(1) 正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 的面積與 r 、 x 的關係式為 $\frac{n \sin \theta_n}{2} [(r+x)^2 - (r+x)] + \frac{1}{4} \times \left[n \cot \left(\frac{\theta_n}{n-2} \right) \right]$

(2) 正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 面積與原生正 n_r^n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的面積比值為

$$2 \sin(\theta_n) \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) [(r+x)^2 - (r+x)] + 1$$

證明：(1) 如圖 16，過 B_2 作 $\overline{B_2H_2} \perp \overline{A_3A_2}$ 於 H_2

$$\because \angle H_2A_2B_2 = 180^\circ - \angle B_2A_2B_3 = 180^\circ - \theta_n$$

$$\text{其中 } \theta_n = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

$$\text{令 } \overline{A_2B_2} = x+r = A \text{、又 } \overline{A_2A_{2,n}} = r \text{，} \overline{A_{2,n}B_2} = x$$

$$\therefore \frac{\overline{B_2H_2}}{\overline{A_2B_2}} = \sin(180^\circ - \theta_n) = \sin \theta_n$$

$$\Rightarrow \overline{B_2H_2} = \overline{A_2B_2} \sin \theta_n = (x+r) \sin \theta_n = A \sin \theta_n$$

$$\therefore \Delta B_2A_2B_3 = \overline{A_2B_3} \times \overline{B_2H_2} \times \frac{1}{2} = (1-A) \cdot A \sin \theta_n \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sin \theta_n}{2} \cdot (A - A^2)$$

再搭配性質 2 的正 n 邊形面積公式可得

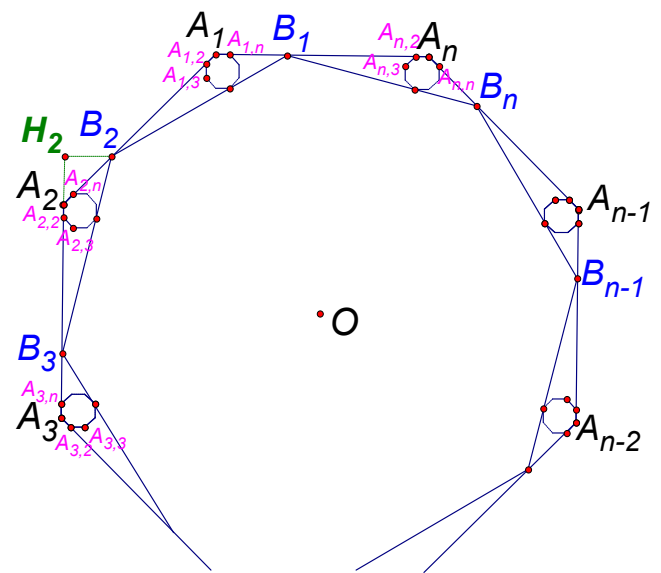


圖 16

正 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 面積 = 正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 面積 - $n \times \Delta B_2A_2B_3$ 面積

$$= \frac{n}{4} \times l^2 \times \cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right) - n \times \frac{\sin \theta_n}{2} (A - A^2)$$

$$= \frac{n \times \sin \theta_n}{2} (A^2 - A) + \frac{n}{4} \cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right)$$

$$\because \theta_n = \frac{(n-2) \cdot \pi}{n} \Rightarrow \frac{\pi}{n} = \frac{\theta_n}{n-2}$$

(2) 在一般情形下， $\frac{\text{正 } n \text{ 邊形 } B_1B_2\cdots B_n \text{ 面積}}{\text{正 } n \text{ 邊形 } A_1A_2\cdots A_n \text{ 面積}} = \left[\frac{n \sin \theta_n}{2} (A^2 - A) + \frac{n}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \right] \div \frac{n \cot \frac{\pi}{n}}{4}$

$$= \frac{n \times \sin \theta_n (A^2 - A)}{2} \times \frac{4}{n \times \cot \frac{\pi}{n}} + 1 = 2 \sin \theta_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) (A^2 - A) + 1$$

故得證 ■

由研究 6 的結果(1)、(2)可知，

1. 當 $r+x = \frac{1}{2}$ 時，正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 面積 = $\frac{n}{8} \left[2 \cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right) - \sin \theta_n \right]$ 會最小，此時 n 個切掉的全等小正 n 邊形最大面積為 $\frac{1}{4} \times \left[n \cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right) \right] \times r^2$ ；
2. 在 $r+x = \frac{1}{2}$ 時，正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 面積是原生正 n_r^{-n} 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 面積的 $\frac{1}{2} \left[2 - \sin \theta_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]$ 倍，是最小倍數關係。

本研究統一討論原生正 n_r^{-3} 邊形 ($x=0$ 的情形)，並將研究 1~6 的面積關係式中所有二次

函數的各項有規律的係數轉換成 ω_n 、 λ_n 、 ϕ_n 而得到一般化的結果，如研究 7 所示。

研究 7：

在原生正 n_r^{-3} 邊形中， $n = 3, 4, 5, \dots$ ，在 n 個頂點處切掉 n 個腰長為 r 的小等腰三角形，則

(1) 第二層正 n 邊形面積與 r 的關係式為 $\omega_n (r^2 - r) + \lambda_n$ ， $\omega_n = \frac{n \sin \theta_n}{2}$ 、 $\lambda_n = \frac{n}{4} \cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right)$

(2) 第二層正 n 邊形與原生正 n_r^{-n} 邊形的面積比值為 $\phi_n (r^2 - r) + 1$ ， $\phi_n = 2 \sin \theta_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 。

另外值得一提的是如下面研究 8 的結果：

研究 8：如圖 17

當 $r+x=\frac{1}{2}$ 時，在原生正 5_r 邊形中的 $r=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ 、 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ，且 x 與 r 的比值為 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ，為黃金比值。

證明：如圖 17，在 $\Delta A_1A_{1,3}A_{1,4}$ 和 $\Delta B_1A_{1,5}A_{1,4}$ 中，

$$\because \overline{A_1A_{1,2}} = \overline{A_{1,2}A_{1,3}} = r = \overline{A_{1,3}A_{1,4}} = \overline{A_{1,4}A_{1,5}},$$

$$\angle A_1A_{1,3}A_{1,4} = \angle A_1A_{1,4}A_{1,3} = 72^\circ, \text{ 又 } \angle B_1A_{1,5}A_{1,4} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$\text{且 } \angle A_{1,5}B_1A_{1,4} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ \Rightarrow \angle B_1A_{1,4}A_{1,5} = 72^\circ$$

$$\therefore \Delta A_1A_{1,3}A_{1,4} \cong \Delta B_1A_{1,5}A_{1,4} \text{ (ASA) 皆為 } 36^\circ - 72^\circ - 72^\circ \text{ 的}$$

$$\text{黃金等腰三角形且 } \overline{A_1A_{1,3}} = \overline{B_1A_{1,5}} = x = \overline{B_1A_{1,4}} = \overline{A_1A_{1,4}}$$

兩腰皆等於 x ，底邊為 r 的黃金等腰三角形

$$\therefore \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 為黃金分割比，又 } x+r = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}+1}{2}r+r = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

也就是 $x+r = \frac{1}{2}$ 時，切掉的正五邊形 $A_1A_{1,2}A_{1,3}A_{1,4}A_{1,5}$ 會最大，且第二層正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$

會最小，此時 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 、 $r = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ ，且 $\frac{x}{r} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 為完美的黃金比例分割比 ■

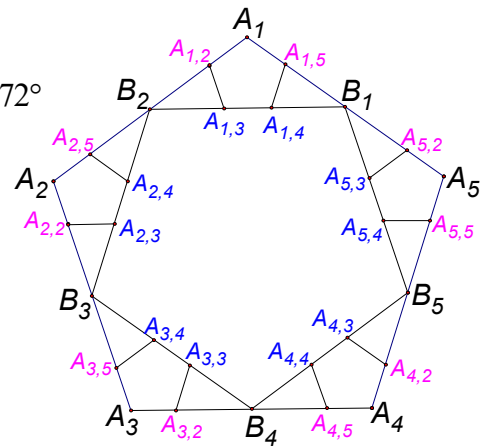


圖 17

分析第二層正 n 邊形之後，我們被「原來數學這麼有趣」書中的「蜘蛛與螺線」[1]一文吸引而想到如果對第二層正 n 邊形繼續作出第三層正 n 邊形，再對第三層正 n 邊形作出第四層正 n 邊形， \cdots 一直重複作下去，產生多層且漸小的正 n 邊形圖形又有什麼有趣的結果發

生呢？就像在文獻[9]書中引用自然界中的雛菊和向日葵的花蕊排列、鸚鵡螺的外殼、象鼻、羊角、幾何界裡的黃金矩形、三角形等都可見等角螺線的蹤跡，我們也在正 n 邊形中發現此等角螺線，且得到等角螺線總弧長與掃過面積竟與正 n 邊形的邊長與面積具有遞迴性的比例關係，而當中的美應該就是來自遞迴排列的美麗呈現吧！

五、探討原生正 n_r^3 邊形 ($n=3,4,\dots$) 中的等角螺線

依第二層的作法繼續往內部作出 n (n 足夠多) 層的正 n 邊形，先設定切掉的小正 n 邊形為小等腰三角形，且小等腰三角形腰長與該層正 n 邊形邊長維持 $\overline{A_1A_n} : \overline{A_1B_1} = 1:r$ 的比例來切，如此重複相同的作法往內部作出足夠多層的正 n 邊形後，最後會有足夠小的正 n 邊形會收斂在內部的中心點 O 上。取每一層正 n 邊形對應的頂點會形成等角螺線，且等角螺線長與原生正 n_r^3 邊形邊長（邊長為 1）的比值關聯性，本研究也逐一討論並實際驗證作圖及證明。

(一) 等角螺線及螺線長的介紹：

本研究在「數學知識」網站上查到關於趙文敏教授的一篇有關等角螺線的介紹[2]，從文章中了解到等角螺線的定義如下

如圖 18，若一曲線在每個點 C_1 的切向量都與某定點 O 至此點 C_1 所成的向量 $\overline{OC_1}$ 夾成一定角，且此定角不是直角，則此曲線稱為一等角螺線 (equiangular spiral)， O 點稱為它的極點 (pole)。

趙教授的例子[2]與「蜘蛛與螺線」[1]的結論是一樣的，都是由正方形中的等角螺線開始討論，而在「昌爸工作坊」網站[3]也提到正方形中的等角螺線總弧長會等於正方形的邊長。於是本研究延伸趙教授等角螺線弧長的公式去探討其他正多邊形中等角螺線總弧長與該正 n 邊形邊長的關係。

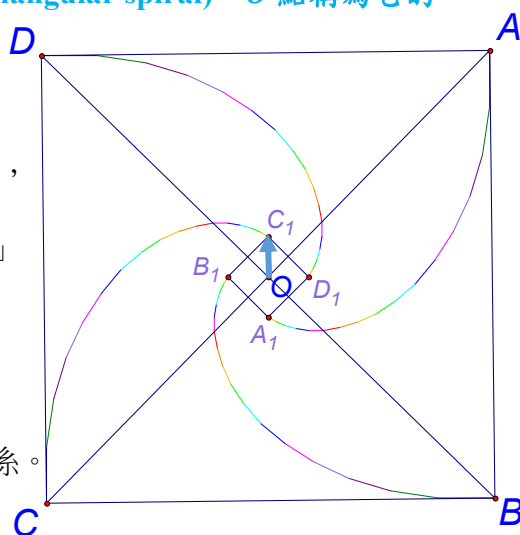


圖 18

並且在第 34 屆全國科展得獎作品「有趣的對數螺線」[4]中找到等角螺線長度的公式如下：

如圖 19 的等角螺線，幅角 θ 滿足 $\beta \leq \theta \leq \gamma$ ， $\beta = \gamma - 2\pi$ 是螺線從 β 依逆時針方向轉一圈到達 γ 的弧度，則這一段的螺線弧長為 $\sec \alpha (ae^{\gamma \cot \alpha} - ae^{\beta \cot \alpha})$ ，其中 α 為等角螺線定義中處處相等的角度（在正方形中 $\alpha = 45^\circ$ ），將此區間 $[\beta, \gamma]$ 等分成 n 等分，設每一等分幅角為

$h = \frac{\gamma - \beta}{n}$ ，則在 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 的情形下，當螺線從起始點開始（ $\gamma = 0^\circ$ ）經過 n 圈到終點極點 O

（ $\beta = \gamma - 2n\pi$ ）的總弧長 S 之推導如下：

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} a \times \sec \alpha \left(e^{(\gamma - ih) \cot \alpha} - e^{[\gamma - (i+1)h] \cot \alpha} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a \times \sec \alpha \left[e^{\gamma \cot \alpha} - e^{(\gamma - h) \cot \alpha} + e^{(\gamma - h) \cot \alpha} - e^{(\gamma - 2h) \cot \alpha} \dots \dots + e^{[\gamma - (n-1)h] \cot \alpha} - e^{(\gamma - nh) \cot \alpha} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a \times \sec \alpha \left(e^{\gamma \cot \alpha} - e^{(\gamma - nh) \cot \alpha} \right), \quad h = \frac{\gamma - \beta}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a \times \sec \alpha \left(e^{\gamma \cot \alpha} - e^{\left(\gamma - n \times \frac{\gamma - \beta}{n} \right) \cot \alpha} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a \times \sec \alpha \left(e^{\gamma \cot \alpha} - e^{\beta \cot \alpha} \right),$$

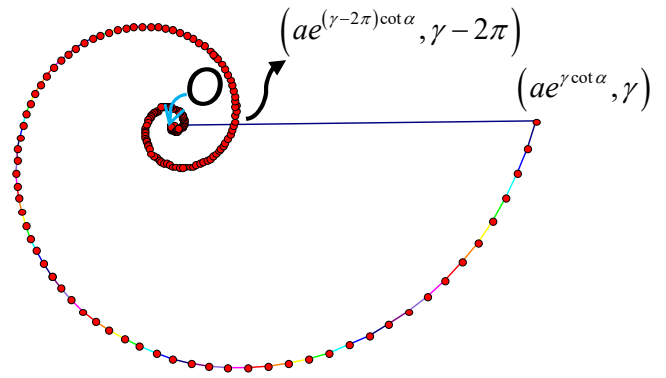


圖 19

其中 $\because \gamma = 0^\circ \Rightarrow \beta = 0^\circ - 2n\pi = -2n\pi$ ，又 $\because n \rightarrow \infty$

$\therefore S = a \times \sec \alpha \cdot e^{\gamma \cot \alpha}$ ，其中 $ae^{\gamma \cot \alpha}$ 為極點 O 與螺線起始點的直線距離，這個距離在每個正 n 邊形中都不一樣，也可從這距離計算出不同的 a 值。故最後得到 $S = a \times \sec \alpha$ 。因此，本研究從已知的正方形等角螺線弧長等於正方形邊長來檢驗它的 a 值為何。

(二)正方形中的等角螺線：

研究 9：如圖 20

在邊長為 1 的原生正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，在其 4 個頂點處切掉邊長為 r 的小等腰直角三角形後，在其內部作出第二層的正方形，再依 $\overline{A_1A_4} : \overline{A_1B_1} = 1:r$ 的相等比例作出第三層、第四層、 \dots 作出足夠多層的正方形後，最後會有足夠小的正方形收斂在內部的中心點 O （稱作極點）上。取每一層正方形對應的頂點會形成等角螺線，且等角螺線長與原生正 4_r 邊形邊長的比值關係為 1，也就是等角螺線總弧長等於正方形邊長。

證明：由前面推導得到的等角螺線總弧長公式

$$S = a \times \sec \alpha \cdot e^{\gamma \cot \alpha}, \quad A_1 \text{ 是螺線的起始點, } \gamma = 0^\circ$$

$$\alpha = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ, \quad \text{其中 } \overline{OA_1} = ae^{\gamma \cot 45^\circ} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = ae^{0^\circ \cot 45^\circ} = a$$

$$\therefore \text{弧長 } S = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sec 45^\circ \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1 = \overline{A_1A_2}$$

故得證。 ■

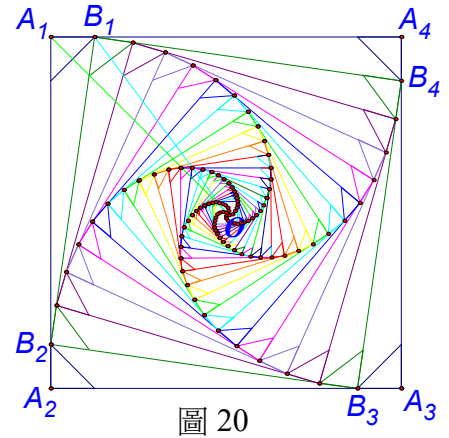


圖 20

從研究 9 可以了解到等角螺線弧長公式中的 a 其實可以視為螺線起始點 A_1 與極點 O （螺線終點）的直線距離。因此本研究持續推導正三角形、正五邊形、正六邊形及正 n 邊形中的等角螺線總弧長公式（如研究 10 ~ 13）。

(三)正三角形中的等角螺線：

研究 10：如圖 21

在邊長為 1 的原生正 3_r 角形 $A_1A_2A_3$ 中，同研究 9 的作法作出足夠多且最後收斂在中心點 O 上的正三角形。取每一層正三角形對應的頂點會形成等角螺線，且等角螺線總弧長與原生正 3_r 邊形邊長的比值關係為 $\frac{2}{3}$ ，也就是等角螺線總弧長等於正三角形邊長的 $\frac{2}{3}$ 倍。

證明：由前面推導得到的等角螺線弧長公式

$$S = a \times \sec \alpha \cdot e^{\gamma \cot \alpha}, \quad A_1 \text{ 是螺線的起始點, } \gamma = 0^\circ$$

$$\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ, \quad \text{其中 } \overline{OA_1} = ae^{\gamma \cot 30^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = ae^{0^\circ \cot 30^\circ} = a$$

$$\therefore \text{總弧長 } S = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sec 30^\circ \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

故得證 ■

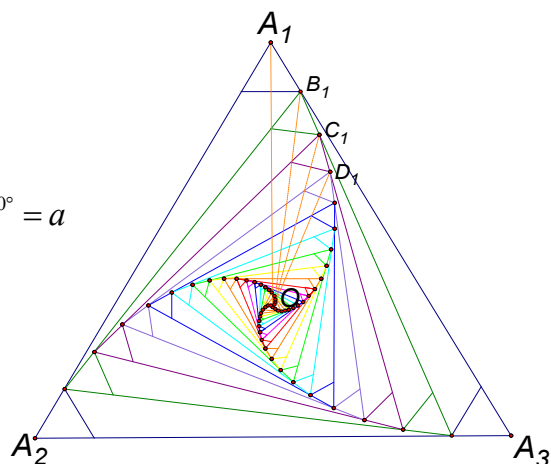


圖 21

(四)正五邊形中的等角螺線：

研究 11：如圖 22

在邊長為 1 的原生正 5_r^3 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中，同研究 9 的作法作出足夠多且最後收斂在中心點 O 上的正五邊形。取每一層正五邊形對應的頂點會形成等角螺線，且等角螺線總弧長

與原生正 5_r^3 邊形邊長的比值關係為 $\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ ，也就是等角螺線總弧長等於正五邊形邊長的

$\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ 倍。

證明：由前面推導得到的等角螺線弧長公式及性質 1

$$S = a \times \sec \alpha \cdot e^{\gamma \cot \alpha}, \quad A_1 \text{ 是螺線的起始點, } \gamma = 0^\circ, \quad \alpha = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ,$$

$$\text{其中 } \overline{OA_1} = ae^{\gamma \cot 54^\circ} = a, \quad \text{又 } \overline{OA_1} : \frac{1}{2} = (\sqrt{5}-1) : \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \overline{OA_1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$$

$$\Rightarrow \text{總弧長 } S = \sec 54^\circ \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

故等角螺線總弧長為原生正 5_r^3 邊形邊長的 $\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ 倍 ■

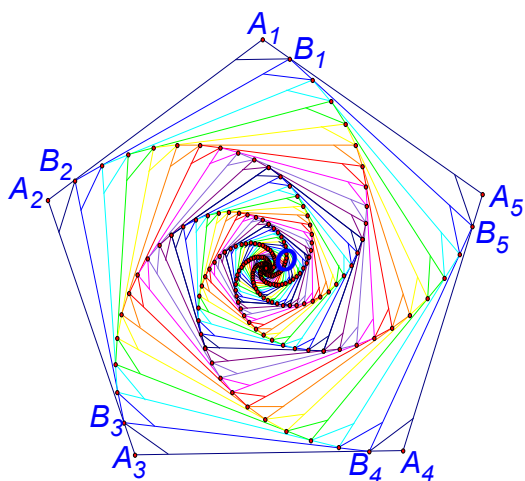


圖 22

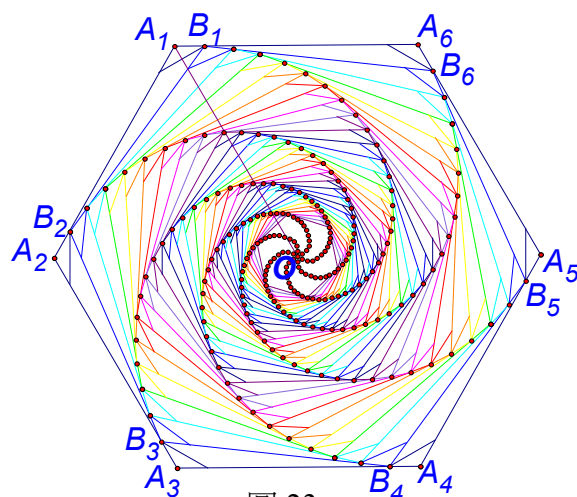


圖 23

(五)正六邊形、正 n 邊形中的等角螺線：

研究 12：如圖 23

在邊長為 1 的原生正 6_r^{-3} 邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 中，同研究 9 的作法作出足夠多且最後收斂在中心點 O 上的正六邊形。取每一層正六邊形對應的頂點會形成等角螺線，且等角螺線總弧長與原生正 6_r^{-3} 邊形邊長的比值關係為 2，也就是等角螺線總弧長等於正六邊形邊長的 2 倍。

研究 13：如圖 24

在邊長為 1 的原生正 n_r^{-3} 邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ 中，同研究 9 的作法作出足夠多且最後收斂在中心點 O 上的正 n 邊形。取每一層正 n 邊形對應的頂點會形成等角螺線，且等角螺線總弧長與原生正 n_r^{-3} 邊形邊長的比值關係為 $\frac{1}{2} \sec^2 \left(\frac{n-2}{2n} \pi \right)$ ，也就是等角螺線總弧長等於正 n 邊形邊長的 $\frac{1}{2} \sec^2 \left(\frac{n-2}{2n} \pi \right)$ 倍， $\pi = 180^\circ$ 角的徑度量。

證明：參考圖 24，由等角螺線弧長公式 $S = a \times \sec \alpha \cdot e^{\gamma \cot \alpha}$ ， A_1 是螺線的起始點，

$$\begin{aligned} \gamma &= 0^\circ, \quad \alpha = \frac{1}{2} \times \frac{n-2}{n} \pi = \frac{(n-2)\pi}{2n}, \quad \text{其中} \\ \frac{\overline{OA_1}}{A_1M_1} &= \sec(\angle OA_1M_1) = \sec \alpha = \sec \left(\frac{n-2}{2n} \pi \right) \\ \Rightarrow \overline{OA_1} &= \overline{A_1M_1} \times \sec \left(\frac{n-2}{2n} \pi \right) = ae^{0^\circ \cot \alpha} = a \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2} \sec \left(\frac{n-2}{2n} \pi \right) \end{aligned}$$

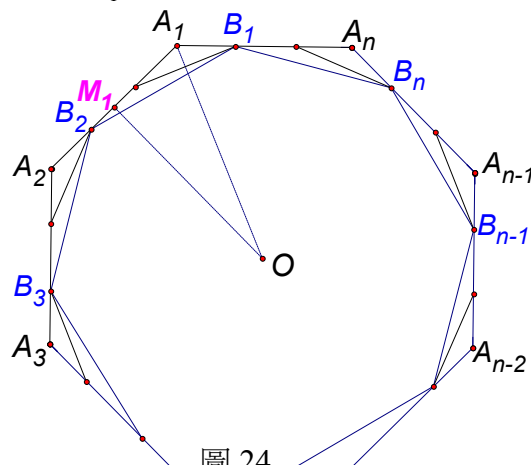


圖 24

$$\therefore \text{總弧長 } S = a \sec \alpha \times e^{\gamma \cot \alpha} = \frac{1}{2} \times \sec^2 \left(\frac{n-2}{2n} \pi \right) \quad \blacksquare$$

由研究 13，當 $n=3$ 時，總弧長 $S = \frac{1}{2} \times \sec^2 \left(\frac{3-2}{2 \times 3} \pi \right) = \frac{1}{2} \times \sec^2 30^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{2}{3}$ ；

當 $n=5$ 時，總弧長 $S = \frac{1}{2} \times \sec^2 \left(\frac{5-2}{2 \times 5} \pi \right) = \frac{1}{2} \times \sec^2 54^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \right)^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$ ，皆滿足研究

10、11 的結果喔！如圖 25、26 為正七邊形、正八邊形的等角螺線圖，正多邊形是不是越來越「正」了呢？！

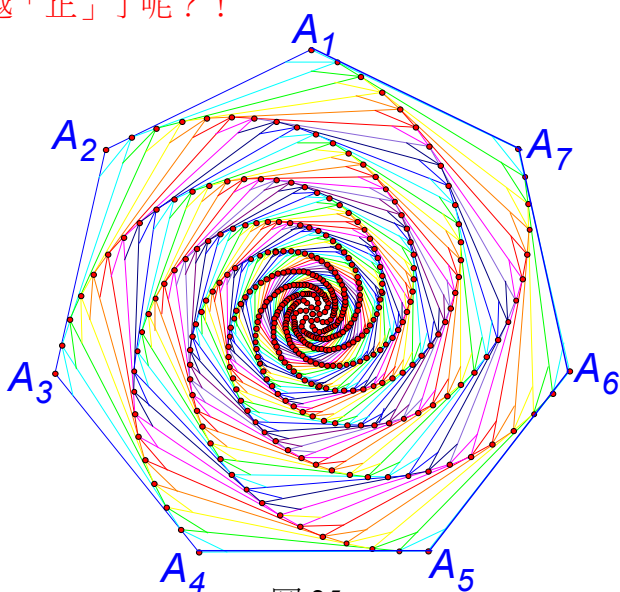


圖 25

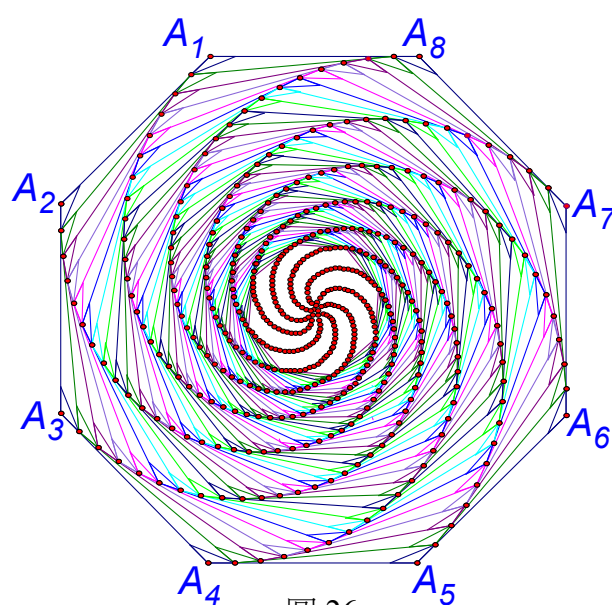


圖 26

(六) 正 n 邊形的邊長與其內部等角螺線總弧長關係式的驗證：

在趙文敏教授的文章[2]及第 34 屆全國科展得獎作品

「有趣的對數螺線」[4]中有提到，可以對等角螺線長的公式做一項

有趣的幾何解釋，也就是

如圖 27，過 O 做一直線與 \overline{OP} 垂直，因為過 P 的切線與 \overline{OT} 不垂直，所以上述垂直線與切線交於一點 T 。由於 $\angle OPT = \alpha$ ，於是可得 $\overline{PT} = \overline{OP} \times \sec \alpha$ 。換言之，由 P 點繞回 O 點的弧長與 \overline{PT} 的長相等，這是數學家托里切利在 1644 年出版的「幾何操作」中所發現的性質。

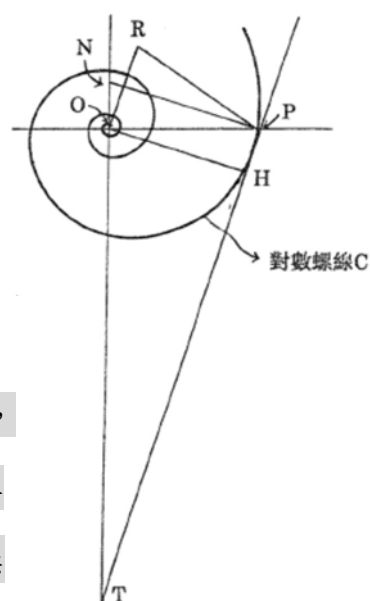


圖 27[4]

於是我們依據上述的說法對本文之邊長為 1 的正 n 邊形 ($n = 3, 4, \dots$) 之等角螺線總弧長進行幾何解釋如下：

1. 正三角形的等角螺線：如圖 28，過 O 作 $\overline{OA_1}$ 的垂直線 L 交 $\overline{A_1A_3}$ 於 N ，則螺線總弧長會等於 $\overline{A_1N}$ 的長，而

$$\overline{A_1N} = \frac{\overline{A_1O}}{\overline{AM}} \times \overline{A_1A_3} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

，此與研究 10 的結果相同。

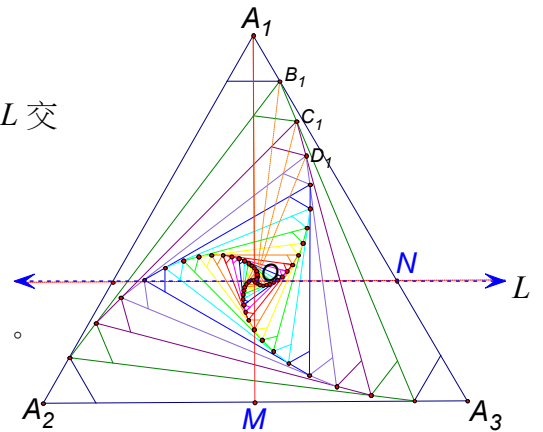


圖 28

2. 正五邊形的等角螺線：如圖 29，過 O 作 $\overline{OA_1}$ 的垂直線 L 與 $\overline{A_1A_5}$ 的延長線交於 N ，則 ΔA_1ON 為 $36^\circ-54^\circ-90^\circ$ 的直角三角形，且螺線總弧長會等於 $\overline{A_1N}$ 的長，而

$$\overline{A_1N} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2\sqrt{5}} \times \overline{A_1O} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

，此與研究 11 的結果相同。

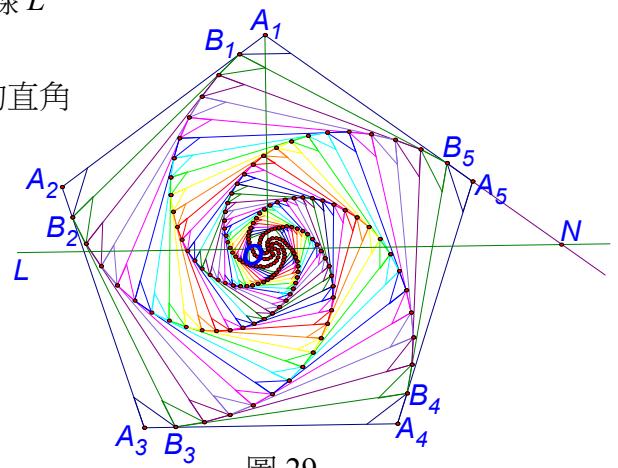


圖 29

3. 正六邊形的等角螺線：如圖 30，過 O 作 $\overline{OA_1}$ 的垂直線 L 與 $\overline{A_1A_2}$ 的延長線交於 N ，則 ΔA_1ON 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形，且螺線總弧長會等於 $\overline{A_1N}$ 的長，而

$$\overline{A_1N} = 2\overline{A_1O} = 2 \times 1 = 2$$

，此與研究 12 的結果相同。

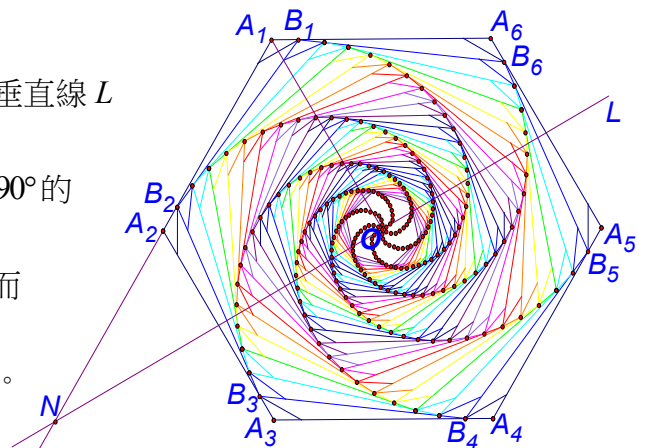


圖 30

(七)等角螺線掃過面積與正 n 邊形面積的關係探討

如圖 19 的塗色部分，為文獻[4]中等角螺線

掃過的面積，公式即為 $\frac{\tan \alpha}{4}(1-e^{-4\pi \cot \alpha}) \times t^2$

($t = ae^{\gamma \cot \alpha} = ae^{0^\circ \times \cot \alpha} = a$ ， $\gamma = 0^\circ$ 為螺線起點的幅角)，

若應用在正 n 邊形中，可得到正 n 邊形中一條等角螺線

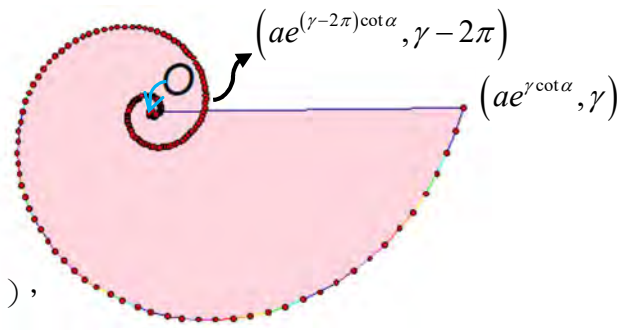


圖 19 塗色部分為掃過面積

掃過面積與正 n 邊形面積的關係一般式如下面的研究 14 所述。我們先從 $n=3$ 、 4 、 5 、 6 的正 n 邊形開始探討。

1. $n=3$ 時，由文獻[4]中等角螺線掃過的面積公式，我們將它應用在正三角形中，則

$$\begin{aligned} \text{掃過面積} &= \frac{\tan 30^\circ}{4}(1-e^{-4\pi \cot 30^\circ}) \times a^2, \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (由研究 10), } \alpha=30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{36}(1-e^{-4\pi \cot 30^\circ}) = \frac{1}{9}(1-e^{-4\pi \cot 30^\circ}) \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{1}{9}(1-e^{-4\pi \cot 30^\circ}) \times \text{原生正}3_r\text{ 三角形面積} \end{aligned}$$

2. $n=4$ 時，等角螺線掃過面積為 $\frac{\tan 45^\circ}{4}(1-e^{-4\pi \cot 45^\circ}) \times a^2$ ， $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (由研究 9)， $\alpha=45^\circ$

$$= \frac{1}{8}(1-e^{-4\pi \cot 45^\circ}) = \frac{1}{8}(1-e^{-4\pi \cot 45^\circ}) \times 1^2 = \frac{1}{8}(1-e^{-4\pi \cot 45^\circ}) \times \text{原生正}4_r\text{ 邊形面積}$$

3. $n=5$ 時，螺線掃過面積為 $\frac{\tan 54^\circ}{4}(1-e^{-4\pi \cot 54^\circ}) \times a^2$ ， $a = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$ (由研究 11)， $\alpha=54^\circ$

$$\begin{aligned} &= \frac{5+\sqrt{5}}{40} \times \tan 54^\circ \times (1-e^{-4\pi \cot 54^\circ}) = \frac{5+\sqrt{5}}{50}(1-e^{-4\pi \cot 54^\circ}) \times \frac{5}{4} \tan 54^\circ \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{50}(1-e^{-4\pi \cot 54^\circ}) \times \text{原生正}5_r\text{ 邊形面積} \end{aligned}$$

4. $n=6$ 時，螺線掃過面積為 $\frac{\tan 60^\circ}{4}(1-e^{-4\pi \cot 60^\circ}) \times a^2$ ， $a=1$ (由研究 12)， $\alpha=60^\circ$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \times \tan 60^\circ \times (1-e^{-4\pi \cot 60^\circ}) = \frac{1}{6}(1-e^{-4\pi \cot 60^\circ}) \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{6}(1-e^{-4\pi \cot 60^\circ}) \times \text{原生正}6_r\text{ 邊形面積} \end{aligned}$$

研究 14：

在邊長為 1 的原生正 n_r^{-3} 邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ 中，同研究 13 的方法得到的 n 條等角螺線中任一
條等角螺線掃過面積與原生正 n 邊形面積之關係一般式為

$$\frac{1}{4n}(1-e^{-4\pi\cot\alpha}) \times \sec^2\alpha \times \text{正 } n_r^{-3} \text{ 邊形面積}, \quad \pi=180^\circ \text{ 的徑度量。}$$

證明：如圖 19，由文獻[4]得到等角螺線掃過面積公式為 $\frac{\tan\alpha}{4}(1-e^{-4\pi\cot\alpha}) \times t^2$ ， $t = ae^{\gamma\cot\alpha}$

因為此作品中的 $\gamma=0^\circ$ ，即為螺線的起點，所以 $t = ae^{\gamma\cot\alpha} = a$ ，故上式可寫成

$$\frac{\tan\alpha}{4}(1-e^{-4\pi\cot\alpha}) \times a^2, \quad \text{其中 } a = \frac{1}{2}\sec\alpha \text{ (研究 13),}$$

所以在原生正 n_r^{-3} 邊形中任一條等角螺線掃過面積為

$$\frac{\tan\alpha}{4}(1-e^{-4\pi\cot\alpha}) \times \left(\frac{1}{2}\sec\alpha\right)^2 = \frac{\tan\alpha}{16}(1-e^{-4\pi\cot\alpha}) \times \sec^2\alpha, \quad \alpha = \frac{(n-2)\pi}{2n}$$

$$= \frac{1}{4n}\tan\alpha \times \sec^2\alpha \times \tan\frac{\pi}{n} \times (1-e^{-4\pi\cot\alpha}) \times \frac{n}{4}\cot\frac{\pi}{n}, \quad \text{其中 } \alpha + \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\alpha \times \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1$$

$$= \frac{1}{4n}(1-e^{-4\pi\cot\alpha}) \times \sec^2\alpha \times \text{正 } n_r^{-3} \text{ 邊形面積} \quad \blacksquare$$

伍、討論與結論

一、在邊長為 1 的原生正 n_r^{-m} 邊形中， $m=3$ 或 n ，在 n 個頂點處切掉 n 個邊長為 r 的小正
 m 邊形後，在其內部作出第二層最大的正 n 邊形，如圖 16，則

(一) 此第二層正 n 邊形面積與 r 、 x 的遞迴關係式為， $\omega_n[(r+x)^2 - (r+x)] + \lambda_n$ ，其中

$$\omega_n = \frac{n \sin\theta_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{n}{4}\cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right), \quad \theta_n = \frac{(n-2)\pi}{n} \text{ 為正 } n \text{ 邊形的內角度數，} \pi=180^\circ \text{ 角}$$

的徑度量。 x 為 $\overline{B_iA_{i,n}}$ ($i=1,2,\dots,n$) 的長度， $n=3,4,5,\dots$ ，當 $n=3$ 或 $m=3$ 時， x 為 0。

當 $r+x = \frac{1}{2}$ 時，第二層正 n 邊形最小面積 $= \frac{n}{8} \left[2 \cot \left(\frac{\theta_n}{n-2} \right) - \sin \theta_n \right]$ ，此時切掉的小正 n 邊形的最大面積為 $\frac{n}{4} \times \cot \left(\frac{\theta_n}{n-2} \right) \times r^2$ 。

(二) 在一般情形下，第二層正 n 邊形面積與原生正 n_r^{-n} 邊形的面積比值為 $\phi_n(r^2 - r) + 1$ ，

其中 $\phi_n = 2 \sin \theta_n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right)$ 。在 $r+x = \frac{1}{2}$ 時，第二層正 n 邊形面積是原生正 n_r^{-n} 邊形面積的 $\frac{1}{2} \left[2 - \sin \theta_n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right) \right]$ 倍，且為最小倍數關係。

(三) 對原生正 5_r^{-5} 邊形而言，當 $r+x = \frac{1}{2}$ 時， $r = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ 、 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ，此時 x 與 r 的

比值為 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ，為黃金比值，表示原生正 5_r^{-5} 邊形中的點 $A_{n,5}$ ， $n=1,2,3,4,5$ ，在 $\overline{A_n B_n}$

上也做了美麗的黄金分割。

(四) 若將具有特殊內角的正 n 邊形之 ω_n 、 λ_n 和 ϕ_n 換算成數值，可得到如下的**表格一**。

正 n 邊形	第二層正 n 邊形面積與 r 的關係一般式為 $\omega_n(r^2 - r) + \lambda_n$ ，其中 $\omega_n = \frac{n \sin \theta_n}{2}$ 、 $\lambda_n = \frac{n}{4} \cot \left(\frac{\theta_n}{n-2} \right)$	第二層正 n 邊形與原生正 n_r^{-n} 邊形的 面積比值為 $\phi_n(r^2 - r) + 1$ ，其中 $\phi_n = 2 \sin \theta_n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right)$
$n=3$	$\omega_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 、 $\lambda_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\phi_3 = 3$
$n=4$	$\omega_4 = 2$ 、 $\lambda_4 = 1$	$\phi_4 = 2$
$n=5$	$\omega_5 = \frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$ 、 $\lambda_5 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$	$\phi_5 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$
$n=6$	$\omega_6 = \lambda_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\phi_6 = 1$

表格一

再針對研究 1~4 中兩個二次函數關係式進一步探討其最大值發生的時機，都是發生在 $r = \frac{1}{2}$ 的時候，此時第二層正 n 邊形最小面積、切掉的小等腰三角形最大面積或該面積是原生正 n_r^{-n} 邊形面積的幾倍關係，統整在下面表格二中。

正 n 邊形	第二層正 n 邊形的最小面積	切掉的 n 個等腰三角形的最大面積	第二層正 n 邊形與原生正 n_r^{-n} 邊形面積的最小倍數關係
$n=3$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1}{4}$
$n=4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$n=5$	$\frac{8\sqrt{25+10\sqrt{5}} - 5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{32}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{32}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{8}$
$n=6$	$\frac{9\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{3}{4}$

表格二

(五) 當切掉的小正 m 邊形， $m=4$ 時，我們取四邊等長的菱形來切，也得到如研究 7 一樣的規律關係。

二、在邊長為 1 的原生正 n_r^{-3} 邊形中，依前面作法在其內部作出第二層最大的正 n 邊形，再依固定比例繼續往內部作出 n (n 足夠多) 層的正 n 邊形後，最後會有足夠小的正 n 邊形會收斂在內部的中心點 O 上。此時，取每一層正 n 邊形對應的頂點，其軌跡可形成等角螺線，且等角螺線總弧長與原生正 n_r^{-n} 邊形邊長 (邊長為 1) 的比值關係為 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{n-2}{2n}\pi\right)$ ，也就是等角螺線總弧長等於正 n 邊形邊長的 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{n-2}{2n}\pi\right)$ 倍。經由前面的驗證說明此一般式是成立的。將幾個比較特殊的正 n 邊形之等角螺線總弧長與原生正 n_r^{-3} 邊形邊長的倍數關係整理如表格三。

邊數	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
原生正 n_r^{-3} 邊形 中等角螺線總 弧長與邊長的 倍數關係	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{5+\sqrt{5}}{5}$	2

表格三

三、研究 14 中任一條等角螺線掃過的面積與原生正 n_r^{-3} 邊形面積的關係一般式為

$$\delta_n (1 - e^{-4\pi \cot \alpha}) \times \text{原生正 } n_r^{-3} \text{ 邊形面積}, \quad \delta_n = \frac{1}{4n} \sec^2 \alpha, \quad \alpha = \frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

四、表格四為特殊正 n 邊形面積與其等角螺線掃過面積關係式中， δ_n ($n=3,4,5,6$) 值的結果統整。

邊數	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
原生正 n_r^{-3} 邊形中等角螺線掃過面積 = $\delta_n (1 - e^{-4\pi \cot \alpha}) \times$ 正 n_r^{-3} 邊形面積， $\delta_n = \frac{1}{4n} \sec^2 \left(\frac{n-2}{2n} \pi \right)$	$\delta_3 = \frac{1}{9}$	$\delta_4 = \frac{1}{8}$	$\delta_5 = \frac{5+\sqrt{5}}{50}$	$\delta_6 = \frac{1}{6}$

表格四

五、承二的結果，本作品基於國中的數學基礎，搭配高中數學的三角函數與極坐標的基本

概念，得到原生正 n 邊形的等角螺線總弧長與其正 n 邊形邊長的比值關係為 $\frac{1}{2} \sec^2 \alpha$ ，

$\alpha = \frac{(n-2)\pi}{2n}$ ，也就是等角螺線總弧長為其正 n 邊形邊長的 $\frac{1}{2} \sec^2 \alpha$ 倍，有別於參考文獻[7]

中等角螺線弧長公式 $\frac{1}{2} \csc^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)$ 探討正 n 邊形中質點的動態追逐下等角螺線軌跡路徑長的

結果，並無討論原正 n 邊形的邊長。

六、下面的**表格五**為文獻參考重點與本作品研究結果之差異分析表：

篇名/作者/ 參考文獻序	參考重點	與本作品的差異分析
等角螺線及其他/ <u>趙文敏</u> 教授/ [2]	在等角螺線 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ 上，幅角 θ 滿足區間 $[\beta, \gamma]$ 的弧長為 $a \sec \alpha (e^{\gamma \cot \alpha} - e^{\beta \cot \alpha})$ ， $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	該文獻推導出等角螺線上某一區間的弧長，本作品將此公式應用在正 n 邊形中，探討螺線 總弧長 與該正 n 邊形 邊長 的倍數關係
有趣的對數螺線/ 王聖文/ [4]	1.如圖 27，由 P 點繞回 O 點的弧長與 \overline{PT} 的長相等，這是數學家 <u>托里切利</u> 所發現的性質 2. 如圖 19，若幅角 θ 滿足 $\beta \leq \theta \leq \gamma$ ， $\beta = \gamma - 2\pi$ ，的向徑掃過的面積為 $\frac{\tan \alpha}{4} (1 - e^{-4\pi \cot \alpha}) \times r^2$ ， $r = ae^{\gamma \cot \alpha}$	1.利用數學家 <u>托里切利</u> 發現的性質去做本作品所有正 n 邊形中等角螺線總弧長的 幾何驗證 ，P20-21，重點五第(六)節。 2.利用文獻的螺線掃過面積公式推廣得到正 n 邊形中螺線掃過面積與正 n 邊形面積的關係。(研究 14)
動態追逐/ 李堂愷/ [7]	正 n 邊形中質點瞬時速度方向指向目標點形成等角螺線軌跡路徑長為 $\frac{1}{2} \csc^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)$	本作品利用 研究目的 3 中的作法得到正 n 邊形中的等角螺線，利用解析幾何、三角函數與極坐標的基本概念算出該螺線總弧長為正 n 邊形邊長的 $\frac{1}{2} \sec^2 \left[\frac{(n-2)\pi}{2n} \right]$ 倍。

<p>形中有形/ 黃胤勛、李易哲 劉奕辰、王昱翔/ [8]</p>	<p>1. 正 n 邊形若每邊上取一點使得與原頂點的距離為 $\frac{1}{a}$，將各點連線，則邊長與原正 n 邊形面積比為 $\frac{a^2 - 2a + 2 - 2(a-1)\cos\theta}{a^2} : 1$ 其中 $a \geq 1$，$\theta = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$</p> <p>2. 常見的正 n 邊形各邊中點連線 ($a=2$) 面積與原面積比如下： $n=3 \Rightarrow 0.25$、$n=4 \Rightarrow 0.5$ $n=5 \Rightarrow$ 約 0.65、$n=6 \Rightarrow 0.75$ $n=10 \Rightarrow$ 約 0.9……、$n=\infty \Rightarrow 1$</p>	<p>1. 在邊長為 1 的正 n 邊形的 n 個頂點處切掉腰長為 r 的小等腰三角形，在剩餘圖形中作出最大正 n 邊形，則新正 n 邊形面積與 r 的關係一般式為 $\omega_n(r^2 - r) + \lambda_n$，$\omega_n = \frac{n \sin \theta_n}{2}$、$\lambda_n = \frac{n}{4} \cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right)$</p> <p>2. 承 1 的結果，新正 n 邊形與原正 n 邊形的面積比值一般式為 $\phi_n(r^2 - r) + 1$，$\phi_n = 2 \sin \theta_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$，在 $r = \frac{1}{2}$ 時，比值為 $\frac{1}{2} \left[2 - \sin \theta_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]$，是它們的最小倍數關係。</p>
---	---	---

表格五

七、透過這次的研究，從原本單純的一個數學問題推廣發展到上述最後的多種結果，這整個過程，發現原來所謂美麗又經典的數學問題，竟可以用不同研究方法去探究，仍可得到美麗又經典的結果。讓在科展領域初試啼聲的我們體會到探究數學經典之美的路上，可以自主多元的角度去研究。感謝兩位指導老師在旁協助、陪伴我們，我們得以徜徉在這條有趣數學路上的每一處風景。

陸、參考資料及其他

- [1]. T·帕帕斯 Theoni Pappas 著，張遠南、張昶 譯，原來數學這麼有趣，世茂出版社，2003 年 7 月。
- [2]. 趙文敏，等角螺線及其他，「數學知識」網站
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_09_1/index.html
- [3]. 昌爸工作坊，追逐(等角螺旋線的實例)，
<http://www.mathland.idv.tw/ggb/ggbhtml5/chase.html>
- [4]. 王聖文，有趣的對數螺線，中華民國第 34 屆全國科展高中組數學科第二名，1994 年 7 月
- [5]. 來自 bee 美麗之家， $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$ ，
<http://www.chsh.chc.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/102/1020724.pdf>
- [6]. 維基百科，正五邊形面積公式，
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%94%E8%BE%B9%E5%BD%A2>
- [7]. 李堂愷，動態追逐，中華民國第 54 屆全國科展高中組數學科第三名，2014 年 7 月
- [8]. 黃胤勛、李易哲、劉奕辰、王昱翔，形中有形，中華民國第 48 屆全國科展國中組數學科第一名，2008 年 7 月
- [9]. 周哲賢、許冠章、盧侯智、陳重光，向日葵裡的黃金項鍊，中華民國第 49 屆全國科展高中組數學科第三名，2009 年 7 月

【評語】 030407

考慮由正 n 邊形的每個頂點裁切掉一個小的等腰三角形（或一個小的正 n 邊形），得出一個新的圖形，在這個新的圖形中，內接正 n 邊形的面積的最大可能值問題。針對這個問題做了討論。對於重複操作裁切、取最大正 n 邊形的動作所得出的一連串的正 n 邊形的頂點連線與等角螺線之間的關連，也做了一些分析，得到一些不錯的結果，有其價值性。其實這是由一個競賽試題所引發的問題，作者們注意到原始的問題其實與裁切掉等腰三角形所要考慮的問題相關，由這樣的角度出發，處理相對而言比較容易分析的一個問題後再回歸到原本的問題來思考，想法很好。但部分的內容其實是之前已有作品討論過而且已經有答案了（四十八屆全國中小學科展國中組數學科第一名作品-形中有形）。回到原本的問題時，作者們直觀的認為裁切掉一個小的正 n 邊形在本質上與裁切掉等腰三角形的結果完全相同而於沒有多下功夫去做更進一步的討論，這有點可惜，因為原本的問題與化約後的問題還是有稍許的不同（裁切掉的正 n 邊形的大小其實是受限的），如果能把這部分說明的更清楚些則會更好。對於重複操作裁切、取最大正 n 邊形的動作所得出的一連串的正 n 邊形的頂點連線會落在一條等角螺線的說明可再強化，如果可以把這個部分做適當的改寫會更好。

作品海報

壹、研究目的

- 一、在邊長為 1 的原生正 n 邊形之 n 個頂點處切掉腰長為 r 的小等腰三角形，作出剩下圖形中最大正 n 邊形（第二層正 n 邊形），探討……
- 二、承一，在 n 個頂點處改切掉邊長為 r 的小正 n 邊形，得到第二層正 n 邊形，探討……
- 三、承一、二的作法，依照切掉的小正 n 邊形與原生正 n 邊形的邊長比例關係，繼續往內部作出第三層、第四層、… 漸小的正 n 邊形，再依每層對應的頂點連成等角螺線，探討…

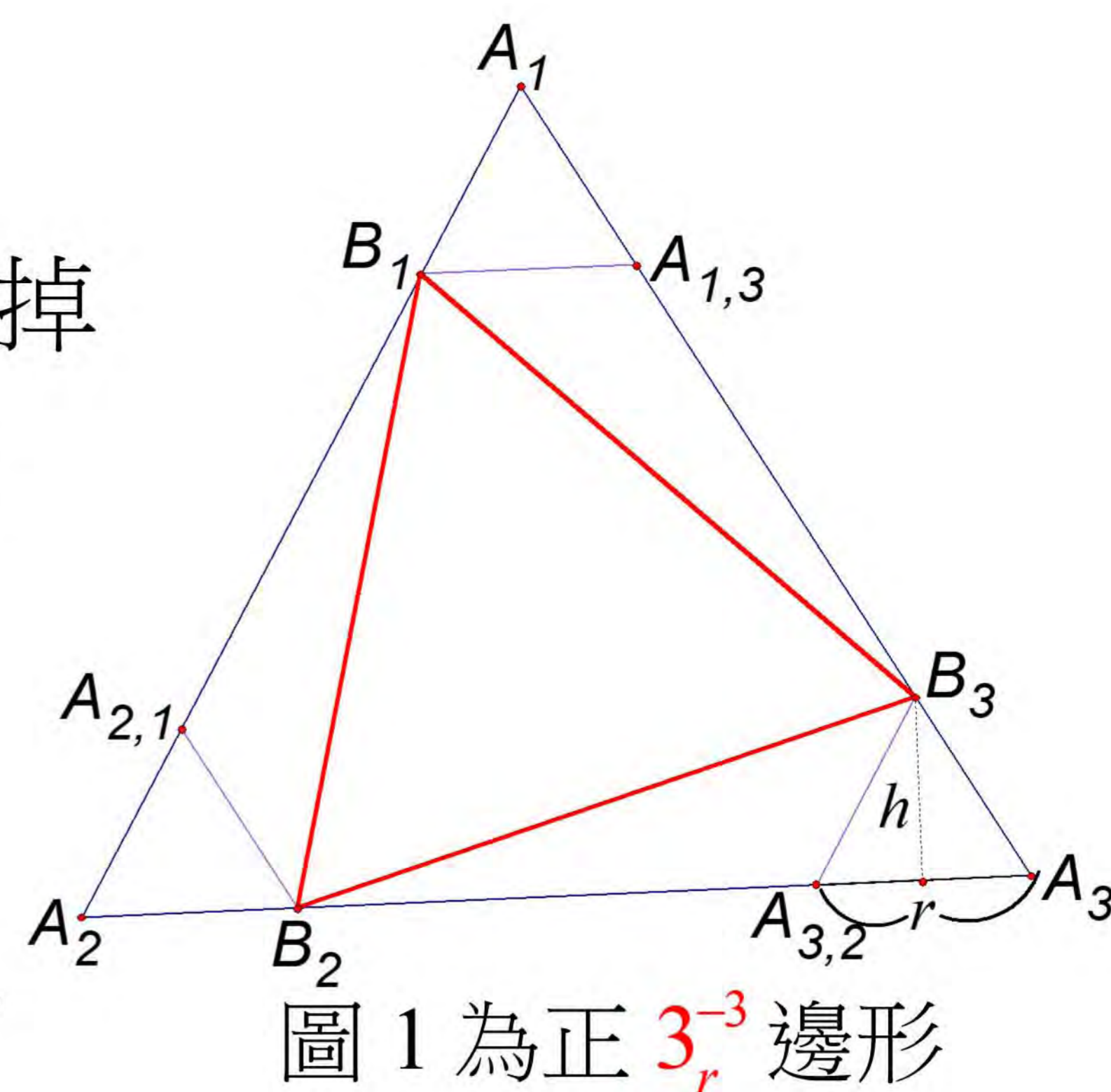


圖 1 為正 3_r^{-3} 邊形

貳、研究過程與方法

一、已知性質與定理介紹：

性質 1：如圖 4，在 $36^\circ-54^\circ-90^\circ$ 的三角形中，
邊長比為 $(\sqrt{5}-2\sqrt{5}):1:(\sqrt{5}-1)$

性質 2：若一正 n 邊形的邊長為 a ，其面積
公式為 $\frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$

二、名詞定義：**原生正 n_r^{-n} 邊形**，如圖 1

1. n ：邊長為 1 的原生正多邊形邊數；
2. $-n$ ：是指在頂點處切掉的小正 n 邊形邊數，本作品中只會探討 -3 和 $-n$ 二種情形；
3. r ：是指切掉的小正 n 邊形的邊長。

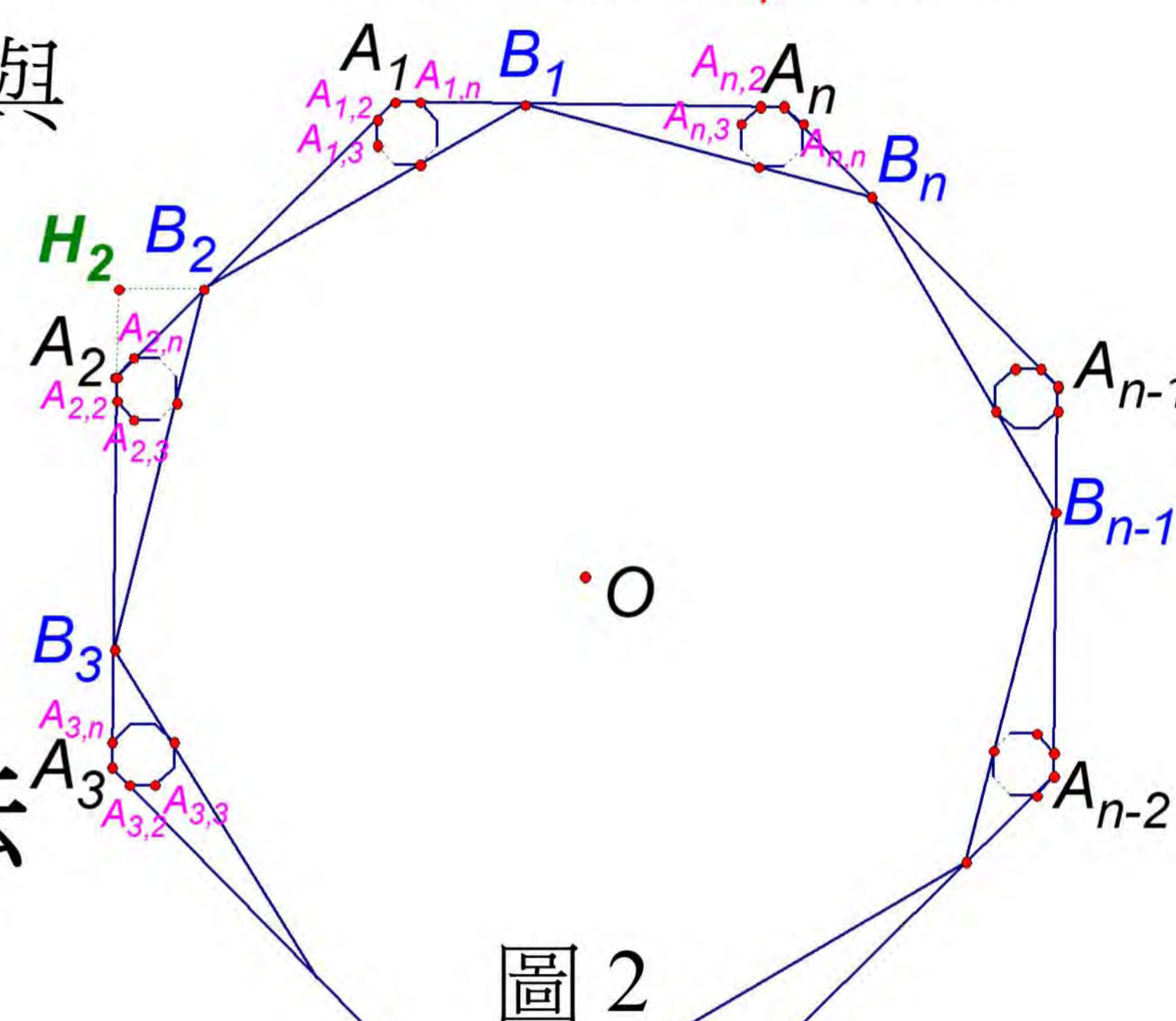


圖 2

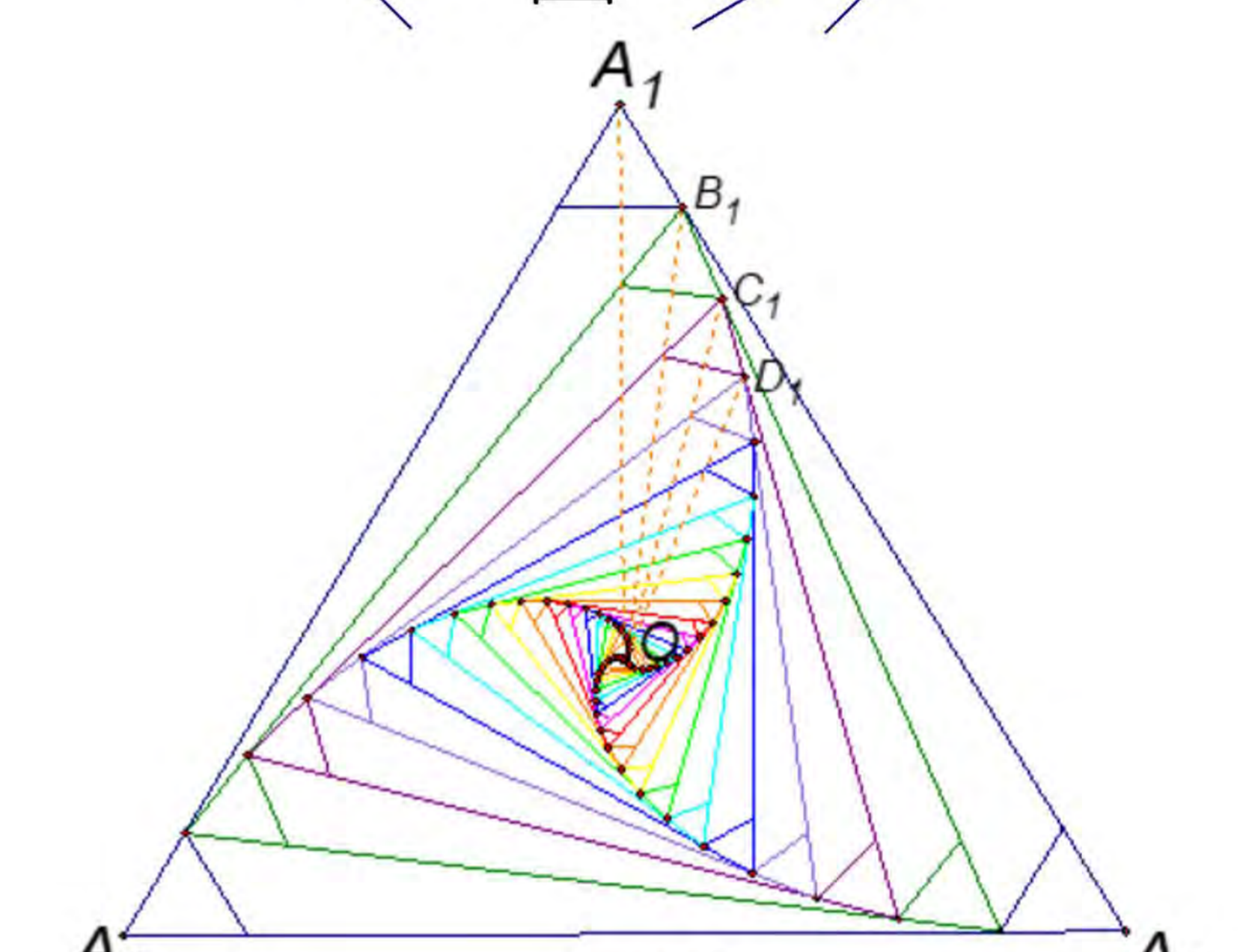


圖 3

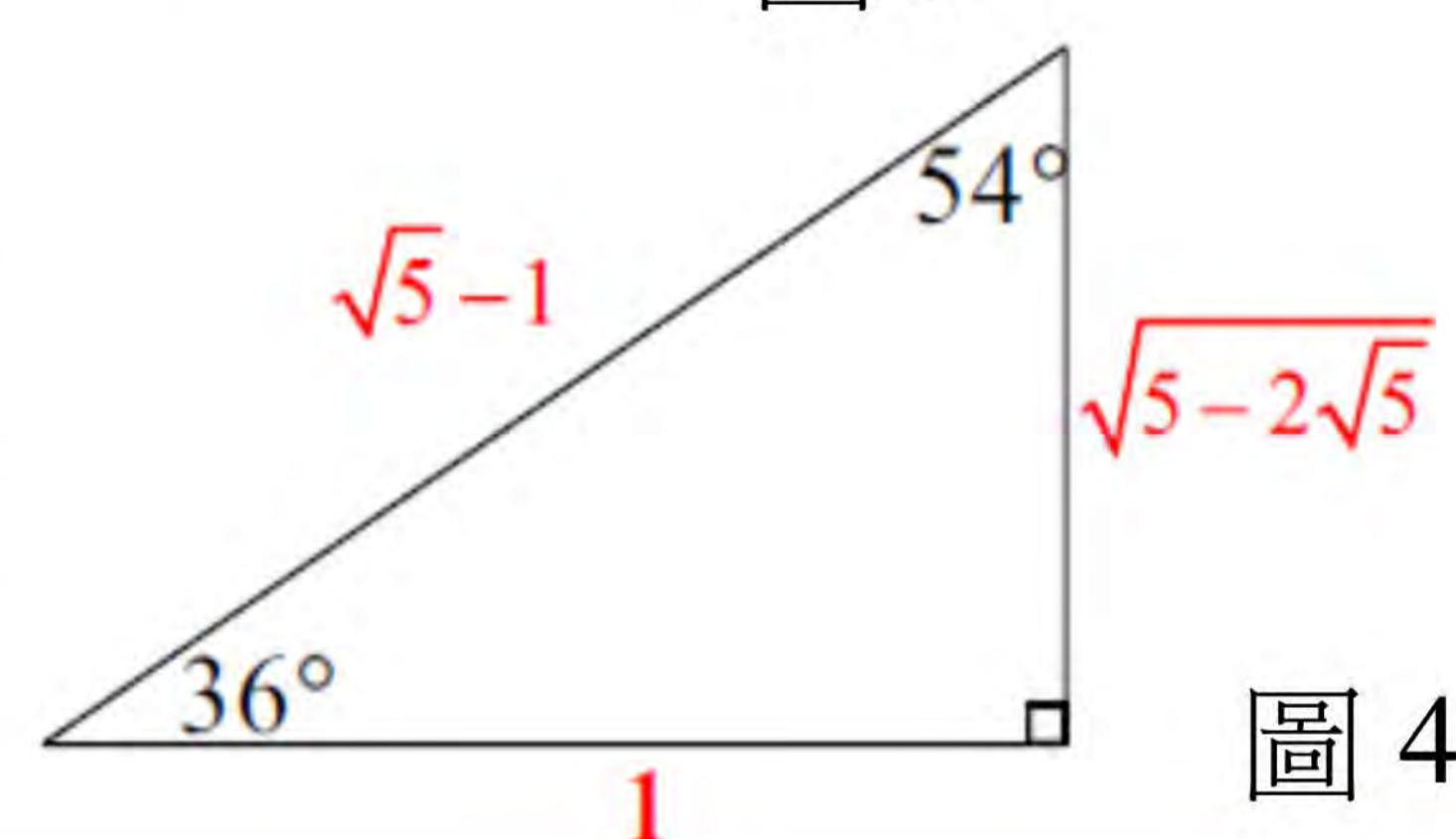


圖 4

研究 6、7：如圖 2，在原生正 n_r^{-n} 邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ 中，在 n 個頂點處切掉 n 個邊長為 r 的小正 n 邊形， $\theta_n = \frac{(n-2)\pi}{n}$ 為正 n 邊形的一內角度數， $\pi=180^\circ$ 角的徑度量。則(1)正 n 邊形 $B_1B_2B_3 \cdots B_n$ 的面積與 r 、 x 的關係式為

$$\frac{n \sin \theta_n}{2} [(r+x)^2 - (r+x)] + \frac{1}{4} \times \left[n \cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right) \right]$$

(2)正 n 邊形 $B_1B_2B_3 \cdots B_n$ 面積與原生正 n_r^{-n} 邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ 面積比值為

$$2 \sin(\theta_n) \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) [(r+x)^2 - (r+x)] + 1$$

再將上述關係式一般化成 $\omega_n [(r+x)^2 - (r+x)] + \lambda_n$ 、 $\phi_n [(r+x)^2 - (r+x)] + 1$ ，其中

$$\omega_n = \frac{n \sin \theta_n}{2}、\lambda_n = \frac{n}{4} \cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right)、\phi_n = 2 \sin \theta_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)。$$

第二層正 n 邊形面積 = $\omega_n [(r+x)^2 - (r+x)] + \lambda_n$ ；

第二層正 n 邊形與原生正 n_r^{-n} 邊形的面積比值為 $\phi_n [(r+x)^2 - (r+x)] + 1$

$n=3$	$\omega_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}、\lambda_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}、\phi_3 = 3$	$n=5$	$\omega_5 = \frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}、\lambda_5 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}、\phi_5 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$
-------	--	-------	--

$n=4$	$\omega_4 = 2、\lambda_4 = 1、\phi_4 = 2$	$n=6$	$\omega_6 = \lambda_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}、\phi_6 = 1$
-------	---	-------	---

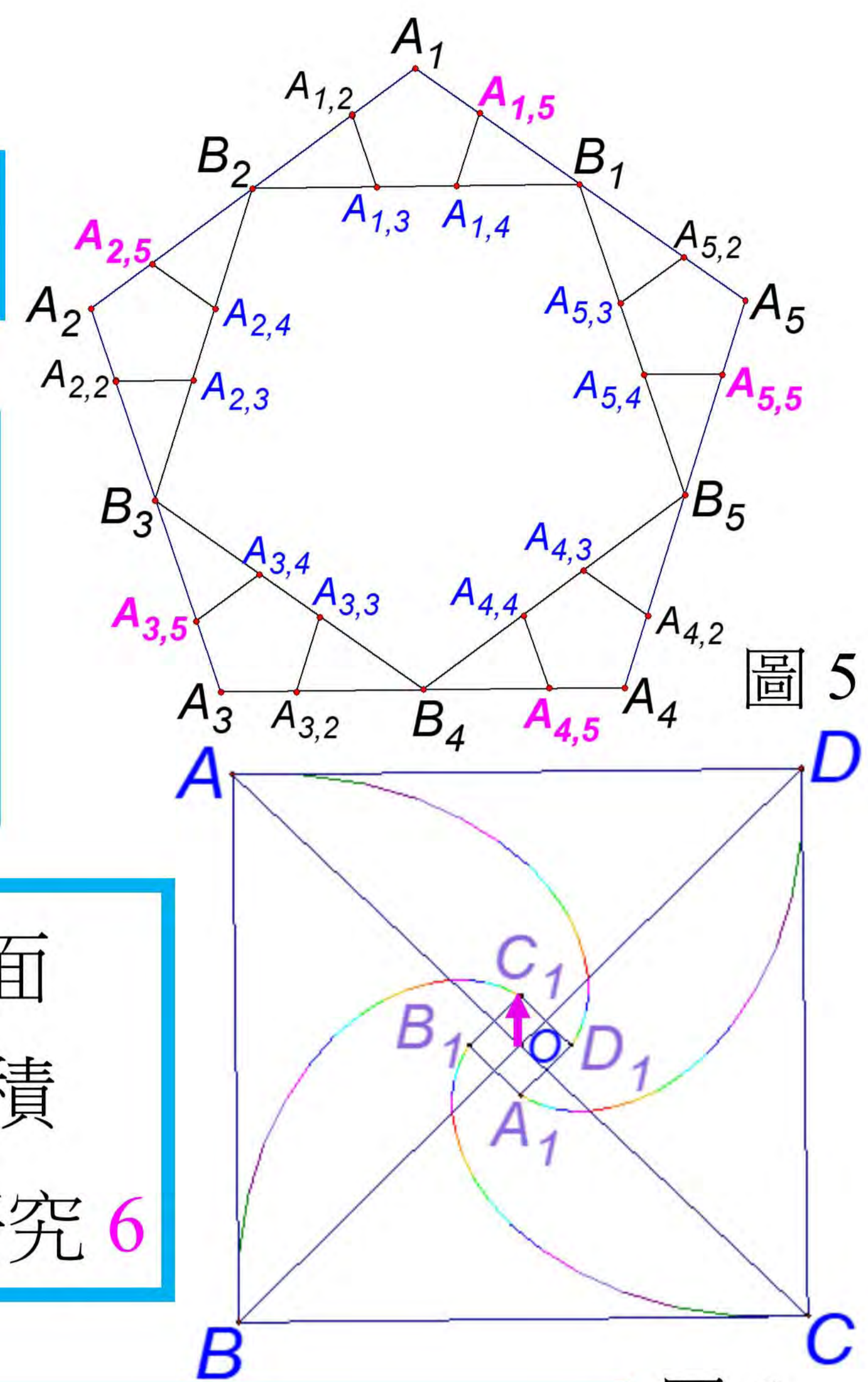
表格一

研究過程流程圖

正 n 邊形經特殊切割產生第二層正 n 邊形的相關面積問題

切割方式①：在正 n 邊形 n 個頂點處切掉腰長為 r 的小等腰三角形

切割方式②：在正 n 邊形 n 個頂點處切掉邊長為 r 的小正 n 邊形



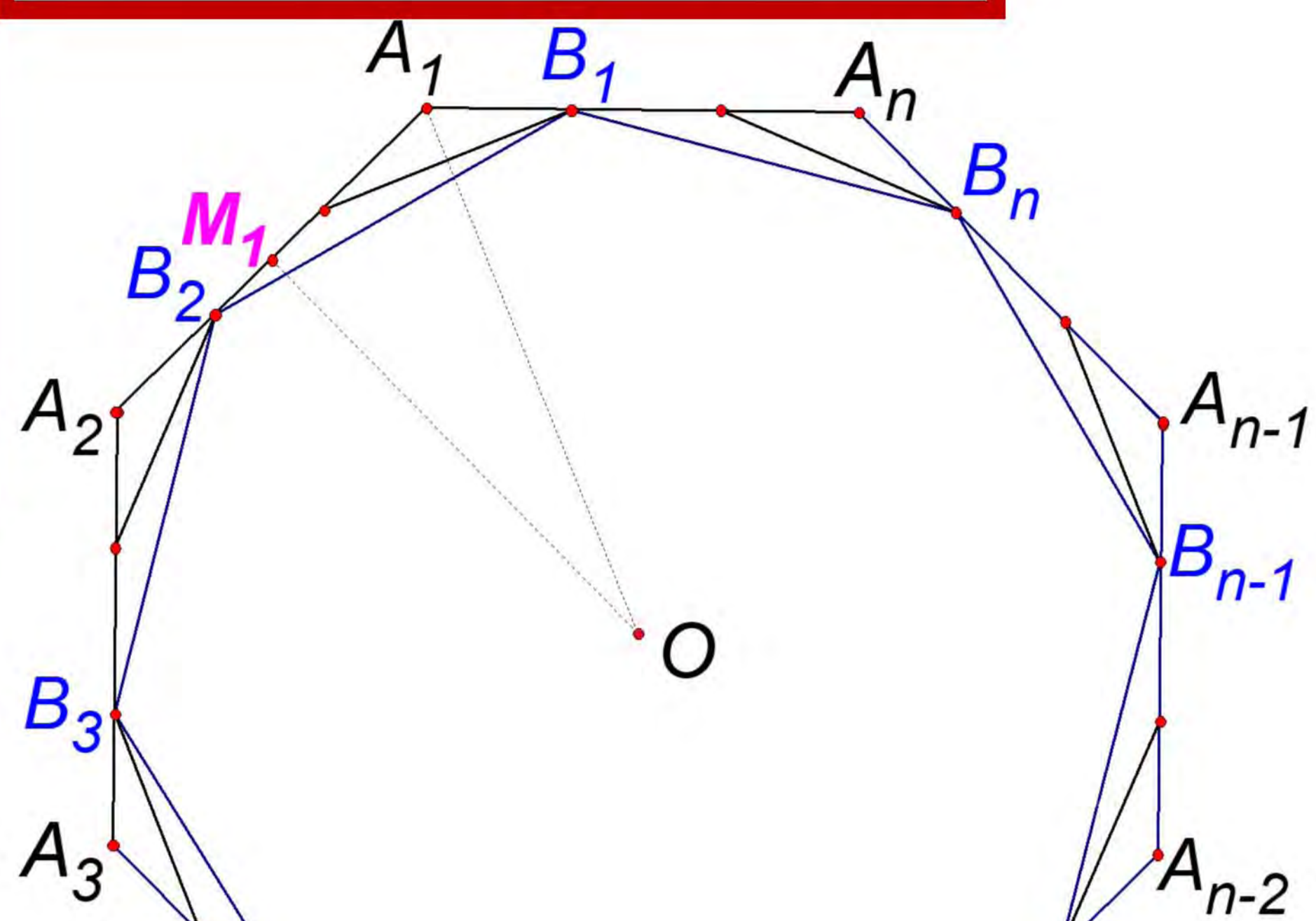
發現(一)第二層正 n 邊形面積、(二)與原正 n 邊形面積比值皆和 r 有關係：研究 1~5

發現(一)第二層正 n 邊形面積、(二)與原正 n 邊形面積比值皆和 $r+x$ 有關係：研究 6

統整出(一)第二層正 n 邊形面積一般式、以及(二)與原正 n 邊形面積比值關係一般式：研究 7

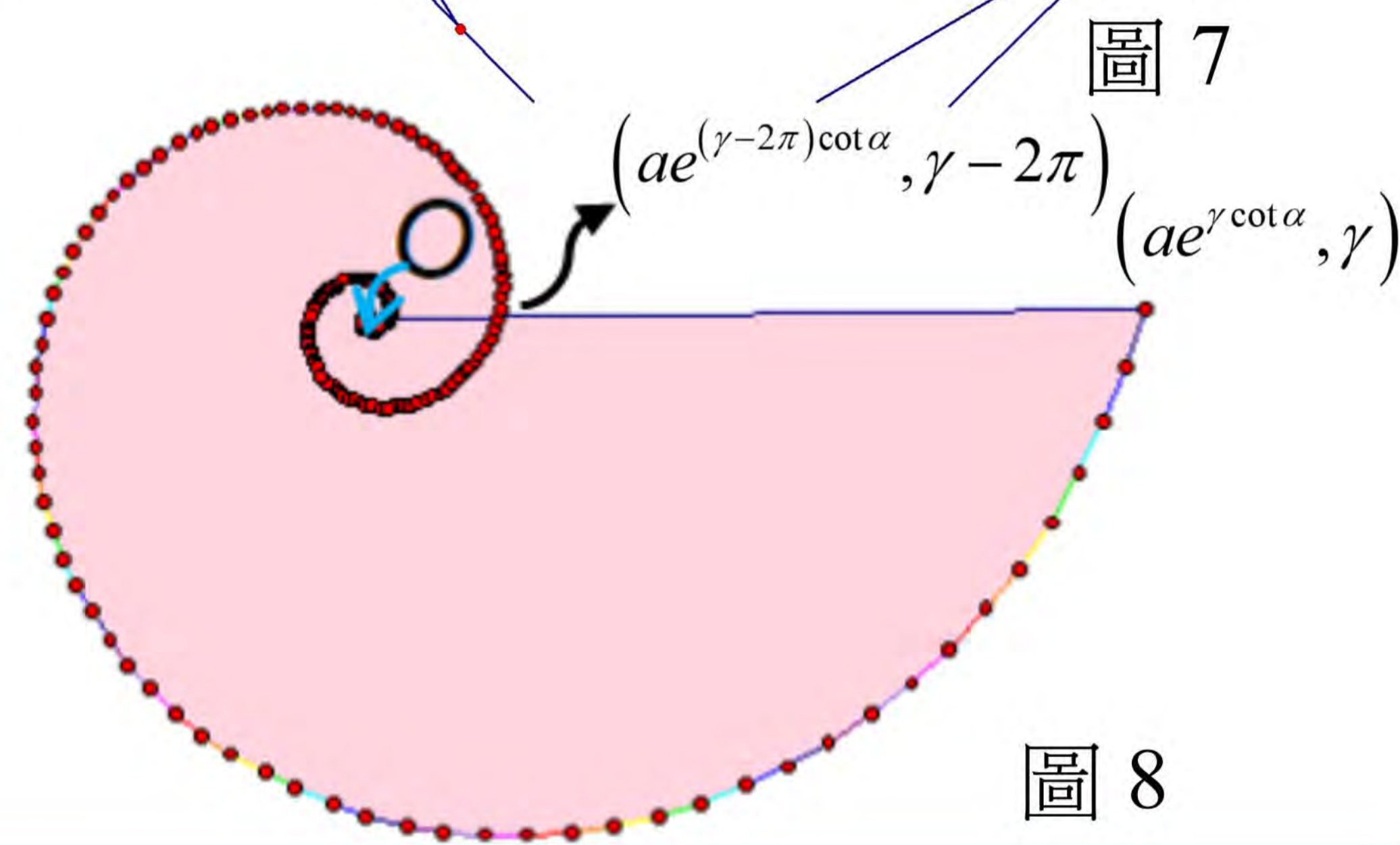
正 5_r 邊形中，在 $r+x=\frac{1}{2}$ 時， x 與 r 有黃金比值：研究 8

依切割方式①作出更多層漸小的正 n 邊形， $n=3,4,5,6$ 並取對應頂點生成等角螺線，其弧長與原正 n 邊形邊長的倍數關係：研究 9、10、11、12



統整研究 9~12 的結果，得到等角螺線總弧長與正 n 邊形邊長的倍數關係一般式並驗證之：研究 13

正 n 邊形中任一條等角螺線掃過面積與正 n 邊形面積的倍數關係一般式：研究 14

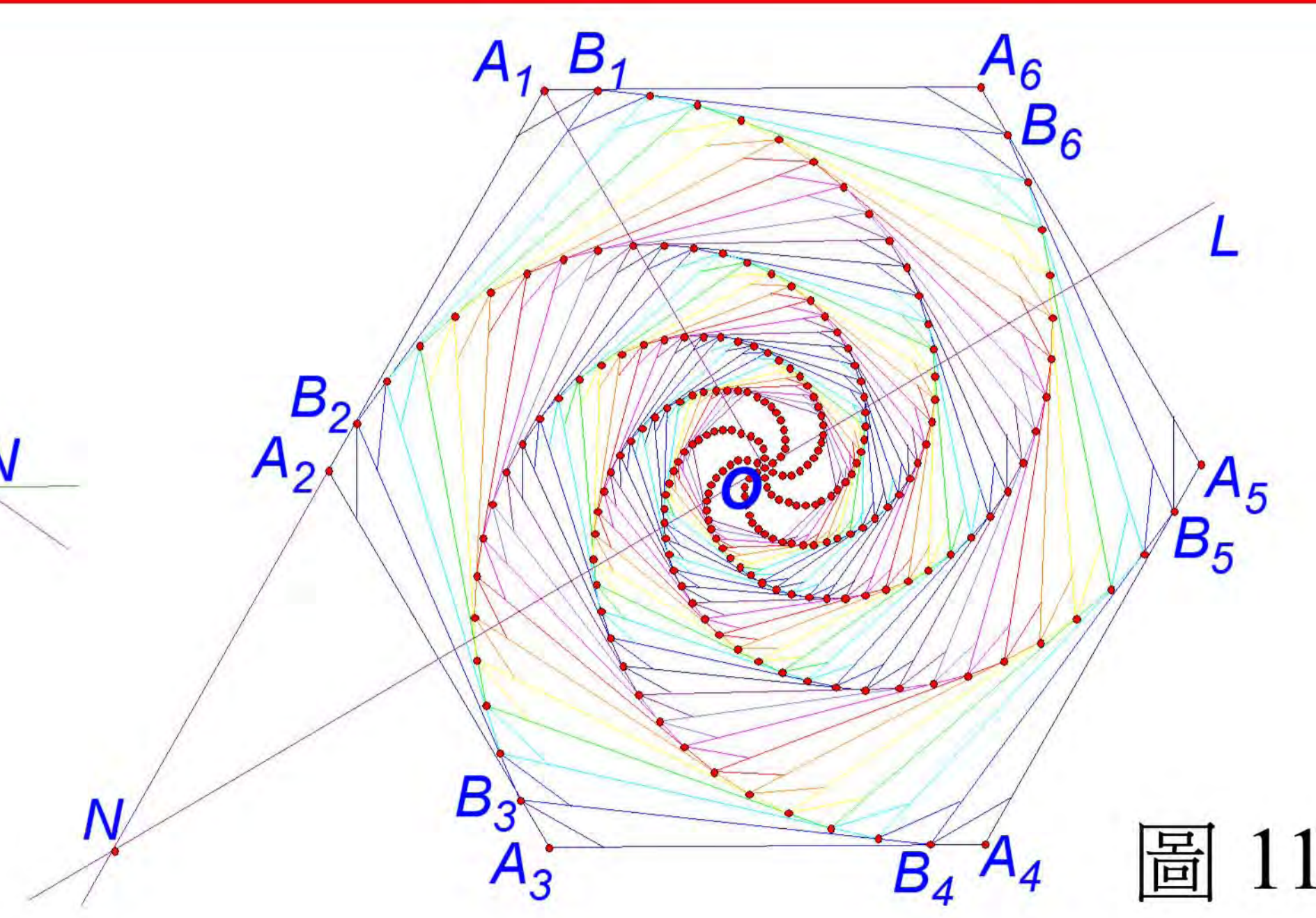
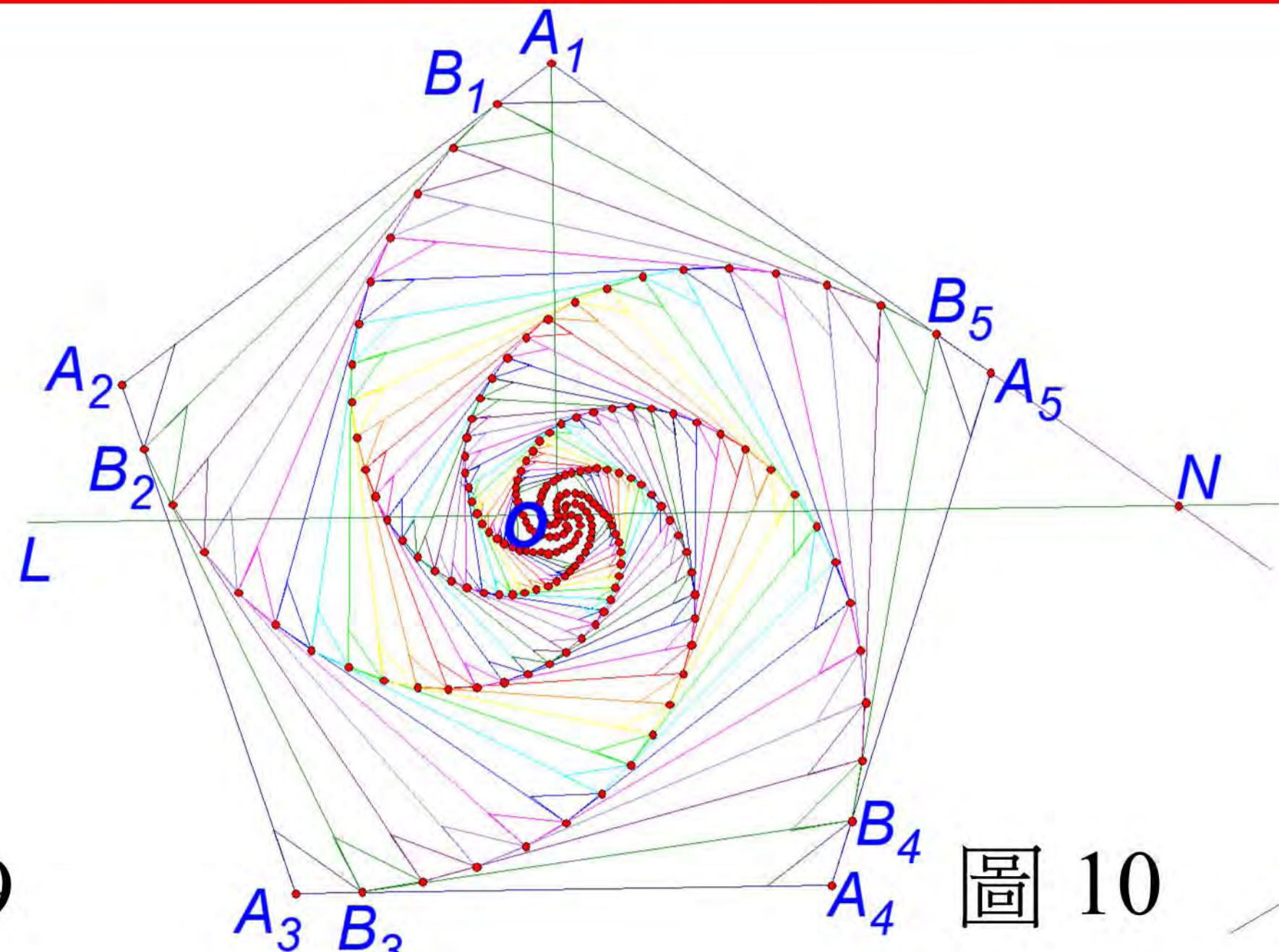
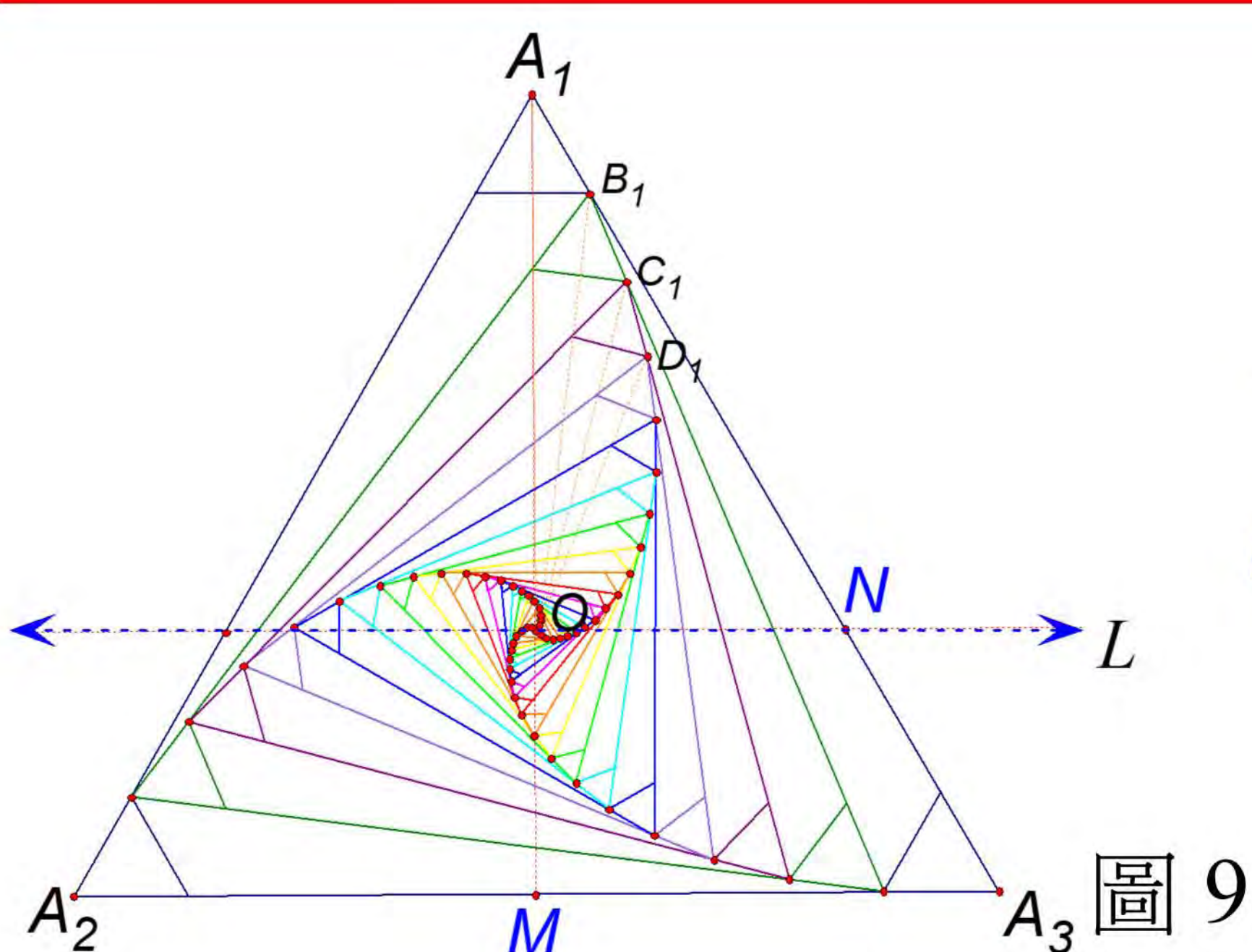


討論與結論

(含作品結果與文獻參考重點之差異分析表)

研究 13、14：如圖 9~11

在邊長為 1 的原生正 n_r 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 中，同研究 9 的作法作出足夠多且最後收斂在中心點 O 上的正 n 邊形。取每一層正 n 邊形對應的頂點會形成等角螺線，且等角螺線總弧長與原生正 n_r 邊形邊長的比值關係為 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{n-2}{2n}\pi\right)$ ，且一條等角螺線掃過面積與原生正 n 邊形面積之關係一般式為 $\frac{1}{4n}(1-e^{-4\pi\cot\alpha})\times\sec^2\alpha\times$ 正 n_r 邊形面積



等角螺線的性質/邊數	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
總弧長與正 n_r^n 邊形邊長比值 $=\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{n-2}{2n}\pi\right)$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{5+\sqrt{5}}{5}$	2
掃過面積 $=\delta_n(1-e^{-4\pi\cot\alpha})\times$ 原生正 n_r^3 邊形面積 $\delta_n = \frac{1}{4n}\sec^2\alpha$	$\delta_3 = \frac{1}{9}$	$\delta_4 = \frac{1}{8}$	$\delta_5 = \frac{5+\sqrt{5}}{50}$	$\delta_6 = \frac{1}{6}$

表格二

參、討論與結論

一~四已說明過，再將研究 6 二次函數式的最小或最大值統整如表格三。
一、(五)當切掉的小正 n 邊形， $n=4$ 時，我們取四邊等長的菱形來切，也會得到如研究 6、7 一樣的規律關係。

正 n 邊形	$x+r = \frac{1}{2}$ 時，第二層正 n 邊形的最小面積 $= \frac{n}{8} \left[2\cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right) - \sin\theta_n \right]$ 切掉的小正 n 邊形最大面積 $= \frac{1}{4} \times \left[n\cot\left(\frac{\theta_n}{n-2}\right) \right] \times r^2$ 第二層正 n 邊形與原正 n_r^n 邊形面積的最小倍數關係 $\frac{1}{2} \left[2 - \sin\theta_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]$			
$n=3$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1}{4}$	$n=5$ $\frac{8\sqrt{25+10\sqrt{5}} - 5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{32}$ 、 $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{32}$ 、 $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$
$n=4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$n=6$ $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{16}$ 、 $\frac{3}{4}$

表格三

篇名/作者	參考重點	與本作品的差異分析
等角螺線及其他/ 趙文敏教授	在等角螺線 $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ 上，幅角 θ 滿足區間 $[\beta, \gamma]$ 的弧長為 $a\sec\alpha(e^{\gamma\cot\alpha} - e^{\beta\cot\alpha})$ ， $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	本作品將此公式應用在正 n 邊形中，探討螺線總弧長 $S = a \times \sec\alpha$ 與該正 n 邊形邊長的倍數關係
有趣的對數螺線/ 王聖文	1. 由 P 點繞回 O 點的弧長 $= \overline{PT}$ 這是數學家托里切利發現的性質 2. 若 $\beta \leq \theta \leq \gamma$ ， $\beta = \gamma - 2\pi$ 向徑掃過的面積為 $\frac{\tan\alpha}{4}(1 - e^{-4\pi\cot\alpha}) \times r^2$ $r = ae^{\gamma\cot\alpha}$	1. 利用托里切利性質去做正 n 邊形中等角螺線總弧長的幾何驗證。 2. 推廣得到正 n 邊形中螺線掃過面積與正 n 邊形面積的關係。(研究 14)
動態追逐/ 李堂愷	正 n 邊形中質點瞬時速度方向指向目標點形成等角螺線軌跡路徑長為 $\frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$	用研究目的三的作法得正 n 邊形中的等角螺線，螺線總弧長為正 n 邊形邊長的 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{n-2}{2n}\pi\right)$ 倍。
形中有形/ 黃胤勛、 李易哲、 劉奕辰、 王昱翔	1. 新圖形與原正 n 邊形面積比為 $\frac{a^2 - 2a + 2 - 2(a-1)\cos\theta}{a^2} : 1$ ， $a \geq 1$ 2. 探討正 n 邊形各邊中點連線 ($a=2$) 面積與原面積比如下： $n=3 \Rightarrow 0.25$ 、 $n=4 \Rightarrow 0.5$ $n=5 \Rightarrow$ 約 0.65、...、 $n=\infty \Rightarrow 1$	1. 新正 n 邊形面積與 r 的關係一般式為 $\omega_n(r^2 - r) + \lambda_n$ 2. 新正 n 邊形與原正 n 邊形的面積比值一般式為 $\phi_n(r^2 - r) + 1$ 在 $r = \frac{1}{2}$ 時，最小倍數關係為 $\frac{1}{2} \left[2 - \sin\theta_n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]$ 。

表格四