有趣的對數螺線

高中組數學科第二名

臺灣省立台中第一高級中學

作　　者：王聖文
指導教師：張邦雄

一、研究動機

小時候常常去海邊撿貝殼，那時我總是被貝殼上特殊的紋路深深地吸引著。上了高中無意間發現貝殼上的紋路很接近對數螺線的形狀，並且在科學月刊上看到趙文敏教授的文章，引起了我的興趣，可是在文中黃金螺線的部分並沒有詳細的證明，於是我便深入地研究，在翡波那契數列那本書中看到了部分證明，我試圖補全所有的證明，經過多次的試驗，我意外發現黃金矩形所引出的螺線，一般書上的圖形並不嚴謹，這個發現讓我下定決心好好地研究對數螺線的性質及其推廣圖形。

二、研究大綱

(一)平面上的對數螺線：

1. 對數螺線的圖形。
2. 對數螺線的漸進點、等角性質、全等性質的研究。
3. 對數螺線面積的計算。
4. 對數螺線弧長的計算與研究。
5. 對數螺線的漸伸線、垂足曲線、焦線、曲線中心反演曲線。
6. 幾個特殊的對數螺線。

(二)更進一步，我推廣到空間的情形，在此情形下我研究：

7. 空間螺線的圖形。
8. 空間螺線的漸近點、等角性質、全等性質。
9. 空間螺線的弧長。
10. 空間螺線構成的曲面面積。
11. 空間螺線構成的體積。
12. 空間螺線的漸伸線。
13. 平面上黃金螺線的空間情形。

三、研究工具

紙、筆、尺、計算機

四、研究過程

(一)對數螺線的方程式

對數螺線在極座標裡，其方程式為 $r=ae^{k\theta}$ （a，k為常數；$k\neq0$）

(二)對數螺線的圖形

我們取a，k為某一常數（$k>0$），則其圖形如圖四的對數螺線C。

(三)對數螺線的性質

1. 對數螺線的漸近點

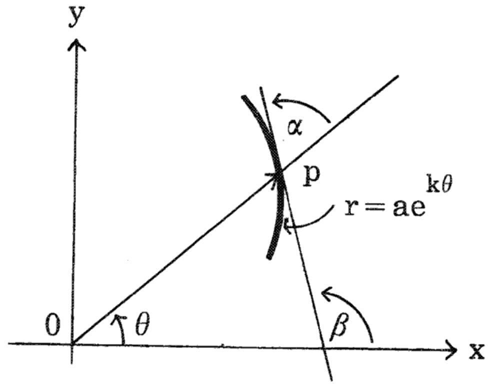
根據對數螺線的方程式及圖形可看出：若$k>0$，則當$\theta\to\infty$時，曲線越繞越遠；當$\theta\to-\infty$時，曲線繞著極點0愈來愈接近它，所以我們可說極點0是對數螺線的漸近點。

2. 對數螺線的等角性質

在右圖對數螺線$r=ae^{k\theta}$上一點p，設α為向徑0P與P點之切線的夾角，則：

$$\tan\alpha=\tan(\beta-\theta)=\frac{\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta\ \tan\theta}=\frac{dy/dx-\tan\theta}{1+dy/dx\ \tan\theta}$$

$$=\frac{\dfrac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}\cdot\cos\theta-\sin\theta}{\dfrac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}\cdot\sin\theta+\cos\theta}=\frac{r}{r'}$$



圖一

把這個結果應用在對數螺線上，我們求得

$$\tan\alpha=\frac{ae^{k\theta}}{ake^{k\theta}}=\frac{1}{k}\leftarrow \text{定值}$$

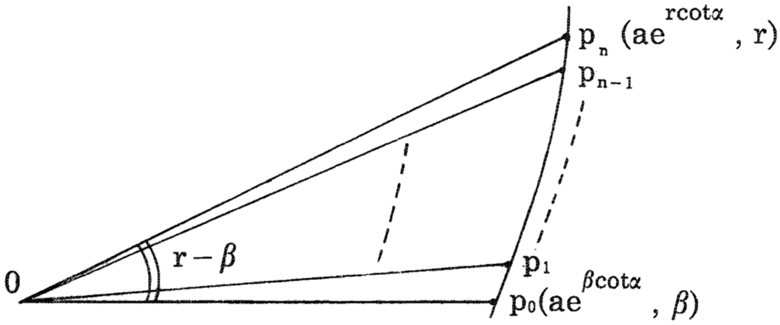
所以我們可把對數螺線方程式$r=ae^{k\theta}$改寫為$r=ae^{\theta\cot\alpha}(\alpha\neq\frac{n\pi}{2}，n\in Z)$.

3. 對數螺線的全等性質

若以極點為中心將對數螺線 $r=ae^{\theta\cot\alpha}$ 伸縮m倍（$m>0$），則所得的圖形是$r=ame^{\theta\cot\alpha}$ 。因為$m>0$，所以伸縮後的圖形為$r=ae^{(\theta+\delta)\cot\alpha}$ （令$m=e^{\delta\cot\alpha}$）。這個圖形就是將原對數螺線繞極點順時針旋轉δ角而得，故自然與原螺線全等。

4. 對數螺線的面積

(1)求對數螺線上，幅角θ滿足$\beta \leqq \theta \leqq r$的向徑掃過的面積。將區間$[\beta, r]$等分成n等分，設每等分長$h=(r-\beta)/n$。令 P_i 表示極座標（$ae^{(\beta+ih)\cot\alpha}$，$\beta+ih$）的點，$i=0,1,\cdots\cdots,n$（如圖二），先考慮面積和$\sum_{i=0}^{n-1} a\triangle P_i0P_{i+1}$若這個和在



圖二

$n\to\infty$（或$h\to 0$）的極限存在，則其極值就是所欲求的面積。另外，我們很容易得到$\triangle P_i0P_{i+1} \sim \triangle P_{i+1}0P_{i+2}$，所以$a\triangle P_00P_1 : a\triangle P_10P_2 = \overline{0P_0}^2 : \overline{0P_1}^2 = 1 : e^{2h\cot\alpha}$

$$\therefore \sum_{i=0}^{n-1} a\triangle P_i0P_{i+1} = [\overline{0P_0}\cdot\overline{0P_1}\sinh/2][1+(e^{2h\cot\alpha})+(e^{2h\cot\alpha})^2+\cdots+(e^{2h\cot\alpha})^{n-1}]$$

$$=\frac{1}{2}[(ae^{r\cot\alpha})^2-(ae^{\beta\cot\alpha})^2](\frac{e^{h\cot\alpha}\cdot\sinh}{e^{2h\cot\alpha}-1})$$

根據L' Hospital法則，可得：$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\cot\alpha}\cdot\sinh}{e^{2h\cot\alpha}-1}=\frac{\tan\alpha}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} a\triangle P_i0P_{i+1}=\frac{\tan d}{4}[(ae^{r\cot\alpha})^2-(ae^{\beta\cot\alpha})^2]$$

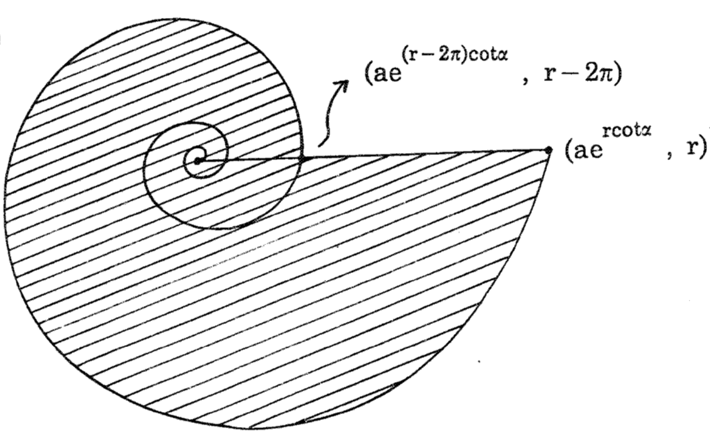
(2)若$\beta=r-2\pi$，則所求即爲圖三斜線部分的面積。

得：$\frac{\tan\alpha}{4}(ae^{2r\cot\alpha}-ae^{2(r-2\pi)\cot\alpha})$

$$=\frac{\tan\alpha}{4}(ae^{2r\cot\alpha})(1-\frac{1}{e^{4\pi\cot\alpha}})$$

令　$r=ae^{r\cot\alpha}$

$$=\frac{\tan\alpha}{4}(1-\frac{1}{e^{4\pi\cot\alpha}})\cdot r^2$$



圖三

5. 對數螺線的弧度

$$\because ds=\sqrt{r^2+(dr/d\theta)^2}d\theta=r\sqrt{1+k^2}d\theta=\frac{1}{k}\sqrt{1+k^2}dr$$

$$=\frac{1}{\cot\alpha}\sqrt{1+\cot^2\alpha}\,dr=\sec\alpha dr$$

$\therefore$ 弧長　$s=\sec\alpha(r_2-r_1)$

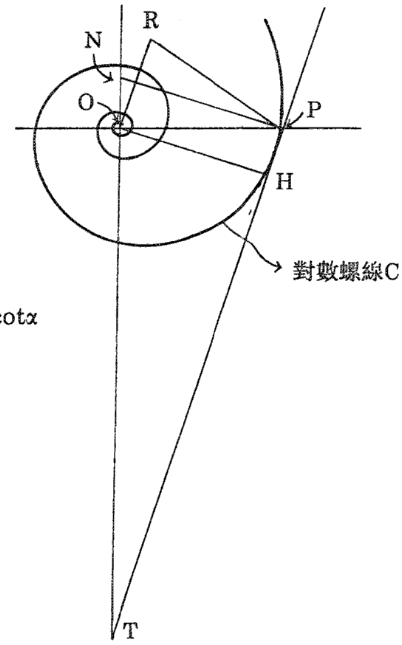
若我們從一點P繞回極點的弧長爲：

$\sec\alpha(ae^{r\cot\alpha}-ae^{\beta\cot\alpha})=\sec\alpha(ae^{r\cot\alpha}-0)=\overline{0P}\cdot\sec\alpha=\overline{PT}$

此結果可做一有趣的幾何解釋：設想對數螺線在直線$\overleftrightarrow{PT}$上作不滑的滾動，則極點0最後會移動到T，而且運動的過程中，0點的運動路徑就是$\overline{0T}$（圖四）。

6. 對數螺線的再生性質

設對數螺線C的極座標方程式爲：$r=ae^{\theta\cot\alpha}$（a，α爲常數；$0<\alpha<\pi/2$），以下是它演生的曲線（參圖四）：



圖四

(1)所有T點構成的圖形爲

$$r=(a\tan\alpha)e^{(\theta+\pi/2)\cot\alpha}$$

稱爲原對數螺線的漸伸線，且與原曲線全等。

(2)對數螺線的垂足曲線爲

$r=\overline{OH}=\overline{OP}\sin\alpha\ \Rightarrow\ r=(a\sin\alpha)e^{(\theta-\alpha+\pi/2)\cot\alpha}$

(3)對數螺線的焦線

$r=\overline{OR}=2\overline{OP}\cos\alpha\ \Rightarrow\ r=(2a\cos\alpha)e^{(\theta-\alpha)\cot\alpha}$

(4)對數螺線的曲率中心

$$曲率半徑\quad \rho=\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}=r\csc\alpha$$

可得曲率中心N的方程式爲：$r=(a\cot\alpha)e^{(\theta-\pi/2)\cot\alpha}$，亦是原對數螺線C的漸屈線，也是其所有法線的包絡線。

(5)對數螺線的反演曲線

對數螺線C對其半徑爲K的圓O的反演曲線爲：

$$r=\frac{k^2}{a}e^{-\theta\cot\alpha}$$

此一新對數螺線與原螺線C全等，但其軌跡方向恰與原螺線相反。

(四)幾個對數螺線

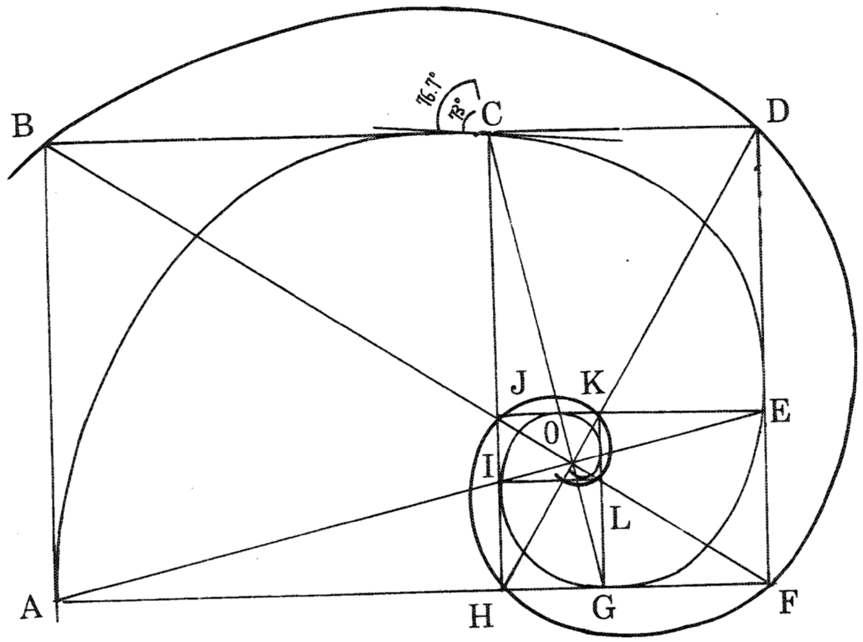
1. 在一片空曠的草地上，甲、乙、丙、丁四隻狗，分別站立在正方形的四個頂點A、B、C、D上。狗主人要甲狗緊盯乙狗，乙狗緊盯丙狗，丙狗緊盯丁

狗，丁狗緊盯甲狗。一聲令下，四隻狗以相同的速度同時衝向目標。假定每隻狗在每個時刻都是正面朝向它的目標，那麼這四隻狗所跑的路徑爲一對數螺線的形式。

2. 黃金螺線

(1)黃金矩形與對數螺線

在圖五中，□AFDB、□CHFD、□EJHF、□GKJH、□ILKJ等這一系列的矩形皆爲黃金矩形，而且後一個矩形都是由其前面的矩形挖掉一個正方形而得的。令$\overline{AF}=1$，$W=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，則正方形串AHCB、CJED、EKGF、…的邊長分別爲W、W^2、W^3……。連$\overline{JB}$、$\overline{JF}$，由$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，即$\dfrac{\overline{EJ}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{EJ}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，即$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{CJ}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，又$\angle JEF=\angle BCJ=90°$，故$\triangle JEF\sim\triangle BCJ$，因此$\angle EFJ=\angle CJB$，又$\angle JEF=\angle HJF$，故$\angle HJF=\angle CJB$，即B、J、F三點共線。同理可證D、K、H三點共線。



圖五

設$\overline{BF}$、$\overline{DH}$的交點爲O，連接$\overline{OA}$、$\overline{OE}$。由$\angle BDO=\angle FHO$，$\angle DBO=\angle HFO$，得$\triangle BDO\sim\triangle FHO$

因而 $\dfrac{\overline{OF}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{FH}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{BD}}\cdot\dfrac{\overline{FH}}{\overline{DF}}=W^2$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{FH}}\cdot\frac{\overline{FH}}{\overline{AB}}=W^2$$

以及$\angle OFE=\angle OBA$，故$\triangle OFE\sim\triangle OBA$。因此$\angle EOF=\angle AOB$，即AOE爲一直線，於是$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{DH}$三線共點。

由前面的證明，我們很容易便可證出：$\triangle BOD\sim\triangle DOF\sim\triangle FOH\sim\triangle HOI\cdots$，因此可得：$\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OF}}=\frac{\overline{OF}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{OH}}{\overline{OJ}}=\phi$（令$\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$）

此即爲對數螺線的相似性質。因此每個相似的矩形的第一個頂點B、D、F、H、J、K、L……等會落在一對數螺線上，若以O爲極點，射線$\overrightarrow{OB}$爲極軸，且B的極座標爲（a,O），則此對數螺線的極座標方程式爲：

$$r=a(\phi^{2/\pi})^{\theta}$$

定角 $\alpha=\text{arc cot}\frac{r'}{r}=\text{arc cot}(\frac{2}{\pi}\ln\phi)\doteqdot 73^\circ$

由於$\triangle BOD\sim\triangle DOF\sim\triangle FOH\sim\triangle HOI\sim\cdots$，所以$\angle BOD=\angle DOF=\angle FOH=\angle HOJ=90^\circ$。又$\overline{OB}:\overline{OD}=\overline{BC}:\overline{CD}=\phi$，可知$\angle BOC=\angle COD=45^\circ$，於是便得$\overline{OC}=\overline{OD}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\phi}$，同理：$\overline{OE}=\overline{OF}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\phi}$，$\overline{OG}=\overline{OH}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\phi}$，$\overline{OI}=\overline{OJ}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\phi}$，……，因此，我們可得另一通過點A、C、E、G、I、……等的對數螺線：

$$r=\frac{\sqrt{2}a}{\phi}(\phi^{2/\pi})^{\theta-\pi/2}$$

定角 $\alpha=\text{arc cot}\frac{r'}{r}=\text{arc cot}(\frac{2}{\pi}\ln\phi)\doteqdot 73^\circ$

另外，$\cot\angle OCD=\cot(\angle OBC+\angle BOC)=\frac{\cot\angle DBC\cot\angle BOC-1}{\cot\angle OBC+\cot\angle BOC}=\sqrt{5}-2$

$\therefore\ \text{arc cot}(\sqrt{5}-2)\doteqdot 76.7^\circ\ (\neq\alpha)$

由此可知，**通過A、C、E、G、I、……的對數螺線不與四邊形串：ABDF、CDFH、EFHJ、GHJK、IJKL相切。此對數螺線也可稱爲對數螺線**。

(2)黃金三角形與對數螺線

在圖六中，黃金三角形串$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDE$、$\triangle DEF$、$\triangle EFG$、……等，後一個黃金三角形都是前面的黃金三角形挖掉一個等

腰三角形而得的。我們可得到：

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}=\cdots\cdots=\phi\ (\ \phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ )$$

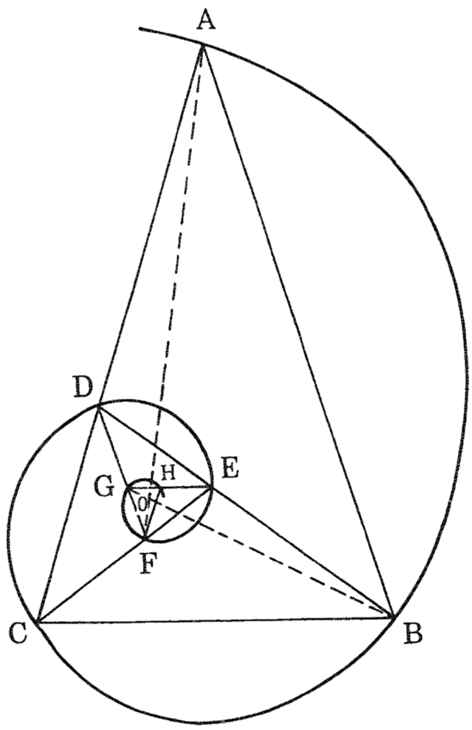
$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\cdots\cdots=3\pi/5$$

由上可看出此即爲對數螺線的相似性質。因此，每個等腰三角形的頂點A、B、C、D、E、F、G、H、……等會落在一對數螺線上，此對數螺線的極點是$\overline{AF}$與$\overline{BG}$的交點。若以O爲極點，射線$\overrightarrow{OA}$ 爲極軸，且A的極座標爲（ a,0 ），則此對數螺線的極座標方程式爲：

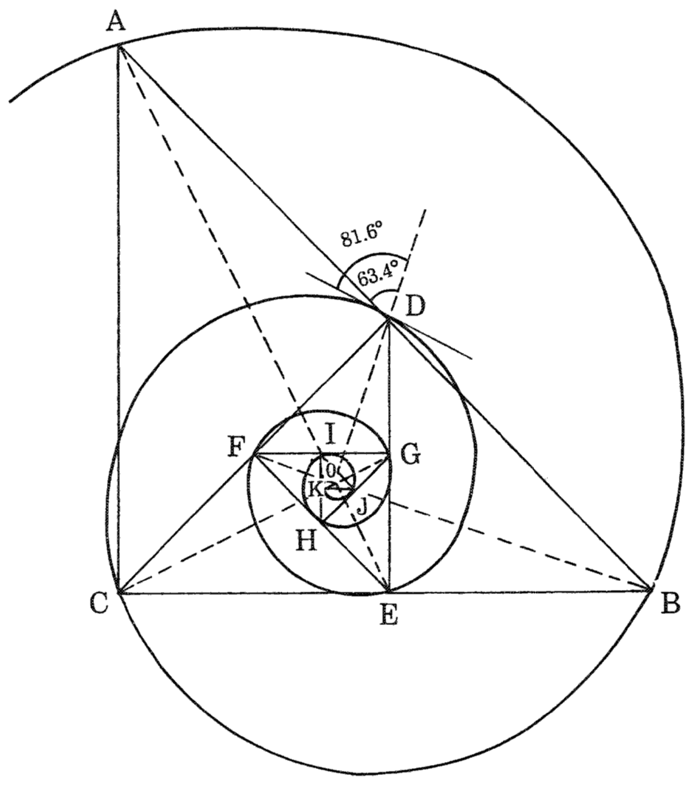
$$r=a(\phi^{5/3\pi})^{\theta}$$

$$\text{定角}\ \alpha=\text{arc cot}\ \frac{r'}{r}=\text{arc cot}\ (\frac{5}{3\pi}\ \ln\ \phi)\doteqdot 49.4°$$

此對數螺線亦可稱爲黃金螺線。



圖六



圖七

3. 是不是還有特殊的三角形也可引出對數螺線呢？我發現等腰直角三角形串是

可以的。

在圖七中，$\triangle ABC$是一等腰直角三角形，$\angle C$為直角，D是C向$\overline{AB}$作垂線的垂足，E是D向$\overline{BC}$作垂線的垂足，……，如此可得三角形串ABC、BCD、CDE、DEF、EFG、FGH、……等是相似的等腰直角三角形，連$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CG}$、$\overline{DH}$會交於一點O，且I、J、K各會落在$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CG}$上，因此可以知道：

$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\cdots\cdots=3\pi/4$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}=\sqrt{2}$$

此即為對數螺線的相似性質，因此點A、B、C、D、E、F、……等會落在一對數螺線上，若以O為極點，射線$\overrightarrow{OA}$為極軸，且A的極座標為（a,O），則此對數螺線的極座標方程式為：

$$r=a\left(\sqrt{2}^{\,4/3\pi}\right)^{\theta}$$

$$\text{定角 } \alpha=\text{arc cot}\,\frac{r'}{r}=\text{arc cot}\,\left(\frac{4}{3\pi}\ln\sqrt{2}\right)\doteqdot 81.6^{\circ}$$

五、空間推廣

在研究對數螺線時，我便想將它推廣到空間的圖形，使新圖形亦具有對數螺線一些重要的性質，於是我得到以下結果（$f(\theta)=ae^{\theta\cot\alpha}$；a, α為常數；$a>0$；$0<\alpha<\pi/2$）：

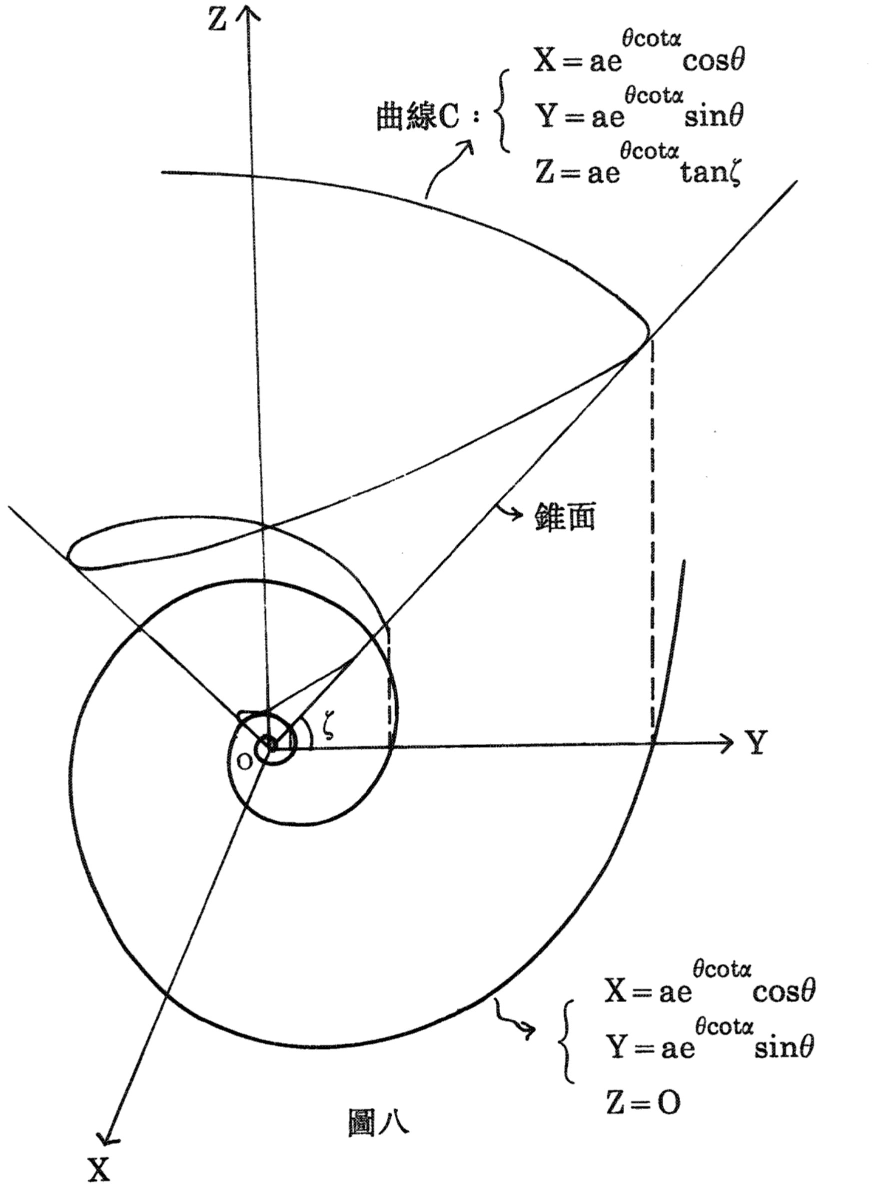
(一)在一正交的空間座標系中，一圓錐面在xy平面的上方且錐定在（0,0,0），錐面與xy平面的夾角為ζ，與一對數螺面$X=ae^{\theta\cot\alpha}\cos\theta$，$Y=ae^{\theta\cot\alpha}\sin\theta$的交集為一新的曲線，令其為曲線C：$X=ae^{\theta\cot\alpha}\cos\theta$，$Y=ae^{\theta\cot\alpha}\sin\theta$，$Z=ae^{\theta\cot\alpha}\tan\zeta$。就是我所要研究的曲線。

(二)漸近點

由曲線C的方程式及圖八可看出：當$\cot\alpha>0$，則$\theta\rightarrow-\infty$時，曲線愈來愈近原點O，所以我們可說原點O是曲線C的漸近點。

(三)等角性質

曲線C上一點P（$f(\theta)\cos\theta$，$f(\theta)\sin\theta$，$f(\theta)\tan\zeta$），令$\overrightarrow{OP}$與其切向量（$f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$，$f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$，$f'(\theta)\tan\zeta$）的夾角為$\alpha'$，則：



圖八

$$\cos\alpha' = \frac{f'(\theta)+f'(\theta)\tan^2\zeta}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\tan^2\zeta}\sqrt{f(\theta)^2-f'(\theta)^2(1+\tan^2\zeta)}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha\cos^2\zeta+1}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha' = \tan\alpha\cos\zeta = \text{定值}$$

這意謂著曲線C與所有徑向量都交於相同的角$\alpha' = \tan^{-1}(\tan\alpha\cos\zeta)$，所以圓錐面上過原點的任一直線與曲線C交於相同的交角α'，且這些交點上的切線彼此平行。

(四)全等性質

在對數螺線的情形中，若伸縮中心是它的極點，則不論放大或縮小多少倍，所得的不只是相似圖形而已，它是與原對數螺線全等的一個對數螺線，是原對數螺線繞極點旋轉某一角度而得。由曲線C的定義可知：若以原點爲伸縮中

心，則不論曲線C放大或縮小多少倍，所得的另一曲線會與曲線C全等，是曲線C繞Z軸旋轉某一角度而得。

㈤弧長

令曲線C上任一點的切向量（$f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$，$f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$，$f'(\theta)\tan\zeta$）與其水平向量（$f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$，$f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$，O）的夾角爲$\delta$，則：

$$\cos\delta=\frac{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}{\sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}\sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2(1+\tan^2\zeta)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sec^2\zeta}}=\text{定值}$$

因此曲線C的弧長$=\dfrac{\text{曲線C在xy平面投影的弧長}}{|\cos\delta|}$

$$=\sqrt{\tan^2\alpha+\sec^2\zeta}\,(r_2-r_1)$$

由此可知：在曲線C上，幅角θ滿足$\beta\leqq\theta\leqq r$那段弧長爲：

$$\sqrt{\tan^2\alpha+\sec^2\zeta}\,(ae^{r\cot\alpha}-ae^{\beta\cot\alpha})$$

在$0<\alpha<\pi/2$的情形中，因爲$\theta\to-\infty$時，可得$ae^{\theta\cot\alpha}\to 0$，則我們從一點$P(ae^{r\cot\alpha}\cos r, ae^{r\cot\alpha}\sin r, ae^{r\cot\alpha}\tan\zeta)$繞回原點O的這段弧長爲：

$\sqrt{\tan^2\alpha+\sec^2\zeta}\,ae^{r\cot\alpha}$

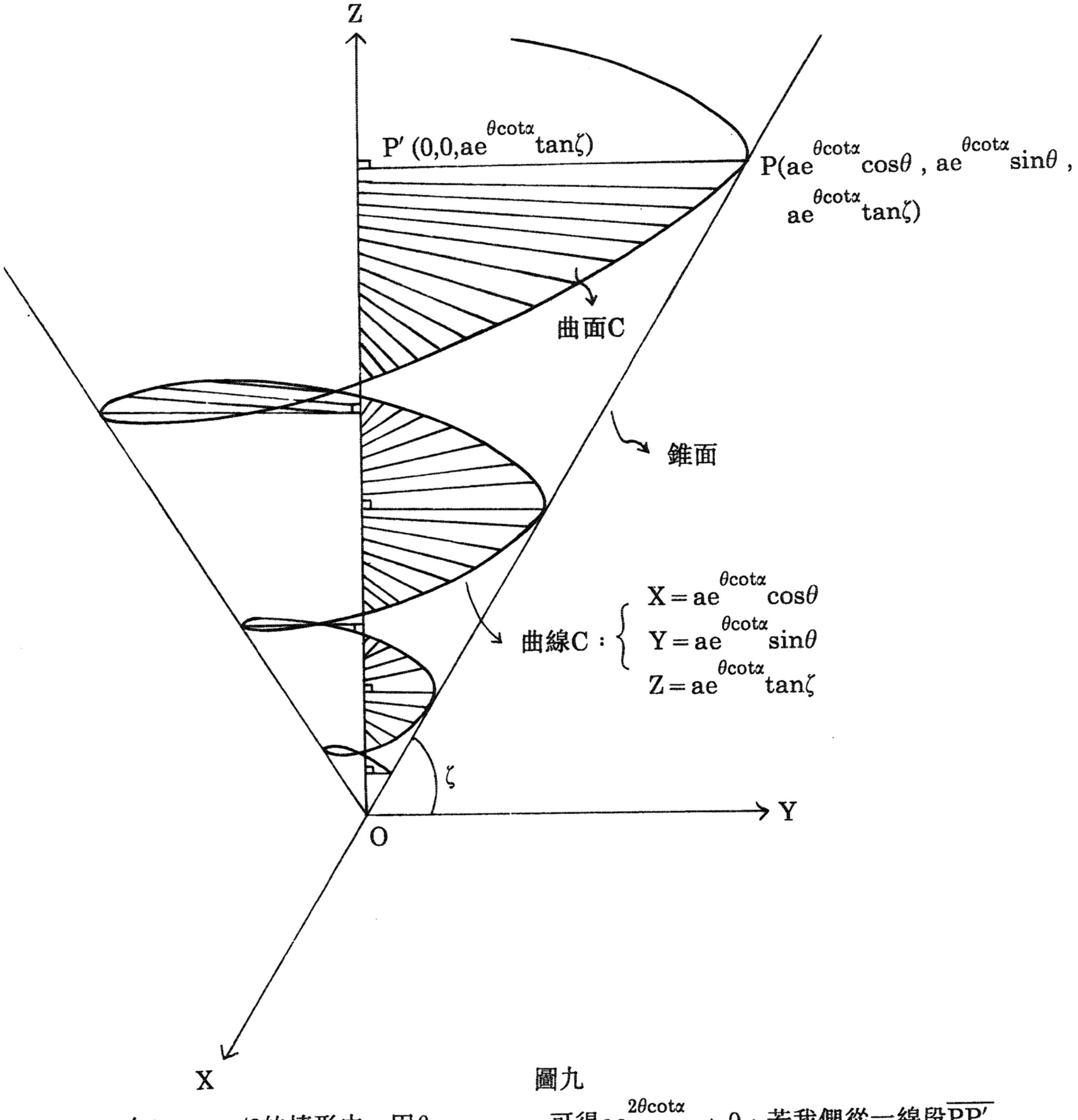
㈥面積

若我們自曲線C上的任一點P向Z軸作垂線而交於P′，可得一線段$\overline{PP'}$，則所有P點構成的所有線段，就可形成一曲面，令其爲曲面C（如圖九）。由於曲面C的法向量與xy平面的法向量夾角恆爲δ，因此曲面C的面積

$$=\frac{\text{曲面C在xy平面投影的面積}}{|\cos\delta|}=\frac{\sin\alpha}{4}\sqrt{\tan^2\alpha+\sec^2\zeta}\,(r_2^2-r_1^2)$$

由此可知：在曲面C上，幅角θ滿足$\beta\leqq\theta\leqq r$那段曲面面積爲：

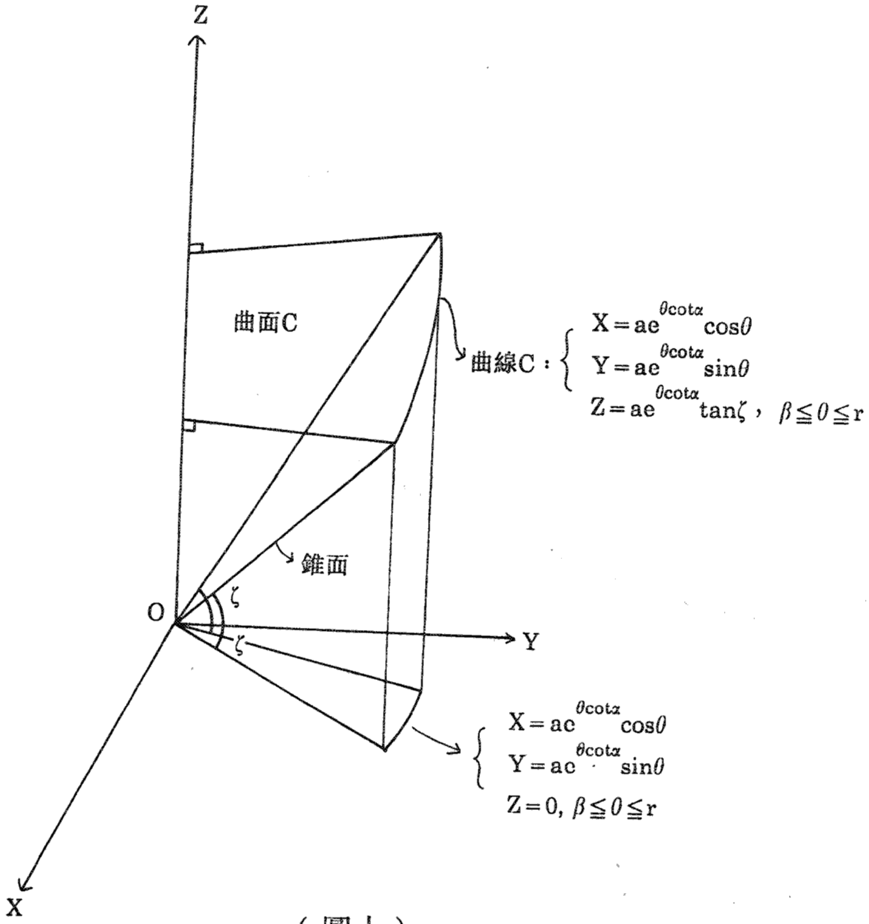
$$\frac{\sin\alpha}{4}\sqrt{\tan^2\alpha+\sec^2\zeta}\,(ae^{2r\cot\alpha}-ae^{2\beta\cot\alpha})$$



圖九

在$0<\alpha<\pi/2$的情形中，因$\theta\rightarrow-\infty$，可得$ae^{2\theta\cot\alpha}\rightarrow 0$，若我們從一線段$\overline{PP'}$
[$P=(ae^{r\cot\alpha}\cos r , ae^{r\cot\alpha}\sin r , ae^{r\cot\alpha}\tan\zeta)$; $P'=(0 , 0 , ae^{r\cot\alpha}\tan\zeta)$
] 繞回原點的這段曲面面積爲：

$$\frac{\sin\alpha}{4}\sqrt{\tan^2\alpha+\sec^2\zeta}\ ae^{2r\cot\alpha}$$



（圖十）

(七)體積

1. 我們先求曲面 $\begin{cases} x=ae^{\theta\cot\alpha}\cos\theta \\ y=ae^{\theta\cot\alpha}\sin\theta，\beta\leqq\theta\leqq r \end{cases}$ 與錐面，xy平面所圍成的體積，如圖十的斜線部分體積爲：

$$\int_\beta^r\int_0^{ae^{\theta\cot\alpha}} r\cdot rdrd\theta=\frac{\tan\alpha}{9}\left[(ae^{r\cot\alpha})^3-(ae^{\beta\cot\alpha})^3\right]$$

2. 在圖十中，曲面C與曲面 $\begin{cases} x=ae^{\theta\cot\alpha}\cos\theta \\ y=ae^{\theta\cot\alpha}\sin\theta，\beta\leqq\theta\leqq r \end{cases}$ 及xy平面所圍成的體積爲：

$$\int_\beta^r\int_0^{ae^{\theta\cot\alpha}}(ae^{\theta\cot\alpha})rdrd\theta=\frac{\tan\alpha}{6}\left[(ae^{r\cot\alpha})^3-(ae^{\beta\cot\alpha})^3\right]$$

3. 由上可知：曲面C，錐面及Z軸所圍成的體積爲：

$$\frac{\tan\alpha}{6}\left[(ae^{r\cot\alpha})^3-(ae^{\beta\cot\alpha})^3\right]-\frac{\tan\alpha}{9}\left[(ae^{r\cot\alpha})^3-(ae^{\beta\cot\alpha})^3\right]$$

$$=\frac{\tan\alpha}{18}\left[(ae^{r\cot\alpha})^3-(ae^{\beta\cot\alpha})^3\right]$$

我們可發覺 2. 所求的體積比上 3. 所求的體積＝3：1，這恰與圓柱體積比上同底等高之圓錐體積爲3：1相同。

(八)漸伸線

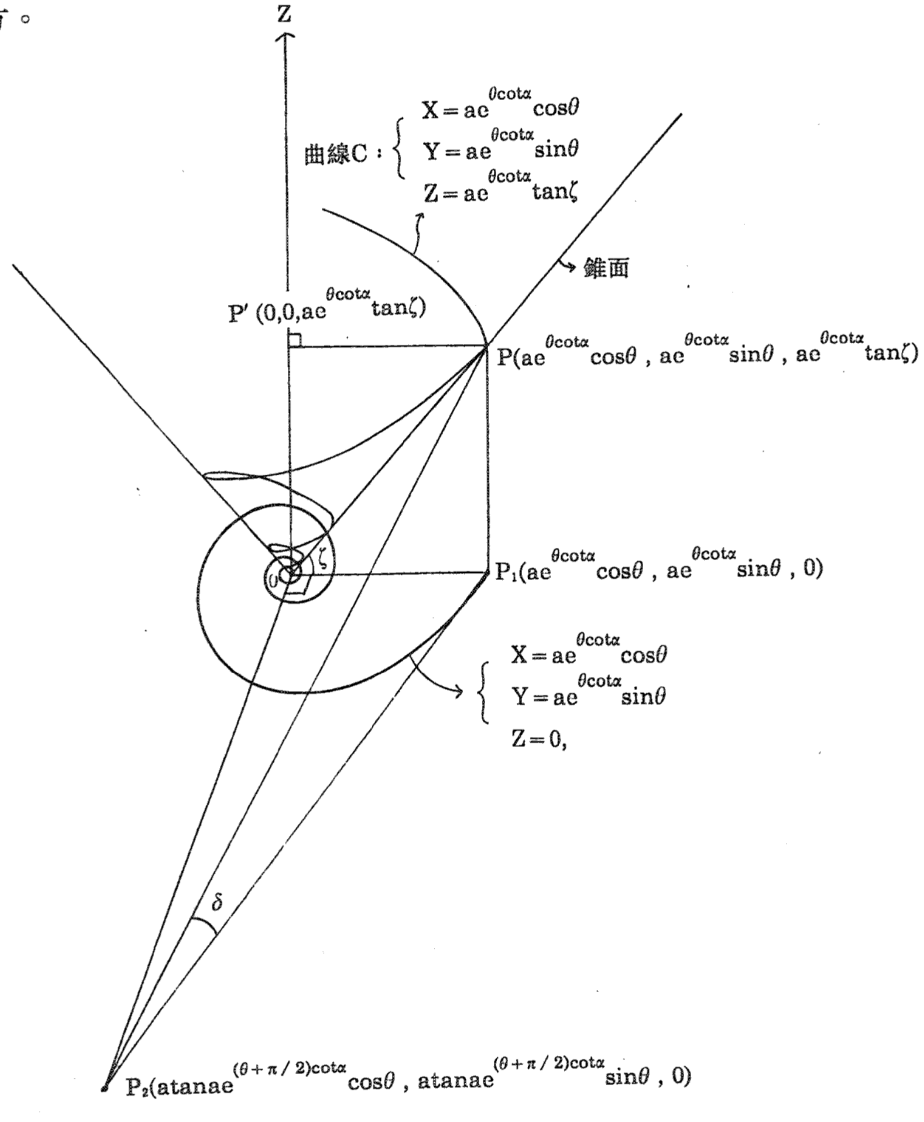
圖十一，

已知 $\cos\delta=\dfrac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sec^2\zeta}}=\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\sqrt{\bar{P}_1\bar{P}_2{}^2\sin^2\alpha+\bar{P}_1\bar{P}_2{}^2\cos\alpha\sec^2\zeta}}=\dfrac{\overline{P_1P_2}}{PP_2}$

$\therefore\ \angle PP_2P_1=\delta$

因此很容易便可看出曲線C自點P繞回原點的長度爲$\dfrac{\sec\alpha OP_1}{\cos\delta}=\overline{PP_2}$，且$\overline{PP_2}$與曲線C相切於點P，故所有$P_2$構成一對數螺線$r=(a\ \ \tan\ \ \alpha)\ e^{(\theta+\pi/2)\cot\alpha}$，是曲線C的漸伸線。

曲線C是否還有其它的演伸的曲線存在且值得討論呢？這是我想要繼續研究的地方。



圖十一

(九)圖形

在前面的研究中，我們知道黃金矩形、黃金三角形、等腰直角三角形的頂點可以引出對數螺線，這使我想要用長方體或三角柱來引出空間的螺線。

1. 我把圖五的每個頂點給它一個Z座標，使成爲立體圖形，其中：

$\overline{AA'}=\overline{BB'}$，$\overline{CC'}=\overline{DD'}$，$\overline{EE'}=\overline{FF'}$，$\overline{GG'}=\overline{HH'}$，……

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{CC'}}=\frac{\overline{CC'}}{\overline{EE'}}=\frac{\overline{EE'}}{\overline{GG'}}=\cdots\cdots=\phi\ (\text{令}\ \phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2})$$

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{DD'}}=\frac{\overline{DD'}}{\overline{FF'}}=\frac{\overline{FF'}}{\overline{HH'}}=\cdots\cdots=\phi$$

因此，B′、D′、F′、H′、…等會落在一空間螺線上，若以O爲原點，射線$\overrightarrow{OB}$爲X軸，且B′的座標爲（a，O，b），則此曲線的方程式爲：

$$\begin{cases} X=a(\phi^{2/\pi})^{\theta}\cos\theta \\ Y=a(\phi^{2/\pi})^{\theta}\sin\theta \\ Z=a(\phi^{2/\pi})^{\theta}\tan\zeta\text{，}\zeta=\arc\tan\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

A′、C′、E′、G′、……等亦會落在一空間螺線上，其方程式爲：

$$\begin{cases} X=\dfrac{\sqrt{2}a}{\phi}(\phi^{2/\pi})^{\theta-\pi/2}\cos\theta \\ Y=\dfrac{\sqrt{2}a}{\phi}(\phi^{2/\pi})^{\theta-\pi/2}\sin\theta \\ Z=\dfrac{\sqrt{2}a}{\phi}(\phi^{2/\pi})^{\theta-\pi/2}\tan\zeta\text{，}\zeta=\arc\tan\dfrac{\phi b}{\sqrt{2}a} \end{cases}$$

2. 我把圖六的每個頂點給它一個Z座標，使成爲立體圖形，其中：

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}=\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}=\frac{\overline{CC'}}{\overline{DD'}}=\frac{\overline{DD'}}{\overline{EE'}}=\cdots=\phi$$

因此A′、B′、C′、D′、E′、……等會落在一空間螺線上，若以O爲原點，射線$\overrightarrow{OA}$爲X軸，通過原點O而垂直△ABC的直線爲Z軸，且A′的座標爲（a，O，b），則此曲線的方程式爲：

$$\begin{cases} X=a(\phi^{5/3\pi})^{\theta}\cos\theta \\ Y=a(\phi^{5/3\pi})^{\theta}\sin\theta \\ Z=a(\phi^{5/3\pi})^{\theta}\tan\zeta\text{，}\zeta=\arc\tan\frac{b}{a} \end{cases}$$

六、參考資料

(一)科學月刊第二十卷第九、十期——等角螺線及其他（趙文敏）。

(二)簡明數學百科全書——原作者：雷查德　譯者：洪萬生　九章出版社。

(三)微積分——楊維哲　三民書局　民國73年10月初版。

(四)趣味幾何——凡異出版社　民國80年6月三版。

(五)翡波那契數列——吳振奎　編著　九章出版社　民國82年7月初版。

評　語

本作品探究平面上的對數螺線之圖形，漸近點、等角性質及相似性質等，並研究其弧長、面積漸伸線、垂足曲線、反演曲線等，進一步的推廣空間螺線之情形，特別處理空間中的黃金螺線，獲致一連串有意義結果，研究態度良好，值得鼓勵。