中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030416

拿破崙的四角戀

—將「拿破崙定理」推廣至四邊形的探討

學校名稱：新竹縣立成功國民中學

作者：	指導老師：
國二 許翰翔	李佩芬

關鍵詞：拿破崙定理、平行四邊形、對稱

摘　　要

此作品中，主要是研究「拿破崙定理」在四邊形條件下的各種推廣，將拿破崙定理在三角形條件下發現的各種規律類推到各種四邊形，並發現了許多有趣的結果。

我的研究內容主要包含和拿破崙定理相近之重心連線；在其圖形中稍加變化而得的外接圓交點性質、面積性質；結合螺旋槳定理、愛可爾斯定理探討的頂點連線中點性質、和意外發現的共點性質。其中甚至有發現適用於**任意四邊形**的一般性質。

目前在我找到的資料中，對於四邊形的討論著墨極少，大部分的文獻內容都針對三角形的性質做討論。

壹、研究動機

我曾經在書上看過「拿破崙定理」(圖 0-0-1)，定理內容如下：

「對於任意三角形(ΔABC)，以其三邊長分別向外做正三角形，若連結三個正三角形之重心，則所得之三角形(ΔDEF)為正三角形。」

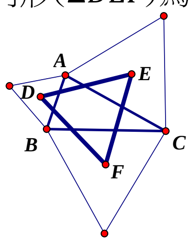


圖 0-0-1 拿破崙定理

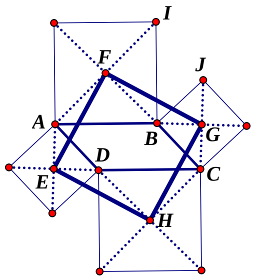


圖 0-0-2 平行四邊形外接正方形重心連線

另外，書中還提到一個和四邊形有關的推廣(圖 0-0-2)：

定理：若 ABCD 為平行四邊形，以其四邊長分別向外做正方形，連結四個正方形之重心，則所得之四邊形 EFGH 為正方形。

我認為這個題目應該還有更多推廣的空間，因此，就研究當改變不同條件時，圖形會有什麼不同的結果。恰好在國二下學期的數學課中有討論平行四邊形、等腰梯形、鳶形、菱形、矩形等特殊四邊形，因此我用到國二數學的三角形全等性質、三年級「圓」的概念，和一些高中簡易三角函數、複數、向量等概念來證明關於上述不同四邊形的推廣情形。

貳、研究目的

一、 探討不同種類的四邊形，外接不同的幾何圖形(如正方形、正三角形、相似三角形等)，依次連結其重心，觀察結果並試著加以證明。

二、 探討連接外接幾何圖形頂點連線之中點(類似愛可爾斯定理及非對稱性螺旋槳定理)，觀察其結果的變化並加以證明。

三、 以不同種類的四邊形，外接不同幾何圖形之後，再分別做其外接圓，觀察四個圓的交點所形成的四邊形種類並加以證明。

四、　探討以上三種情形，將「外接」改為「內接」幾何圖形之情形。
五、　探討以上三種情形中，原圖形及結果圖形的對角線相交之關係。
六、　觀察以上三種情形中內接、外接、原圖形面積之間的關係。

參、研究器材及設備

電腦、GSP 幾何繪圖軟體

肆、研究方法及過程

以下研究過程，我在圖形中所用頂點編號，以「ABCD」表示原圖形；「EFGH」表示外接結果圖形；以「IJKL」表示內接之結果(在同時內外接時)。其餘則以 OPQR...標示(若其中牽涉於座標，O 表示原點)。

一、　四邊形外接圖形重心連線

(一)外接正方形

定理一、(一)：在四邊形的四個邊，分別向外做正方形，依次連接四個正方形之重心，結果如下：

原圖形種類	平行四邊形	等腰梯形	鳶形	直角梯形
結果圖形	正方形	鳶形	等腰梯形	有一直角之四邊形

為了證明 EFGH 為正方形，除了四邊等長外，還必須證明其中有直角。而正方形的對角線交角也是直角，因此可利用「旋轉」的方法來證明。

證：令$\angle BCD = \alpha°$

則$\angle IBJ = 360° - (180 - \alpha)° - 2 \times 90° = \alpha° = \angle BCD$

$\Rightarrow \triangle AFE \cong \triangle BFG \cong \triangle CHG \cong \triangle EHA(SAS)$

$\Rightarrow \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$

又 $\triangle AFE \cong \triangle BFG \cong \triangle CHG \cong \triangle EHA$

故$\angle AFE = \angle BFG$、$\angle FGB = \angle HGC$、

$\angle CHG = \angle DHE$、$\angle DEB = \angle AEF$

$\Rightarrow$ 將$\overline{AF}$、$\overline{BF}$繞點 F 旋轉後可和$\overline{EF}$、$\overline{FG}$重合，$\angle EFG$ 為直角

$\Rightarrow$ EFGH 為**正方形**。

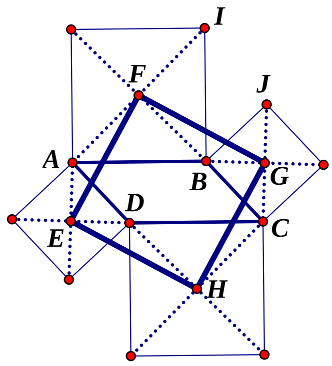


圖 1-1-1 平行四邊形外接正方形

接下來討論等腰梯形之情形，則連結四重心所得的四邊形為鳶形(有兩組鄰邊相等)

證：和平行四邊形的過程相似，可知

$\angle IBJ = \angle LCK = 180° - \angle ABC$

$\triangle BFE \cong \triangle CFG(SAS)$

因此，$\overline{FE} = \overline{FG}$
同理 $\Delta AHE \cong \Delta DHG(SAS)$
$\overline{HE} = \overline{HG}$
$\Longrightarrow$ EFGH 為**鳶形**。

由以上兩個證明，可發現其中的關鍵：

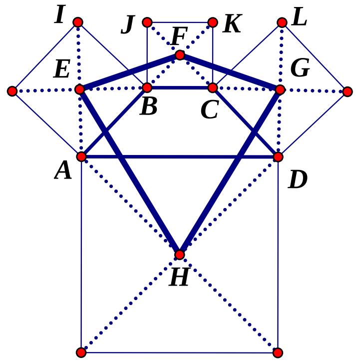


圖 1-1-2 等腰梯形外接正方形

性質一：多邊形外接正方形時，選定相鄰兩邊，所外接正方形的邊夾角與該多邊形的內角互補。

由此，用來證明接下來的鳶形：

證：由性質一，不難推出
$\Delta AEH \cong \Delta CFG(SAS)$
因此$\overline{EH} = \overline{FG}$
又此圖對稱圖形，以$\overline{BD}$為對稱軸
作$\overline{BD}$，垂直平分$\overline{EF}$、$\overline{GH}$。
(ΔBEF、ΔDGH 為等腰三角形)
$\overline{EF}$平行於$\overline{GH}$
$\Longrightarrow$ EFGH 為**等腰梯形**。

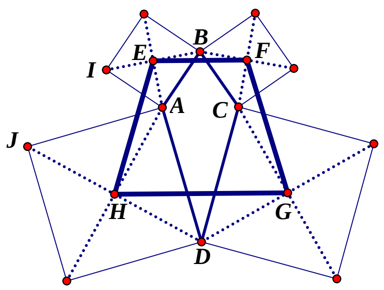


圖 1-1-3 鳶型外接正方形

最後，討論直角梯形(即有一組鄰角為直角者)。
證：$\angle FBE = \angle EAG = 90° + 45° + 45° = 180°$
$\Longrightarrow$ FBE、EAG 共線
又$\angle BEA = 90°$
故$\angle FEG$ 為**直角**。

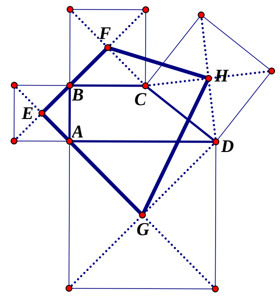


圖 1-1-4 直角梯形外接正方形

(二)外接正三角形

<table>
<tr><td colspan="6">定理一、(二)：在四邊形的四個邊，分別向外做正三角形，依次連接四個正三角形之重心，結果如下：</td></tr>
<tr><td>原圖形種類</td><td>平行四邊形</td><td>矩形</td><td>菱形</td><td>等腰梯形</td><td>鳶形</td></tr>
<tr><td>結果圖形</td><td>平行四邊形</td><td>菱形</td><td>矩形</td><td>鳶形</td><td>等腰梯形</td></tr>
</table>

我嘗試將定理一、(一)中外接的正方形換成正三角形。同樣由平行四邊形開始。
證明如下：

證：　$\angle EAH = \angle BAD + 2 \times 30°$
$= \angle BCD + 2 \times 30° = \angle FCG$
$\Longrightarrow \Delta AEH \cong \Delta CGF$
同理$\Delta DGH \cong \Delta BEF$
$\Longrightarrow$ EFGH 為**平行四邊形**。

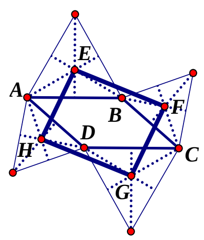


圖 1-2-1 平行四邊形外接正三角形

仿照先前的變化，發現等腰梯形和鳶形所得的結果與外接正方形時相同、證明過程亦十分相似；直角梯形未發現規律，因此這應該只是特例。

以下爲特殊平行四邊形(矩形、菱形)的圖示及證明：

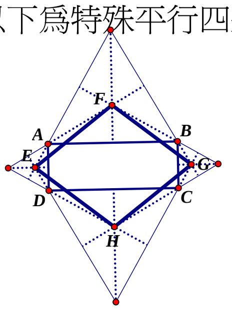


圖 1-2-2 矩形外接正三角形

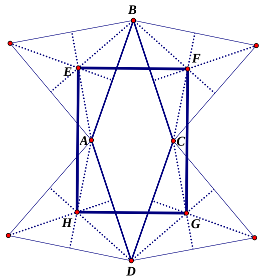
矩形(圖 1-2-2)：

證：$\angle EAF = \angle GBF = \angle GCH = \angle EDH = 150°$

$\Delta AEF \cong \Delta BGF \cong \Delta CGH \cong \Delta DEH(SAS)$

$\Rightarrow \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$

$\Longrightarrow$ EFGH 爲菱形。



菱形(圖 1-2-3)： 圖 1-2-3 菱形外接正三角形

證： 連$\overline{BD}$、$\overline{AC}$並延長。

$\Delta BFE \cong \Delta DGH$、$\Delta CFG \cong \Delta AEH$

$\Rightarrow \overline{EF} = \overline{GH}$、$\overline{FG} = \overline{HE}$

又ΔBFE、ΔDGH、ΔCFG、ΔAEH皆爲等腰Δ

故對角線爲其角平分線

$\overline{BD}$垂直平分$\overline{EF}$、$\overline{GH}$；$\overline{AC}$之延長線垂直平分$\overline{FG}$、$\overline{HE}$

ABCD 爲菱形，$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

EFGH 四腳皆爲直角、對邊相等，是一個**矩形**。

(三)外接正 n 邊形

定理一、(三)：在四邊形的四個邊，分別向外做正 n 邊形並連接其重心，結果如下：

原圖形種類	平行四邊形	矩形	菱形	等腰梯形	鳶形
結果圖形	平行四邊形	菱形	矩形	鳶形	等腰梯形

觀察(一)、(二)的結果，我猜測所有正 n 邊形的結果均和 n=3 時相同。但正 n 邊形有無限多種，無法一一證之，因此，我由(一)、(二)的證明過程，因正 n 邊形之重心至每個頂點的距離均相同，故可將「外接正 n 邊形連接重心」改爲「外接相似之等腰三角形連接頂點」， 當 $n = 3$，頂角 $= 120°$；當 $n = 4$，頂角 $= 90°$ ...

若邊數爲 n，頂角 $= \alpha°$，則 $n \times \alpha = 360°$等，問題就簡化許多了。證明如下：

證：因$\Delta AEB \sim \Delta BFC \sim \Delta CGD \sim \Delta DHA$，底角皆相等

故$\angle HAE = \angle FCG = 360° - \angle DAB - 2\angle HAD$；

$\angle HDG = \angle FBE = \angle ABC + 2\angle EBA$

又因平行四邊形對邊相等

$\Delta AEB \cong \Delta CGD$、$\Delta BFC \cong \Delta DHA$

$\Delta AHE \cong \Delta CFG$、$\Delta DHG \cong \Delta BFE(SAS)$

$\Rightarrow \overline{EF} = \overline{GH}$、$\overline{FG} = \overline{HE}$

$\Longrightarrow$ EFGH 爲**平行四邊形**。

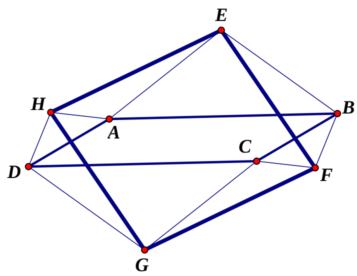


圖 1-3-1 平行四邊形外接相似等腰三角形

接下來的等腰梯形、鳶形、菱形、矩形，同樣也可用「相似之等腰三角形，其底角皆相等」之概念證明，但因證明方法與前面的正三角形雷同，因此我把它省略不寫。並且，在觀察結果後，我發現原圖形和結果之間有一種「**對偶**」的關係。

(四)內接正方形

定理一、(四)：在四邊形的四個邊，分別**向內**做正方形，依次連接四個正方形之重心，結果如下：

原圖形種類	平行四邊形	等腰梯形	鳶形	直角梯形
結果圖形	正方形	鳶形	等腰梯形	有一直角之四邊形

也就是，內、外接正方形結果大致相同

如果將正方形改爲**向內**做，圖 1-1-1 將變爲圖 1-4-1：

結果仍爲正方形。證明如下：

證：令$\angle BCD=\alpha°$

則$\angle FCG=2\times45°-\alpha°=(90-\alpha)°$

當 A、D、C 共線時，兩正方形一邊重合

固定 D 點，將 A 點繞 D 點旋轉$\alpha°$

(如此才可使$\angle ADC=(180-\alpha)°$)

$\Rightarrow\angle IDJ$ 亦爲 $\alpha°$，$\angle HDG=(90-\alpha)°$

同理$\angle HAE=\angle FBE=(90-\alpha)°$

$\Rightarrow\triangle FCG\cong\triangle HDG\cong\triangle HAE\cong\triangle FBE(SAS)$

$\Rightarrow\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}$

又因 $\triangle FCG\cong\triangle HDG\cong\triangle HAE\cong\triangle FBE$

故$\angle FGC=\angle HGD$、$\angle DHG=\angle AHE$、$\angle AEH=\angle BEF$、$\angle BFE=\angle CFG$

$\angle EFG=\angle FGH=\angle GHE=\angle HEF=90°$

$\Longrightarrow$ EFGH 爲**正方形**。

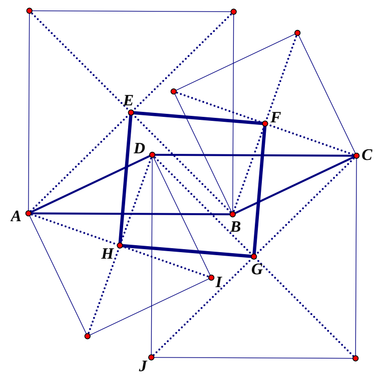
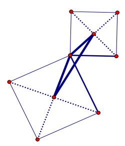


圖 1-4-1 平行四邊形內接正方形

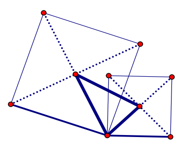
由此可見其實內、外接結果差異不大，只是其中用到的全等三角形兩邊所夾的角不同。因此，我出歸納性質二：

性質二：多邊形外接正方形時選定兩邊後外接正方形，設選定兩邊之夾角爲 $\alpha°$，則：
(1)$\alpha<180$ 時重心連線和兩正方形對角線所形成三角形，連線之對角爲$(\alpha+90)°$；
(2)$\alpha>180$ 時對角爲$(90-\alpha)°$

圖示如下：(1)



(2)



接下來是等腰梯形(圖 1-4-2)：

證：由性質二，得

$\triangle ECF\cong\triangle HDF$、 $\triangle AGH\cong\triangle BGE(SAS)$

($\alpha°$內接相當於$(360-\alpha)°$外接)

$\Rightarrow\overline{EF}=\overline{HF}$、$\overline{GH}=\overline{GE}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲一以$\overline{FG}$對稱、**兩組鄰邊相等的四邊形**。

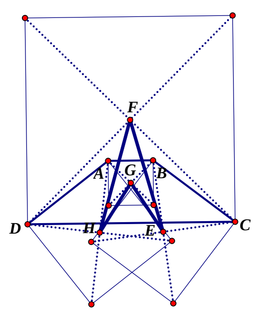


圖 1-4-2 等腰梯形內正方形

鳶形之證明方法同前，略。

(五)內接正 n 邊形

定理一、(五)：在四邊形的四個邊**內接**正 n 邊形，連接四個正 n 邊形之重心，結果與外接的情形相同。

模仿先前的經驗，向內做相似的等腰三角形，則四邊形爲平行四邊形的結果如下：

證：設$\angle ABC = \alpha°$、$\angle ABE = \beta°$

則$\angle EBF = \alpha - 2\beta = \angle GDH$、$\angle HAE = (180-\alpha)° - 2\beta° = \angle FCG$

$\overline{AB} = \overline{CD}$、$\Delta AEB \sim \Delta CGD$

$\Delta AEB \cong \Delta CGD$

$\overline{AE} = \overline{CG}$

同理$\overline{AH} = \overline{CF}$

$\Rightarrow \Delta AHE \cong \Delta CFG(SAS)$

$\overline{HE} = \overline{FG}$

同理$\overline{EF} = \overline{GH}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**平行四邊形**。

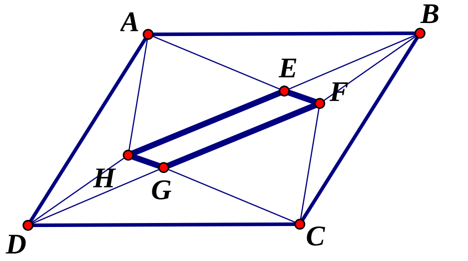


圖 1-5-1 平行四邊形內接相似等腰三角形

同理，可證明其他情形(圖略)。

(六)外接相似三角形

定理一、(六)：在四邊形的四個邊外接相似三角形，連接其頂點，結果如下("×"表示無發現)：

原圖形種類	平行四邊形	菱形	矩形	等腰梯形	鳶形
逆接之結果圖形	平行四邊形	矩形	×	×	等腰梯形
順接之結果圖形	平行四邊形	×	×	×	×

由(三)可發現外接正 n 邊形和外接相似的等腰三角形結果相同。如果繼續推廣至所有相似三角形呢？

在開始研究之前，必須分成兩種情況討論：

1. 逆接：四邊形每個頂點上所外接的角相同，如圖 1-6-1。
2. 順接：四邊形每個頂點上所外接的角不同，如圖 1-6-2。

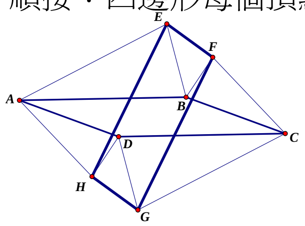


圖 1-6-1 逆接範例

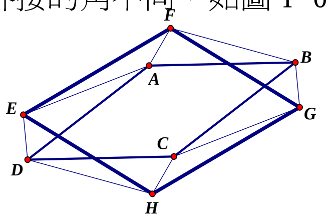


圖 1-6-2 順接範例

首先由平行四邊形向外逆接開始(圖 1-6-3)：

證：和前面的證明類似

容易得到$\Delta BEF \cong \Delta DGH$、$\Delta AHE \cong \Delta CFG$

$\Rightarrow \overline{EF} = \overline{GH}$、$\overline{HE} = \overline{FG}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**平行四邊形**。

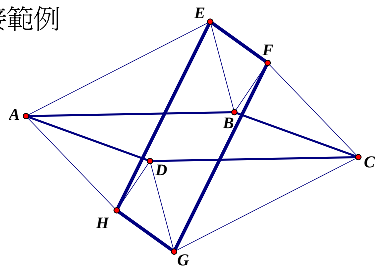


圖 1-6-3 平行四邊形向外逆接

等腰梯形無發現特別的性質(圖 1-6-4)；鳶形之結果仍爲等腰梯形(圖 1-6-5)：

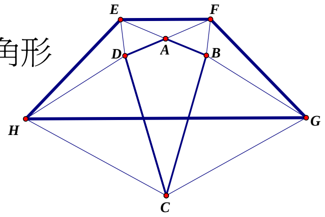
證：(圖 1-6-5)同上，容易得到

$\Delta DEH \cong \Delta BFG$；$\Delta AEF$、$\Delta CGH$ 皆爲等腰三角形

故$\overline{FG}=\overline{EH}$、$\overline{AC}$之延長線垂直平分$\overline{EF}$、$\overline{GH}$

$\Rightarrow\overline{EF}$平行於$\overline{GH}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**等腰梯形**。



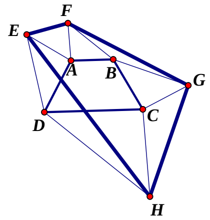


圖 1-6-5 鳶形向外逆接　圖 1-6-4 等腰梯形向外逆接

特殊平行四邊形(菱形、矩形)中，矩形向外逆接之結果(圖略)仍只是平行四邊形，無特殊性質；以下爲菱形(圖 1-6-6)之證明：

證：先前已證 EFGH 爲平行四邊形

連$\overline{AC}$、$\overline{BD}$並延長

因ΔAEF、ΔCGH、ΔDEH、ΔBFG 皆爲相似三角形

故$\overline{AC}$垂直平分$\overline{EF}$、$\overline{GH}$；$\overline{BD}$之延長線垂直平分$\overline{EH}$、$\overline{FG}$

又$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{EF}\perp\overline{FG}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**矩形**。

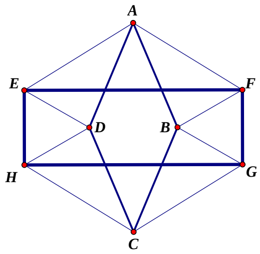


圖 1-6-6 菱形向外逆接

順接時僅平行四邊形之結果爲平行四邊形，其他無特殊發現，在此省略。

(七)內接相似三角形

相同地，此時也可討論向內接之情形。

證：複製先前的經驗

容易得到$\Delta BEF \cong \Delta DGH$、$\Delta AEH \cong \Delta CGF$

$\Rightarrow\overline{EF}=\overline{GH}$、$\overline{EH}=\overline{GF}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**平行四邊形**。

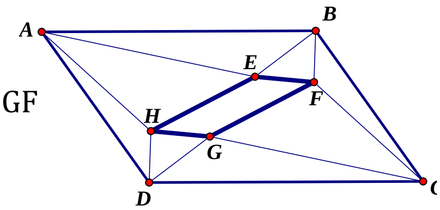


圖 1-7-1 平行四邊形向內逆接

其結果和向外順接時相同，等腰梯形內接時沒有特別的發現；鳶形內接時，原爲一「一組對邊相等、另一組對邊平行」之複雜四邊形，但若改變連接頂點的順序，同樣可得等腰梯形(在此省略)。

最後整理出下表的總結果(表中符合規律以”○”表示，否則以”×”表示)：

原圖形	平行四邊形	菱形	矩形	等腰梯形	鳶形
結果	平行四邊形	矩形	菱形	鳶形	等腰梯形
正 n 邊形 (即相似等腰三角形)	○ (n=4 時爲正方形)			○	○
相似三角形(逆)	○	○	×	×	○
相似三角形(順)	○	×	×	×	×
備註	1.相似等腰三角形中頂角(α)及 n 的轉換公式爲 n×α=360° 2.內、外接結果相同				

表 1 總結果

另外，例如外接相似之矩形可以相似等腰三角形解釋、平行四邊形可以相似三角形(討論順接、逆接)解釋、其他相似之凸多邊形，若重心在邊的中垂線上，則以相似等腰

三角形解釋，否則以相似三角形(討論順接、逆接)解釋……等。換言之，若已知外接之任何相似圖形重心是否在邊的中垂線上，經由上表都可得到結果。

二、　四邊形外接圖形之頂點連線中點

我從書上又看到兩個相似且有趣的定理，於是，試著做類似的探討(其中愛可爾斯定理和拿破崙定理有極大的關聯，且可以互相證明。)：

※**愛可爾斯定理**：平面上有兩個正三角形(ΔABC、ΔDEF)，逐一連接其頂點並取其連線之中點，三點所形成的三角形(ΔGHI)爲**正三角形**。	※**非對稱性螺旋槳定理**：三個全等的正三角形有一共同的頂點 O(狀似螺旋槳)，連接其相鄰的頂點後取連線之中點，所得三角形(ΔGHI)爲**正三角形**。

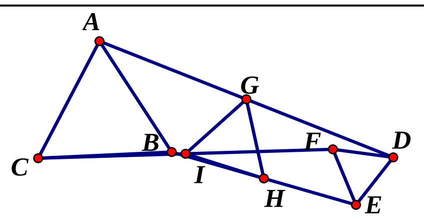


圖 2-0-1 愛可爾斯定理

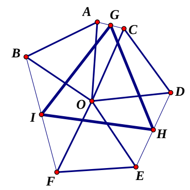


圖 2-0-2 非對稱性螺旋槳定理

(一)外接正方形

定理二、(一)：在四邊形的四個邊外接正方形後，連接頂點並取連線中點後所形成的四邊形結果如下：

原圖形種類	平行四邊形	等腰梯形	鳶形
結果圖形	正方形	等腰梯形	鳶形

同樣先由平行四邊形開始。如圖 2-1-1(因我無法用平面幾何來證明，所以我用解析幾何來證明。)：

證：以 ABCD 之對角線交點爲原點、x 軸平行於$\overline{AB}$

設$\overline{AB} = 2a$、$\overline{BC} = 2b$、$\angle ABC = \theta°$

可得$B(a + b\cos\theta, b\sin\theta)$

$\Rightarrow I(a + b\cos\theta, 2a + b\sin\theta)$、

$J(a + 2b\sin\theta + b\cos\theta, b\sin\theta - 2b\cos\theta)$

F 爲$\overline{IJ}$之中點，

$F(a + b\sin\theta + b\cos\theta, a + b\sin\theta - b\cos\theta)$

又$C(a - b\cos\theta, -b\sin\theta)$

$K(a + 2b\sin\theta - b\cos\theta, -b\sin\theta - 2b\cos\theta)$、

$L(a - b\cos\theta, -2a - b\sin\theta)$

$G(a + b\sin\theta - b\cos\theta, -a - b\sin\theta - b\cos\theta)$

同理可得 E、H 之座標。

$E(-a - b\sin\theta + b\cos\theta,\quad a + b\sin\theta + b\cos\theta)$

$F(\quad a + b\sin\theta + b\cos\theta,\quad a + b\sin\theta - b\cos\theta)$

$G(\quad a + b\sin\theta - b\cos\theta, -a - b\sin\theta - b\cos\theta)$

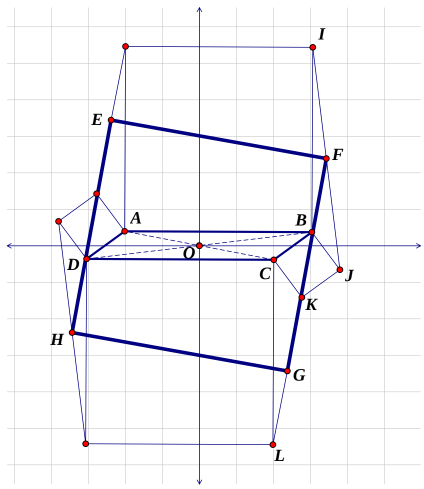


圖 2-1-1 平行四邊形外接正方形

$$H(-a - b\sin\theta - b\cos\theta, -a - b\sin\theta + b\cos\theta)$$

$$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \sqrt{(2a + 2b\sin\theta)^2 + 4b^2\cos^2\theta}$$

$$= 2\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin\theta}$$

$$= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BC}\sin\theta}$$

又$\overline{EF}$之斜率爲$\frac{-2b\cos\theta}{2a+2b\sin\theta}$、$\overline{FG}$之斜率爲$\frac{-2a-2b\sin\theta}{-2b\cos\theta}$，

兩者乘積爲(-1)，$\overline{EF} \perp \overline{FG}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**正方形**。

接下來的等腰梯形就比較簡單，可以用平面幾何來證明：

證：由性質一，$\Delta KLD \cong \Delta PQC$

$\Rightarrow \angle DKL = \angle CPQ$

$\Delta JKH \cong \Delta NPG$

同理$\angle EJH = \angle FNG$

$\Delta JEH \cong \Delta NFG$

$\overline{EH} = \overline{FG}$

又由對稱性

$\angle HEF = \angle EFG$、$\angle EHG = \angle FGH$

$\Rightarrow \angle HEF + \angle EHG = 180°$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**等腰梯形**。

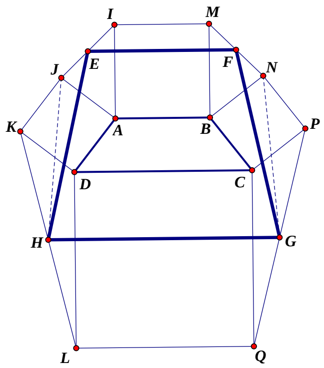


圖 2-1-2 等腰梯形外接正方形

鳶形的情況如下：

證：和先前類似

可先由$\Delta IEJ \cong \Delta KGL$(SAS)

得$\overline{EJ} = \overline{GL}$

再得$\Delta JEH \cong \Delta LGH$(SAS)

從而$\overline{EH} = \overline{GH}$

同理$\overline{EF} = \overline{GF}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**鳶形**。

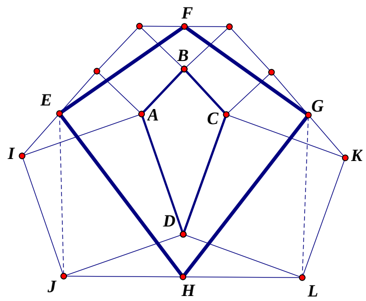


圖 2-1-3 鳶形外接正方形

(二)外接正 n 邊形

定理二、(二)：在四邊形的四個邊，分別作外接外接正 n 邊形後，連接頂點並取連線中點之結果如下(其中外接相似三角形中標示"x"者結果爲普通平行四邊形)

原圖形	平行四邊形	菱形	矩形	等腰梯形	鳶形
結果	平行四邊形	菱形	矩形	等腰梯形	鳶形
外接相似等腰三角形	○	○	○	○(矩形)	○(菱形)
外接相似三角形(逆)	○	○	×	×	○(菱形)
外接相似三角形(順)	○	×	×	×	×
外接相似等腰梯形	○	○	○	○	○
外接相似圓內接四邊形(逆)	○	○	×	×	○
外接相似圓內接四邊形(順)	○	×	×	×	×

(外接等腰直角三角形時結果爲正方形，適用於**任意四邊形**。)

仿照之前的證明方法，但因爲此種延伸可能會用到兩個頂點，故其情況較複雜，在 n 比 4 大時，會有連結頂點不同的問題。因此，我利用「正 n 邊形沿任一邊的中垂線對稱」及「正 n 邊形之重心到每一頂點距離相同」的性質，將其分爲以下幾種情況討論：

1. 兩條連線用到同一個頂點
   (1)此頂點在四邊形邊的中垂線上(即四邊形邊正對的頂點，只有 n 爲奇數時才有此情況)，此時變化爲外接相似的等腰三角形
   (2)其他非(1)的情況，外接相似三角形，但相似三角形不一定爲對稱圖形，故又有「順接」、「逆接」之分。
2. 兩條連線用不同頂點
   (1)對稱型：作相似之等腰梯形(四角相同、邊長成比例)
   (2)非對稱型：作相似之圓內接四邊形(外心爲所外接正 n 邊形之中心，因正 n 邊形各頂點至中心的距離相等，故作圓內接四邊形)，討論順接、逆接。

先由同一頂點開始：

平行四邊形之情況如圖 2-2-1：

證：在定理三中，已證$\Delta RAO \cong \Delta PCQ$、$\Delta BOP \cong \Delta DQR$

設$\angle AOR = \angle CQP = \alpha°$、$\angle BOP = \angle DQR = \beta°$

又$\Delta AOB \cong CQD$

因此$\angle EOF = \angle AOB + \alpha° - \beta°$

$= \angle CQD + \alpha° - \beta° = \angle GQH$

又因$\Delta RAO \cong \Delta PCQ$、$\Delta BOP \cong \Delta DQR$

故$\overline{RO} = \overline{PQ}$、$\overline{OP} = \overline{QR}$

$\Rightarrow \Delta OEF \cong \Delta QGH$

$\overline{EF} = \overline{GH}$

同理$\overline{FG} = \overline{HE}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**平行四邊形**。

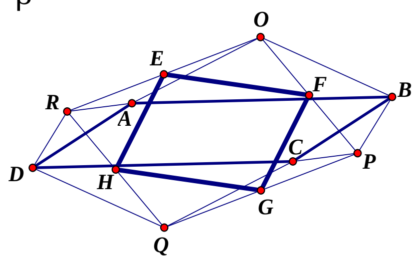


圖 2-2-1 平行四邊形外接相似等腰三角形

圖 2-2-2 為等腰梯形的圖形：

證：先前已證 OPQR 為鳶形

因此$\overline{OP}=\overline{PQ}$、$\overline{QR}=\overline{RO}$

$\Rightarrow \Delta EPF$、ΔHRG 為等腰三角形

$\overline{PR}$垂直平分$\overline{EF}$、$\overline{GH}$

$\overline{EF}$平行於$\overline{GH}$

又$\overline{PQ}:\overline{FQ}=\overline{RQ}:\overline{GQ}=2:1$、$\angle PQR=\angle FQG$

$\Rightarrow \overline{FG} /\!/ \overline{PR}$

同理$\overline{HE} /\!/ \overline{PR}$

$\Rightarrow$ EFGH 為**矩形**。

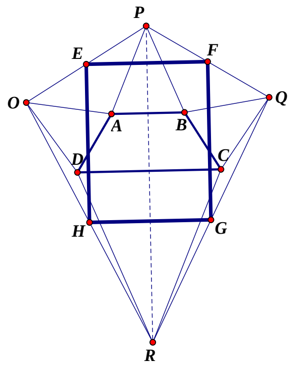


圖 2-2-2 等腰梯形外接相似等腰三角形

接著是鳶形(圖 2-2-3)：

證：先前已證 OPQR 為等腰梯形

E、G 平分$\overline{PQ}$、$\overline{RO}$

$\Rightarrow \overline{EG}$為 OPQR 之中位線

$\Rightarrow \overline{EG}$平行於$\overline{OP}$、平分$\overline{FH}$

又$\overline{FH}$垂直平分$\overline{RQ}$

$\Rightarrow \overline{EG}$、$\overline{FH}$互相垂直平分

$\Rightarrow$ EFGH 為菱形。

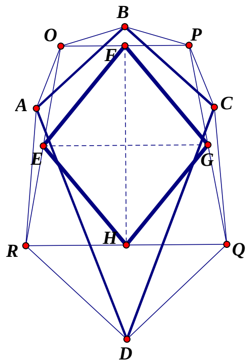


圖 2-2-3 鳶形外接相似等腰三角形

由以上幾點可見，此種情況的結果只是將定理一、(三)中「外接相似等腰三角形」所得的結果四邊形取中點後連接。後面的菱形、矩形在定理一、(三)中結果分別為矩形及菱形，而矩形屬於等腰梯形，結果為菱形；菱形屬於鳶形，結果為矩形(圖及證明略)。

除了上述規律外，我還發現了一個適用於**任意四邊形**的規律，內容如下：

對於任意四邊形，已其四邊長為斜邊，向外作等腰直角三角形，依次連接其頂點，則所得之四邊形必為一**正方形**。

觀察上述性質，發現這個性質是由第一種延伸中，外接正方形重心所得之結果再做一次四邊中點連線而得。證明如下：

證：設 $A(a,0)$、$B(b,c)$、$C(d,e)$

Q 點可以 BC 之中點 $M\left(\frac{b+d}{2},\frac{c+e}{2}\right)$為中心，將 $B(b,c)$旋轉 90°而得：

將$\overrightarrow{MB}$向量以座標表示為$\left(b-\frac{b+d}{2},c-\frac{c+e}{2}\right)=\left(\frac{b-d}{2},\frac{c-e}{2}\right)$

化為複數表示為$\left(\frac{b-d}{2}\right)+\left(\frac{c-e}{2}\right)i$

將此向量旋轉 90°

得$\overrightarrow{MQ}=\left(\left(\frac{b-d}{2}\right)+\left(\frac{c-e}{2}\right)i\right)\times(\cos 90°+i\sin 90°)$

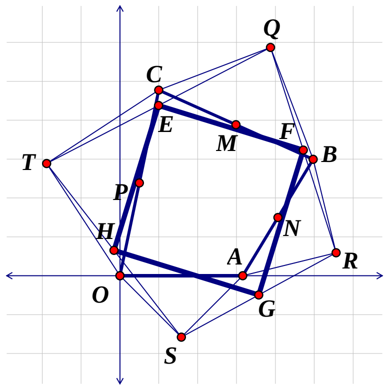
$$=\left(\left(\frac{b-d}{2}\right)+\left(\frac{c-e}{2}\right)i\right)\times i$$

$$=\left(\frac{-c+e}{2}+\left(\frac{b-d}{2}\right)i\right)$$

轉換回座標表示法，得$\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{-c+e}{2},\frac{b-d}{2}\right)$

最後推得 $Q(\frac{b-c+d+e}{2},\frac{b+c-d+e}{2})$

同理，得 R、S、T 之座標。



2-2-4 任意四邊形外接等腰直角三角形

QRST 之四點座標如下：

$Q(\frac{b-c+d+e}{2},\frac{b+c-d+e}{2})$、$R(\frac{a+b+c}{2},\frac{a-b+c}{2})$、$S(\frac{a}{2},\frac{-a}{2})$、$T(\frac{d-e}{2},\frac{d+e}{2})$

取其中點，得 EFGH 之座標：

$E(\frac{b-c+2d}{4},\frac{b+c+2e}{4})$、$F(\frac{a+2b+d+e}{4},\frac{a+2c-d+e}{4})$、$G(\frac{2a+b+c}{4},\frac{-b+c}{4})$、 $H(\frac{a+d-e}{4},\frac{-a+d+e}{4})$

得$\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}=\sqrt{(\frac{a+b+c-d+e}{4})^2+(\frac{a-b+c-d-e}{4})^2}$

又$\overline{EF}$之斜率爲$\dfrac{\frac{a-b+c-d-e}{4}}{\frac{a+b+c-d+e}{4}}=\dfrac{a-b+c-d-e}{a+b+c-d+e}$、$\overline{FG}$之斜率爲$\dfrac{-a-b-c+d-e}{a-b+c-d-e}$

兩者乘積爲(-1)，$\overline{EF}\perp\overline{FG}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**正方形**。

接下來是外接相似三角形的情形，同樣也是討論定理四中外接相似三角形的結果(包含順接、逆接)的中點連線。

證：已證 OPQR 爲平行四邊形

由此容易得到$\Delta OHE\cong\Delta QFG$

$\overline{HE}=\overline{FG}$

同理可得$\overline{EF}=\overline{GH}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**平行四邊形**。

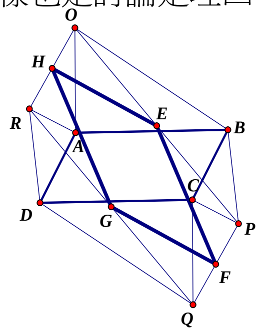


圖 2-2-5 平行四邊形逆接相似三角形

以下爲等腰梯形逆接的情形：

證：在 OPQR 中，似乎沒有規律，所以由任意四邊形著手

在 OPQR 中

E、F 爲$\overline{OP}$、$\overline{PQ}$之中點

$\Rightarrow\overline{EF}/\!/\overline{OQ}$、$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{OQ}$

同理$\overline{GH}/\!/\overline{OQ}$、$\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{OQ}$

故 EFGH 爲**平行四邊形**。

(即任意四邊形各邊中點連線所得之四邊形爲平行四邊形。)

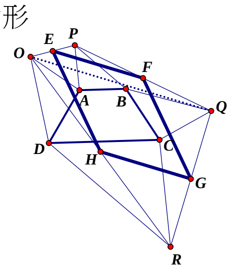


圖 2-2-6 等腰梯形逆接相似三角形

鳶形在定理一、(六)中逆接時結果爲爲等腰梯形，故結果應爲菱形，在此省略。

至於菱形和矩形，定理四中菱形向外逆接之結果爲矩形、矩形之結果爲平行四邊形，故在此菱形之結果應爲菱形；矩形之結果應仍爲平行四邊形，在此省略。

順接之情形於定理一、(六)的討論中，只有平行四邊形有發現規律，其他都沒有發現規律，由先前的證明可得結果應皆爲平行四邊形，圖及證明略。

接著是用不同頂點的情況，分爲對稱、逆接、順接三種情況討論：

先由對稱型開始(圖 2-2-7)：

證：$\angle JBM = 360° - \angle ABC - 2\angle JBA$

$= 360° - \angle ADC - 2\angle NDA$

$\Rightarrow \Delta JBM \cong \Delta LDN(SAS)$

$\angle BJM = \angle DLN$

$\Rightarrow \angle IJM = \angle KLN$、$\overline{JM} = \overline{LN}$

由此可得$\Delta IJF \cong \Delta KLH(SAS)$

同理$\angle EIA = \angle GKC$

$\Rightarrow \Delta EIF \cong \Delta GKH(SAS)$

$\overline{EF} = \overline{GH}$

同理可得$\overline{FG} = \overline{HE}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**平行四邊形**。

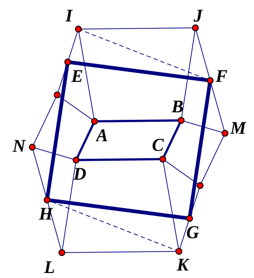


圖 2-2-7 平行四邊形外接相似等腰三角形

等腰梯形、鳶形之輔助線做法與證明方式與外接正方形時類似，在此省略。

以下爲菱形、矩形的情形：

矩形(圖 2-2-8)：

證：作$\overline{AB}$之中垂線，垂直平分$\overline{EF}$、$\overline{GH}$

作$\overline{BC}$之中垂線，垂直平分$\overline{FG}$、$\overline{HE}$

兩線垂直$\Rightarrow$ $\overline{EF} \perp \overline{FG}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**矩形**。

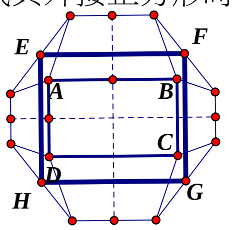


圖 2-2-8 矩形外接相似等腰梯形

菱形(圖 2-2-9)：

證：由圖中四條輔助線(虛線)

仿照先前的方法可得$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**菱形**。

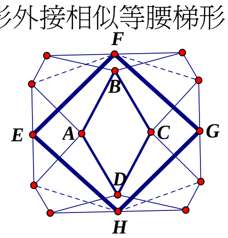


圖 2-2-9 菱形外接相似等腰梯形

接下來是非對稱型，平行四邊形逆接之情況如下：

證：和先前類似

可先由$\Delta EIJ \cong \Delta GKL(SAS)$

推得$\Delta FJE \cong \Delta FLG$

從而$\overline{EF} = \overline{GH}$

同理可得$\overline{FG} = \overline{HE}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**平行四邊形**。

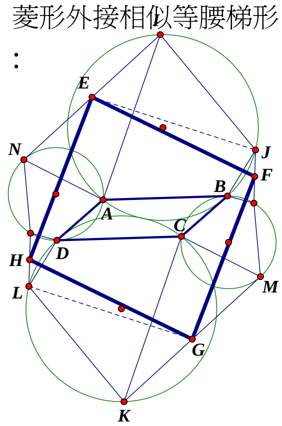


圖 2-2-10 平行四邊形逆接相似圓內接四邊形

其他輔助線作法與證明方法類似，故省略。

最後，整理出外接正 n 邊形的所有情況(同樣以”○”表示符合規律，否則以”×”表示)：

原圖形	平行四邊形	菱形	矩形	等腰梯形	鳶形
結果	平行四邊形	菱形	矩形	等腰梯形	鳶形
外接相似等腰三角形	○	○	○	○(矩形)	○(菱形)
外接相似三角形(逆)	○	○	×	×	○(菱形)
外接相似三角形(順)	○	×	×	×	×
外接相似等腰梯形	○	○	○	○	○
外接相似圓內接四邊形(逆)	○	○	×	×	○
外接相似圓內接四邊形(順)	○	×	×	×	×
備註	1. 外接相似三角形中標示”×”者結果爲普通平行四邊形。 2. 平行四邊形外接正方形(包含於相似等腰梯形)時結果爲正方形。 3. 外接等腰直角三角形(包含於相似相似等腰三角形)時結果爲**正方形，適用於任意四邊形**。				

觀察結果後發現其中有「**原圖形與結果相同**」的規律，且表中上半部「符合規律」與「不符合規律」之情形與上一章(重心連線)**完全相同**，觀察圖形後，我認爲此種規律和對稱性有極大的關聯。

(三)內接正方形

定理二、(三)：在四邊形的四個邊**向內**做正方形，連接頂點並取連線中點後所形成的四邊形結果如下：

原圖形種類	平行四邊形	等腰梯形	鳶形
結果圖形	正方形	等腰梯形	鳶形

也就是，向內接與向外接正方形（定理二、(一)）之結果相同。

接著討論從平行四邊形向內接正方形之情形：

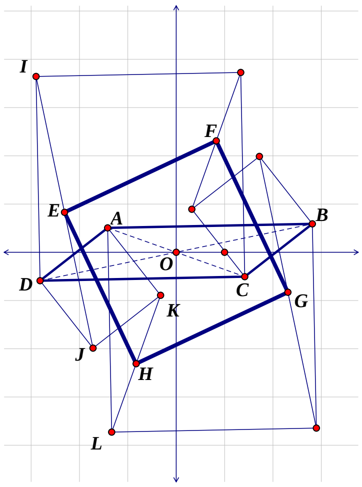


圖 2-3-1 平行四邊形內接正方形

證：同樣設$\overline{AB} = 2a$、$\overline{BC} = 2b$、$\angle ABC = \theta°$

由先前外接正方形之證明

可得 $D(-a - b\cos\theta, -b\sin\theta)$、$A(-a + b\cos\theta, b\sin\theta)$

$\Rightarrow I(-a - b\cos\theta, 2a - b\sin\theta)$、

$J(-a + 2b\sin\theta - b\cos\theta, -b\sin\theta - 2b\cos\theta)$

得$\overline{IJ}$之中點 $E(-a + b\sin\theta - b\cos\theta, a - b\sin\theta - b\cos\theta)$

再由 $K(-a + b\cos\theta + 2b\sin\theta, b\sin\theta - 2b\cos\theta)$、

$L(-a + b\cos\theta, -2a + b\sin\theta)$

得 $H(-a + b\sin\theta - b\cos\theta, -a + b\sin\theta - b\cos\theta)$

$\Rightarrow E(-a + b\sin\theta - b\cos\theta,\quad a - b\sin\theta - b\cos\theta)$

$F(\quad a - b\sin\theta - b\cos\theta,\quad a - b\sin\theta + b\cos\theta)$

$G(\quad a - b\sin\theta + b\cos\theta, -a + b\sin\theta + b\cos\theta)$

$H(-a + b\sin\theta + b\cos\theta, -a + b\sin\theta - b\cos\theta)$

$$\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}=2\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\theta}$$

$$=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\sin\theta}$$

又$\overline{EF}$之斜率爲$\frac{-2b\cos\theta}{-2a+2b\sin\theta}$

$\overline{FG}$之斜率爲$\frac{2a-2b\sin\theta}{-2b\cos\theta}$

兩者乘積爲(-1)，$\overline{EF}\perp\overline{GH}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**正方形**。

接著討論等腰梯形：

證：仿照外接時的想法

可先由性質二

得$\Delta AJK\cong\Delta BMN(SAS)$

$\angle AJH=\angle BMG$

$\Rightarrow\angle IJH=\angle LMG=\angle AJH-90°$

$\Rightarrow\Delta IJH\cong\Delta LMG(SAS)$

$\overline{IH}=\overline{LG}$、$\angle JIH=\angle MLG$

再由$\Delta DOI\cong\Delta CPF$

得$\overline{EH}=\overline{FG}$

同樣再由對稱性

$\overline{EF}$平形於$\overline{GH}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**等腰梯形**。

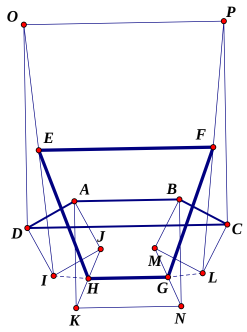


圖 2-3-2 等腰梯形內接正方形

鳶形內接時結過亦與外接大致相同，不過結果可能爲一有兩組鄰邊相等之四邊形；至於內接正 n 邊形，結果與外接相同，證明亦十分相似，在此皆省略。

三、 四邊形外接圖形之外接圓的交點

在拿破崙定理中，將所外接的三角形分別做外接圓，可得圖 3-0-1。此時三個外接圓會有一共同的交點(點 H)，且點 H 爲此圓之費馬點(即此點到ΔABC 三頂點的距離和最短)。

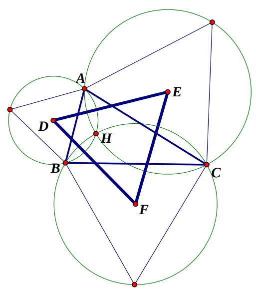


圖 3-0-1 三角形外接正三角形後作外接圓

(一)四邊形外接正方形外接圓交點連線

定理三、(一)：在四邊形的四個邊，分別向外做正方形後做外接圓，連接四圓之交點所形成的四邊形結果如下：

原圖形種類	平行四邊形	等腰梯形	鳶形
結果圖形	平行四邊形 (和原圖形**全等**)	等腰梯形	鳶形

我將此性質推廣至平行四邊形，圖形如圖 3-1-1：

證：顯然在$\angle ABC$ 爲直角時(ABCD 爲矩形)，因 P、B、Q 共線，故圓 P 及圓 Q 相切

此時 A、B、C、D 和 E、F、G、H 重合，因此不討論。

在定理一、(一)中，已證$\overline{OP} = \overline{PQ}$、$\overline{OP} \perp \overline{PQ}$

(OPQR 爲正方形)

等圓的半徑相等，可得$\overline{PE} = \overline{PB}$、$\overline{OE} = \overline{QB}$

$\Rightarrow \Delta OEP \cong \Delta QBP(SSS)$

$\Rightarrow \angle EPO = \angle BPQ$

又$\angle EPA = 2\angle EPO = 2\angle BPQ = \angle BPF$

$\Rightarrow$ 將ΔAPB 繞 P 點旋轉 $2\angle EPO$ 可得ΔEPF，$\overline{EF} = \overline{AB}$

同理可得$\overline{FG} = \overline{BC}$、$\overline{GH} = \overline{CD}$、$\overline{EH} = \overline{AD}$

另外$\Delta EPO \cong \Delta APO(SSS)$

$\Rightarrow \angle EOP = \angle OAP$

又由定理一、(一)的證明過程可得$\angle APO = 90° + \angle ABC$

再由先前「旋轉」的概念可知$\angle OEH$、$\angle PEF$ 皆爲 45°

$\Rightarrow \angle HEF = \angle ABC$

$\Rightarrow$ **EFGH $\cong$ ABCD**。

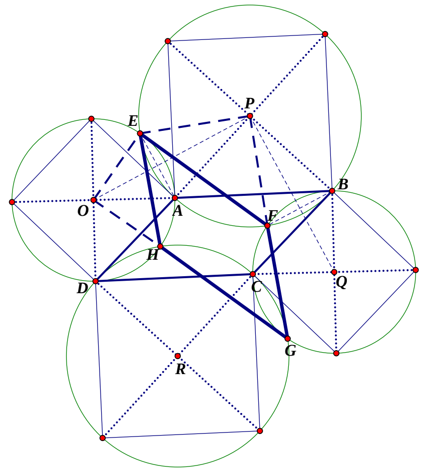


圖 3-1-1 平行四邊形外接正方形

以下爲等腰梯形的情況(圖 3-1-2)：

證：先前已證$\overline{OP} = \overline{PQ}$(OPQR 爲鳶形)

又$\overline{OE} = \overline{OB} = \overline{QF} = \overline{QC}$(圓 O 及圓 Q 爲等圓)

$\Rightarrow \Delta OEP \cong \Delta OBP \cong \Delta QFP \cong \Delta QCP(SSS)$

$\Rightarrow$ OEPB $\cong$ QFPC

$\Rightarrow \angle EOB = \angle FQC$

同理$\angle AOH = \angle GOD$

$\Rightarrow \angle EOH = 90° - \angle AOH + \angle EOB$

$= 90° - \angle GOD + \angle FQC = \angle FQG$

$\Rightarrow \Delta EOH \cong \Delta FQG(SAS)$

$\Rightarrow \overline{EH} = \overline{FG}$

又ΔPEF、ΔRHG 皆爲等腰三角形

$\Rightarrow \overline{PR}$之延長線垂直平分$\overline{EF}$、$\overline{GH}$

$\Rightarrow \overline{EF}$平行於$\overline{GH}$

$\Rightarrow$ EFGH 爲**等腰梯形**。

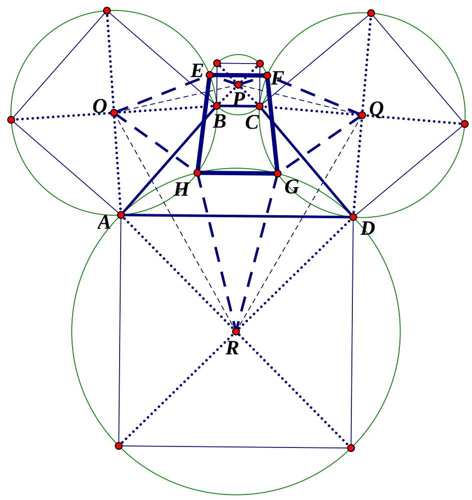


圖 3-1-2 等腰梯形外接正方形

接著是鳶形：

證：先前已證$\overline{OR} = \overline{PQ}$

使用和前兩個證明類似的方法

可得 AOHR $\cong$ CPFQ

另外$\overline{OB} = \overline{OE} = \overline{PB} = \overline{PE}$

⇒OBPE 爲菱形

$\Rightarrow \angle BOE = \angle BPE$

$\Rightarrow \angle HOE = \angle FPE$

$\Rightarrow \overline{HE} = \overline{EF}$(等角對等弦)

同理$\overline{HG} = \overline{FG}$

⇒ EFGH 爲**鳶形**。

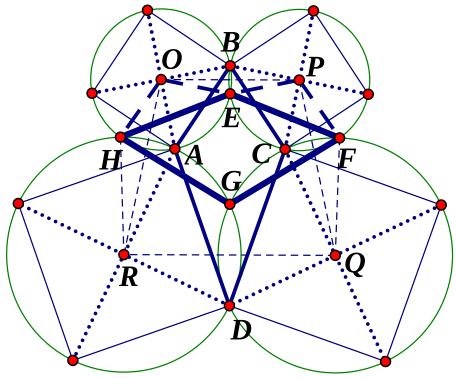


圖 3-1-3 鳶形外接正方形

(二)四邊形外接正 n 邊形外接圓交點連線

定理三、(二)：在四邊形的四個邊，向外做相似等腰三角形後以原圖形邊正對之頂點爲圓心、腰長爲半徑做圓，取四圓交點並連線後結果如下：

原圖形種類	平行四邊形	等腰梯形	鳶形
結果圖形	平行四邊形 (和原圖形**四角相等**)	等腰梯形	鳶形

仿照先前的推廣模式，變化爲「外接等腰三角形」，並以其頂角的頂點爲圓心、腰長爲半徑作圓，並取其交點做四邊形。

證：仿照先前的方法，容易得到

$QBPF \cong ODRH$

$\angle BPF = \angle DRH$、$\angle EPA = \angle GRC$

$\Delta PEF \cong \Delta RGH(SAS)$

$\overline{EF} = \overline{GH}$

同理$\overline{FG} = \overline{HE}$

⇒ EFGH 爲**平行四邊形**。

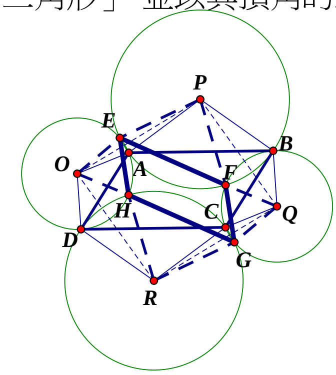


圖 3-2-1 平行四邊形外接相似等腰三角形

雖然我已經證明 EFGH 爲平行四邊形，但事實上 EFGH 應爲一和 ABCD 四角皆相等之平行四邊形(邊長不一定成比例)，此種性質我無法證明。

接著討論等腰梯形：

證：和先前類似，

由 $AOEP \cong BQFP$、$DOHR \cong CQGR$

得$\overline{EH} = \overline{FG}$

另外又 $AOEP \cong BQFP$

$\Delta OAP \cong \Delta QBP$

$\Delta OEH \cong \Delta QFG$

ΔPEF 爲等腰三角形

$\angle HEF = \angle GFE$

同理$\angle EHG = \angle FGH$

⇒ EFGH 爲**等腰梯形**。

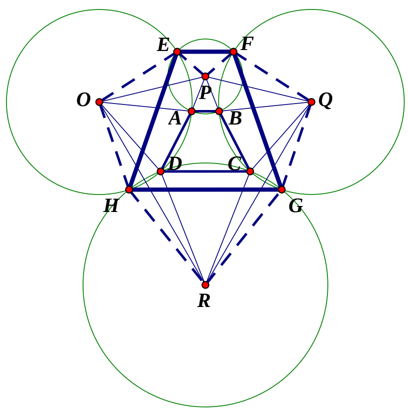


圖 3-2-2 等腰梯形外接相似等腰三角形

接著是鳶形：

證：由 AOER ≅ CPGQ，$\angle AOE = \angle CPG$
BOFP 爲菱形，對角相等
$\Rightarrow \Delta EOF \cong \Delta GOF$
$\overline{EF} = \overline{GF}$
同理$\overline{EH} = \overline{GH}$
$\Rightarrow$ EFGH 爲**鳶形**。

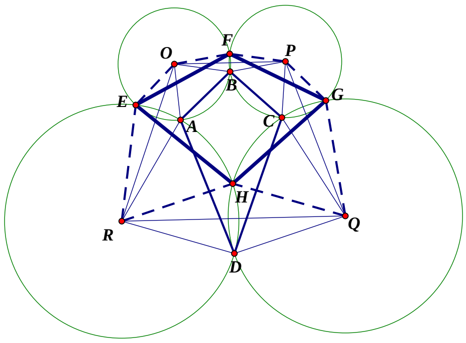


圖 3-2-3 鳶形外接相似等腰三角形

內接正方形及正 n 邊形之情形，我發現其結果與外接相同，證明亦相似，故省略。

另外，若外接四個相似三角形後分別作其外接圓並取交點連線之情形，因外心必在邊的中垂線上，故與外接相似等腰三角形時無異，結果也相同。

四、 以上幾點之對角線共點性質

我在思考上述定理時，會作一些輔助線以利證明，其中我想利用「正方形之對角線等長且互相垂直平分」的性質來證明結果爲正方形。雖然最後證明時並無用到此方法，但卻意外發現上述三種變化平行四邊形之結果圖形對角線交點皆和原圖形共點，因此，便開始研究其他圖形之對角線共點情形。

(一)第一種延伸之共點情形

定理四、(一)：第一種延伸中原圖形與結果圖形對角線共點情形如下(“○”表示四線共點、“△”表示三線共點、“×”表示無共點情形)：

原圖形種類	平行四邊形	等腰梯形	鳶形
外接正方形	○	△	○
外接相似等腰三角形	○	△	△
外接相似三角形(逆)	○	△	△
外接相似三角形(順)	○	△	×

證：同樣設$\overline{AB} = 2a$、$\overline{BC} = 2b$
對角線交點爲原點、$\angle ABC = \theta°$
由先前中所得 A、B、C、D 之座標
可得$\overline{AB}$之中點 $M(b\cos\theta, b\sin\theta)$
$\overline{CD}$之中點 $N(-b\cos\theta, -b\sin\theta)$
因此 $F((b\cos\theta, a + b\sin\theta)$
$H(-b\cos\theta, -a - b\sin\theta)$
得$\overline{FH}$之中點座標(即對角線交點)於 $O(0,0)$
$\Rightarrow$ **EFGH**、**ABCD**之對角線四線共點。

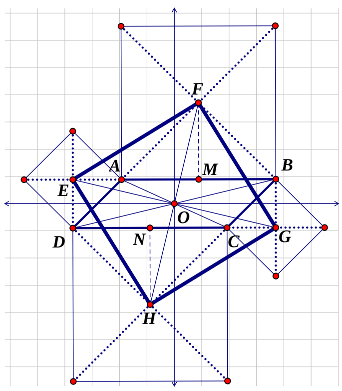


圖 4-1-1 平行四邊形外接正方形

接下來的等腰梯形無共點情形(圖 4-1-2)，但由對稱性可證出 EFGH 有一條對角線通過 ABCD 之對角線交點)，證明略。

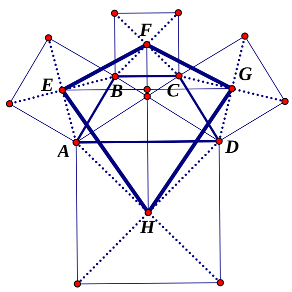


圖 4-1-2 等腰梯形外接正方形

鳶形的情況如圖 4-1-3：

證：設$\overline{BC} = 2a$、$\overline{CD} = 2b$、$\angle CBD = \alpha°$、$\angle CDB = \beta°$

以 ABCD 之兩條對角線爲兩軸，首先由$\angle DBC$與$\angle BCA$互餘

再由$\angle BCI = 90°$，得$\overline{IC}$與 x 軸所夾之角亦爲 $\alpha°$

故 $I(2a\sin\alpha + 2a\cos\alpha, 2a\sin\alpha)$，又 $B(0, 2a\cos\alpha)$

得$\overline{IB}$之中點 $F(a\sin\alpha + a\cos\alpha, a\sin\alpha + a\cos\alpha)$

同理得 $H(-b\sin\beta - b\cos\beta, -b\sin\beta - b\cos\beta)$

顯然$\overleftrightarrow{FH}$之直線方程式爲 $y = x$

同理 $E(-a\sin\alpha - a\cos\alpha, a\sin\alpha + a\cos\alpha)$、

$G(b\sin\beta + b\cos\beta, -b\sin\beta - b\cos\beta)$

$\overleftrightarrow{EG}$之直線方程式爲 $y = -x$

解聯立方程式$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$

得$(x, y) = (0,0)$

$\Rightarrow$ $\overline{EF}$、$\overline{GH}$之交點爲原點

$\Rightarrow$ EFGH、ABCD之對角線四線共點。

(此外，還可發現$\overline{\mathbf{EG}} \perp \overline{\mathbf{FH}}$)

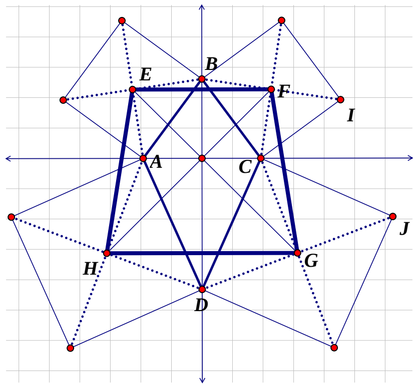


圖 4-1-3 鳶形外接正方形

接著討論外接相似等腰三角形(等腰梯形不再加以討論)，由平行四邊形開始：

證：座標軸之定法與先前相同

同樣設$\overline{AB} = 2a$、$\overline{BC} = 2b$

於此再設$\angle ABC = \alpha°$、$\angle EBM = \beta°$

先前已知$\overline{AB}$之中點 $M(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$

$\overline{CD}$之中點 $N(-b\cos\alpha, -b\sin\alpha)$

$\Rightarrow E(b\cos\alpha, b\sin\alpha + a\tan\beta)$

$G(-b\cos\alpha, -b\sin\alpha - a\tan\beta)$

$\overline{EG}$之中點爲$(0,0)$

$\Rightarrow$ EFGH、ABCD之對角線四線共點。

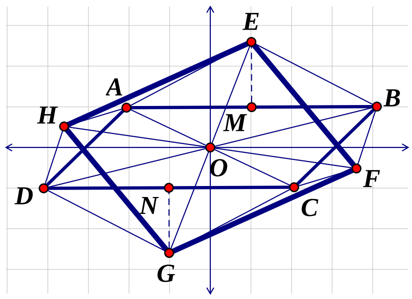


圖 4-1-4 平行四邊形外接相似等腰三角形

鳶形此時就沒有共點情形了(圖略)。

最後是平行四邊形外接相似三角形的情況。

先由逆接開始：

證：和先前類似

不同之處爲設$\angle EAI = \beta°$、$\overline{AE} = c$

得 $I(-a + b\cos\alpha + c\cos\beta, b\sin\alpha)$

$J(a - b\cos\alpha - c\cos\beta, -b\sin\alpha)$

$E(-a + b\cos\alpha + c\cos\beta,\ \ b\sin\alpha + c\sin\beta)$

$F(\ \ a - b\cos\alpha - c\cos\beta, -b\sin\alpha - c\sin\beta)$

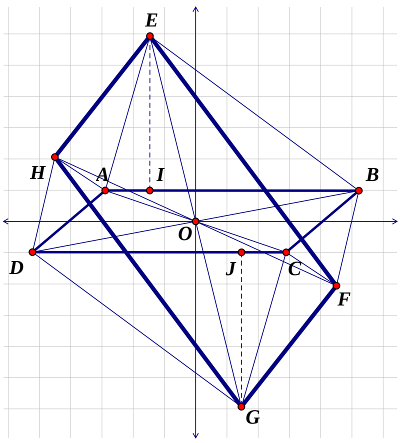


圖 4-1-5 平行四邊形向外逆接相似三角形

$\overline{EF}$之中點座標為(0,0)

⇒ **EFGH、ABCD之對角線四線共點**。

平行四邊形向外順接也有共點情形，但證明方式與逆接相同，故省略。

同樣討論內接的情形(圖 4-1-6)

(此時圖形較複雜，部分作圖痕跡省略。)：

證：座標軸之定法與外接時相同，邊長與角的代號亦然。

此時 $E(-a-b\cos\theta, a-b\sin\theta)$

$G(a+b\cos\theta, -a+b\sin\theta)$

得$\overline{EG}$之中點為 O(0,0)

⇒ **EFGH、ABCD之對角線四線共點**。

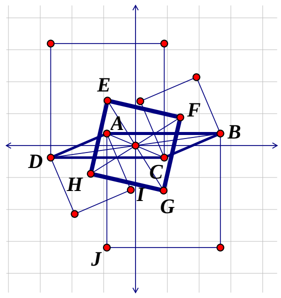


圖 4-1-6 平行四邊形內接正方形

鳶形內接正方形時，對角線共點及互相垂直之性質依然成立，證法同前，在此省略；平行四邊形內接相似等腰三角型、相似三角形時都有共點情形，鳶形則無，僅三線共點(可由對稱性證明)。其他三線共點之情形，僅歸納於表中，並未證明。

(二)第二種延伸之共點情形

定理四、(二)：第二種延伸中原圖形與結果圖形對角線共點情形如下表：

原圖形種類	平行四邊形	等腰梯形	鳶形
外接正方形	○	×	○
外接相似等腰三角形	○	×	△
外接相似三角形(逆)	○	×	△
外接相似三角形(順)	○	×	△
外接相似等腰梯形	○	×	△

在第二種延伸中，我本來就是以解析幾何證明，故此時可利用先前得到四點之座標：

證：原點、邊長和角之代號與第二種延伸相同

先前所得 EFGH 四頂點之座標：

$E(-a-b\sin\theta+b\cos\theta,\ \ a+b\sin\theta+b\cos\theta)$

$F(\ \ a+b\sin\theta+b\cos\theta,\ \ a+b\sin\theta-b\cos\theta)$

$G(\ \ a+b\sin\theta-b\cos\theta, -a-b\sin\theta-b\cos\theta)$

$H(-a-b\sin\theta-b\cos\theta, -a-b\sin\theta+b\cos\theta)$

得$\overline{EG}$之中點為 O(0,0)

⇒ **EFGH、ABCD之對角線四線共點**。

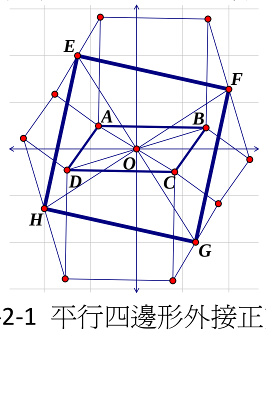


圖 4-2-1 平行四邊形外接正方形

接著的等腰梯形(圖 4-2-3)沒有共點情形；鳶形(圖 4-2-2)的證明如下：

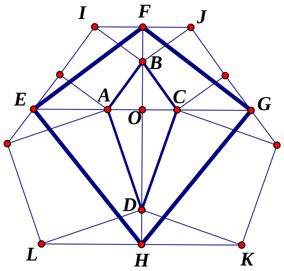


圖 4-2-2 鳶形外接正方形

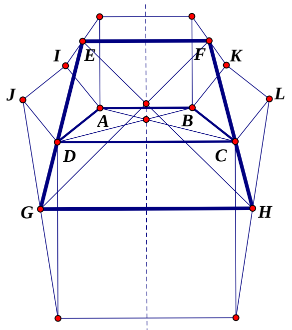


圖 4-2-3 等腰梯形外接正方形

證：由對稱性得

$\overline{AE} = \overline{CG}$

$\overline{BD}$垂直平分$\overline{AC}$、$\overline{EG}$於點 O

$\Rightarrow$ $\overline{BD}$爲$\overline{FH}$的一部分

$\Rightarrow$ **EFGH、ABCD之對角線四線共點**。

接著是外接相似三角形。觀察圖形可知，平行四邊形外接相似三角形(無論是順接、逆接）因先前已討論過平行四邊形外接相似三角形(無論是順接、逆接)頂點連線之結果皆爲平行四邊形，且其對角線皆與原圖形對角線四線共點。故此時只須證明「任意平行四邊形與其四邊中點連線所形成平行四邊形之四條對角線共點」即可。

以下爲此種情況之討論：

證：因 H、F 分別爲$\overline{AD}$、$\overline{BC}$之中點

$\overline{HF}$爲 ABCD 之中位線

$\Rightarrow$ $\overline{HF}$之中點爲 ABCD 之對角線交點

$\Rightarrow$ **EFGH、ABCD之對角線四線共點**。

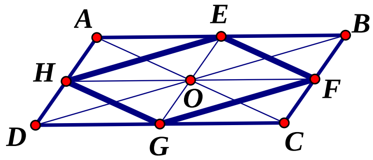


圖 4-2-4 平行四邊形四邊中點連線

鳶形此時無共點情形，但一樣有三線共點，圖略。

接下來是外接相似等腰梯形：

證：原圖形之假設同上

但此時設$\overline{IB} = ar$、$\overline{BJ} = br$、$\angle IBA = \beta°$

可得 $I(a + b\cos\alpha - ar\cos\beta\,, b\sin\alpha + ar\sin\beta)$

$J(a + b\cos\alpha - br\cos(\alpha+\beta)\,, b\sin\alpha - br\sin(\alpha+\beta))$

$K(-a - b\cos\alpha + ar\cos\beta\,, -b\sin\alpha - ar\sin\beta)$

$L(-a - b\cos\alpha + br\cos(\alpha+\beta)\,, -b\sin\alpha + br\sin(\alpha+\beta))$

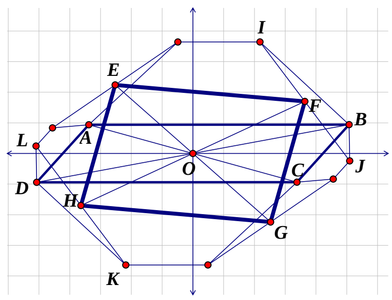


圖 4-2-5 平行四邊形外接等腰梯形

故 $F(a + b\cos\alpha - \frac{1}{2}(ar\cos\beta + br\cos(\alpha+\beta)), b\sin\alpha + \frac{1}{2}(ar\sin\beta - br\sin(\alpha+\beta)))$

$$H(-a - b\cos\alpha + \frac{1}{2}(ar\cos\beta + br\cos(\alpha+\beta)), -b\sin\alpha - \frac{1}{2}(ar\sin\beta + br\sin(\alpha+\beta)))$$

故 F、H 之中點於(0,0)

$\Rightarrow$ **EFGH、ABCD之對角線四線共點**。

鳶形無此情形，圖略；平行四邊形向外逆、順接相似圓內接四邊形亦有共點情形，但我未想到證明；內接的情形我尚未討論，但其結果應和外接時相同。

其他三線共點之情形也只歸納於表中，不另做證明。

(三)第三種延伸之情形

定理四、(三)：第三種延伸中之共點情形如下：

原圖形種類	平行四邊形	等腰梯形	鳶形
外接正方形	○	×	△
外接相似三角形	○	×	△

在第三種延伸中亦有發現共點情形，但因牽涉到圓方程式，在解析幾何中不易證明；我也未想出平面幾何之證明。以下僅歸納出不同圖形之共點情形，但無法加以證明。

外接正方形時僅平行四邊形有共點情形。

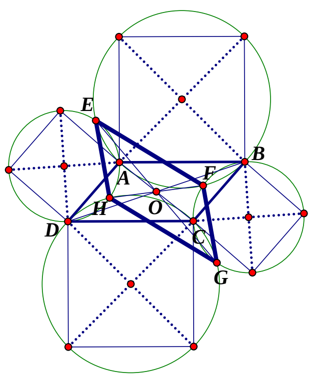


圖 4-3-1 平行四邊形外接正方形

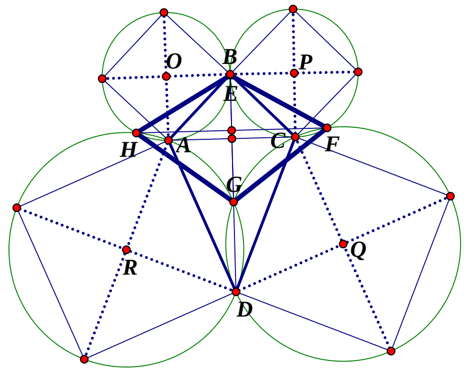


圖 4-3-2 鳶形外接正方形

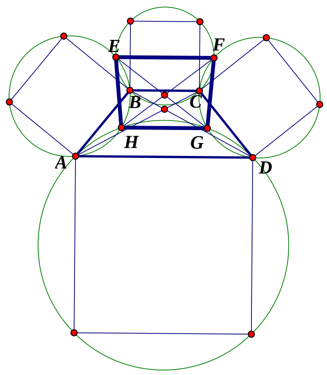


圖 4-3-3 等腰梯形外接正方形

外接相似等腰三角形時也只有平行四邊形有共點情形(圖略)。

五、 面積性質

書上提到了一個拿破崙定理中有關面積的討輪：

在拿破崙定理中，外接正三角形所得結果(ΔDEF)與內接正三角形所得結果(ΔGHI)之面積差恰為原三角形(ΔABC)之面積，

即$\boldsymbol{\Delta DEF - \Delta GHI = \Delta ABC}$。

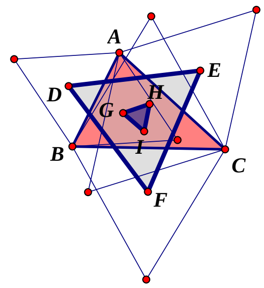


圖 5-0-1 拿破崙定理內外接

(一)第一種延伸之面積討論

定理五、(一)：任意四邊形內、外接底角為 α 之等腰三角形頂點連線之面積差於理想情況時為原圖形之$\boldsymbol{\sec^2\alpha}$**倍**。

先由平行四邊形開始：

證：用上述證明中所用的全等三角形，

設$\overline{AB} = a$、$\overline{BC} = b$、$\angle ABC = \alpha°$

使用餘弦定理可直接得到

EFGH 之面積為$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + ab\sin\alpha$、

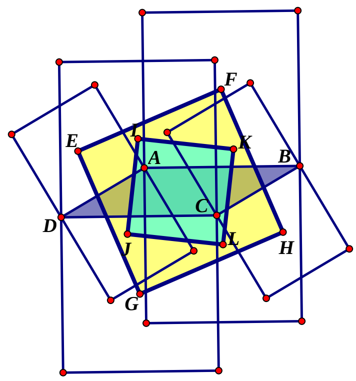


圖 5-1-1 平行四邊形內、外接正方形

IJKL 之面積為$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-ab\sin\alpha$，

兩者相減，得$2ab\sin\alpha$，恰為ABCD 面積之**兩倍**。

等腰梯形的證明如下：

證：設$\overline{AB}=2a$、$\overline{BC}=2b$、$\angle ADC=\alpha°$、以 ABCD 之中位線為x軸、$\overline{BC}$之中垂線為y軸，

則 ABCD 之四點座標(順時針)為：

$A(-a,b\sin\alpha)$

$B(\ \ a,b\sin\alpha)$

$C(\ \ a+2b\cos\alpha,-b\sin\alpha)$

$D(-a-2b\cos\alpha,-b\sin\alpha)$

外接之結果座標(順時針)為：

$E(-a-b\sin\alpha-b\cos\alpha,b\cos\alpha)$

$F(0,a+b\sin\alpha)$

$G(a+b\sin\alpha+b\cos\alpha,b\cos\alpha)$

$H(0,-a-b\sin\alpha-2b\cos\alpha)$

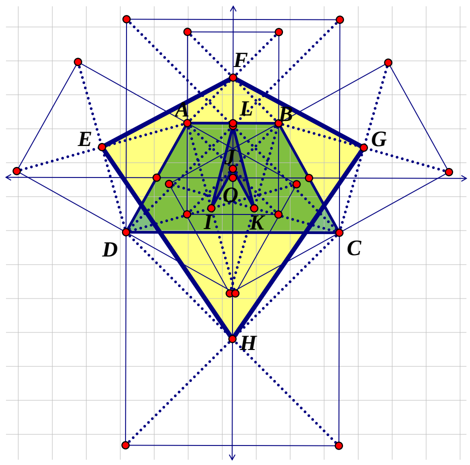


圖 5-1-2 等腰梯形內外接正形

內接之結果座標為(逆時針)為：

$I(\ \ a-b\sin\alpha+b\cos\alpha,-b\cos\alpha)$

$J(0,a-b\sin\alpha+2b\cos\alpha)$

$K(-a+b\sin\alpha-b\cos\alpha,-b\cos\alpha)$

$L(0,-a+b\sin\alpha)$

因結果圖形可能為凹四邊形，但凹四邊形無法用測量師公式計算面積，所以我利用對稱性，因圖形對 y 軸對稱，故可先利用測量師公式算其中一半三角形面積後再×2 即可。

ABCD 之面積為：

$(2a+2a+4b\cos\alpha)(2b\sin\alpha)\div 2$

$=4b\sin\alpha\,(a+b\cos\alpha)$

EFGH 之面積

$=2\times$ FHG 之面積

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a+b\sin\alpha+b\cos\alpha & 0 \\ a+b\sin\alpha & -a-b\sin\alpha-2b\cos\alpha & b\cos\alpha & a+b\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$=(a+b\sin\alpha+b\cos\alpha)(a+b\sin\alpha)$

$\qquad\qquad-(a+b\sin\alpha+b\cos\alpha)(-a-b\sin\alpha-2b\cos\alpha)$

$=2(a+b\sin\alpha+b\cos\alpha)^2$

IJKL 之面積

$= 2 \times \mathrm{LIK}$ 之面積

$$= \left|\begin{matrix} 0 & a - b\sin\alpha + b\cos\alpha & -a + b\sin\alpha - b\cos\alpha & 0 \\ -a + b\sin\alpha & -b\cos\alpha & -b\cos\alpha & -a + b\sin\alpha \end{matrix}\right|$$

$$= \quad (a - b\sin\alpha + b\cos\alpha)(-b\cos\alpha) + (-a + b\sin\alpha - b\cos\alpha)(-a + b\sin\alpha)$$
$$-(a - b\sin\alpha + b\cos\alpha)(-a + b\sin\alpha) - (-a + b\sin\alpha - b\cos\alpha)(-b\cos\alpha)$$

$$= 2(a - b\sin\alpha + b\cos\alpha)^2$$

內、外面積相減得：

$$2[(a + b\sin\alpha + b\cos\alpha)^2 - (a - b\sin\alpha + b\cos\alpha)^2]$$
$$= 2(2a + 2b\cos\alpha)(2b\sin\alpha)$$
$$= 2 \times 4b\sin\alpha\,(a + b\cos\alpha)$$

$= \mathbf{2} \times$ **原圖形之面積**

以下是有關鳶形之討論：

證：設在原圖形中，$\overline{AB} = 2a$、$\overline{BC} = 2b$、$\angle ABC = 2\alpha$、$\angle CDA = 2\beta$

以 ABCD 之對角線交點爲原點

可得原圖形之面積爲

$$2 \times \frac{1}{2} \times 2a \times 2b\sin(180° - \alpha - \beta)\ (\text{三角形面積公式})$$

$$= 4ab\sin(\alpha + \beta)$$

而外接結果之四個頂點座標爲

$E(-a\sin\alpha - a\cos\alpha,\ \ a\sin\alpha + a\cos\alpha)$

$F(\ \ a\sin\alpha + a\cos\alpha,\ \ a\sin\alpha + a\cos\alpha)$

$G(\ \ b\sin\beta + b\cos\beta, -b\sin\beta - b\cos\beta)$

$H(-b\sin\beta - b\cos\beta, -b\sin\beta - b\cos\beta)$

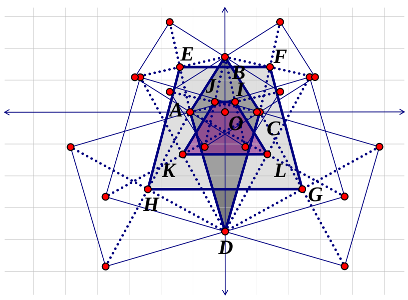


圖 5-1-3 鳶形內外接正方形

內接結果之四頂點座標爲

$I(-a\sin\alpha + a\cos\alpha, -a\sin\alpha + a\cos\alpha)$

$J(\ \ a\sin\alpha - a\cos\alpha, -a\sin\alpha + a\cos\alpha)$

$K(\ \ b\sin\beta - b\cos\beta,\ \ b\sin\beta - b\cos\beta)$

$L(-b\sin\beta + b\cos\beta,\ \ b\sin\beta - b\cos\beta)$

故外接結果之面積爲

$$\big((2a\sin\alpha + 2a\cos\alpha) + (2b\sin\beta + 2b\cos\beta)\big) \ldots\ldots (\text{上底} + \text{下底})$$

$$\times (a\sin\alpha + a\cos\alpha + b\sin\beta + b\cos\beta) \times \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (\times \text{高} \div 2)$$

化簡得$(a\sin\alpha + a\cos\alpha + b\sin\beta + b\cos\beta)^2$

同理得內接之面積：$(a\sin\alpha - a\cos\alpha + b\sin\beta - b\cos\beta)^2$

兩者相減得：

$$(2a\sin\beta + 2b\sin\beta) \times (2a\cos\alpha + 2b\cos\beta)$$

$= 4(a^2 \sin\alpha\cos\alpha + ab\sin\alpha\cos\beta + ab\sin\beta\cos\alpha + b^2\sin\beta\cos\beta)$

$= 4(a\sin\alpha\, a\cos\alpha + b\sin\beta\, b\cos\beta + ab\sin\alpha\cos\beta + ab\sin\beta\cos\alpha)$

又 $a\sin\alpha = b\sin\beta = \overline{OC}$、$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

故 $4(a\sin\alpha\, a\cos\alpha + b\sin\beta\, b\cos\beta + ab\sin\alpha\cos\beta + ab\sin\beta\cos\alpha)$

$= 4((ab\sin\alpha\cos\beta + ab\sin\beta\cos\alpha) + a\sin\alpha\, a\cos\alpha + b\sin\beta\, b\cos\beta)$

$= 4(ab\sin(\alpha+\beta) + b\sin\beta\, a\cos\alpha + a\sin\alpha\, b\cos\beta)$

$= 4(ab\sin(\alpha+\beta) + ab\sin\beta\cos\alpha + ab\sin\alpha\cos\beta)$

$= 2 \times 4ab\sin(\alpha+\beta)$

$= 2 \times$ 原圖形面積

我發現事實上規律還不只存在於特殊四邊形。任意四邊形(包含凹四邊形、凸四邊形、甚至複雜四邊形)內、外接正方形重心連線之面積差亦爲原圖形的 2 倍，討論如下：

在針對一般四邊形討論時，我發現如果嘗試用三角函數的方法來證明，情況會變得十分複雜。因此，我使用複數平面的旋轉性質，可以解決單純使用解析幾何的一些困難。

證：（爲避免圖形太過複雜，我將內接與外接分開討論）

設 $A(a,0)$、$B(b,c)$、$C(d,e)$

則 OABC 之面積爲：

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & a & b & d & 0 \\ 0 & 0 & c & e & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(ac + be - cd)$$

由先前第二種延伸所得 EFGH 之四點之座標：

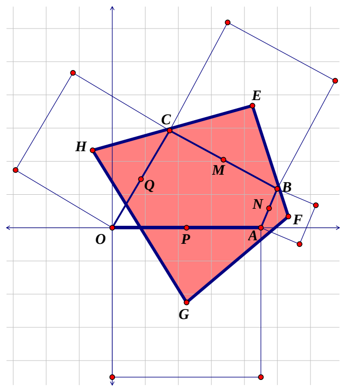


圖 5-1-4 任意四邊形外接正方形

$E(\frac{b-c+d+e}{2}, \frac{b+c-d+e}{2})$、$F(\frac{a+b+c}{2}, \frac{a-b+c}{2})$

$G(\frac{a}{2}, \frac{-a}{2})$、　　　　$H(\frac{d-e}{2}, \frac{d+e}{2})$

故 EFGH 面積爲

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{b-c+d+e}{2} & \frac{a+b+c}{2} & \frac{a}{2} & \frac{d-e}{2} & \frac{b-c+d+e}{2} \\ \frac{b+c-d+e}{2} & \frac{a-b+c}{2} & \frac{-a}{2} & \frac{d+e}{2} & \frac{b+c-d+e}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} (b-c+d+e) & (a+b+c) & a & (d-e) & (b-c+d+e) \\ (b+c-d+e) & (a-b+c) & (-a) & (d+e) & (b+c-d+e) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8}((b-c+d+e)(a-b+c) + (a+b+c)(-a) + a(d+e) + (d-e)(b+c-d+e)$$

$$-(b+c-d+e)(a+b+c) - a(a-b+c) - (-a)(d-e) - (d+e)(b-c+d+e))$$

化簡得$\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ac - 2ad + 2be - 2cd)$

接著討論內接：

同樣以旋轉的方式，計算 I、J、K、L 四點的座標：

$I\left(\frac{b+c+d-e}{2},\frac{-b+c+d+e}{2}\right)$、$J(\frac{a+b-c}{2},\frac{-a+b+c}{2})$

$K\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$、 $L\left(\frac{d+e}{2},\frac{-d+e}{2}\right)$

故 IJKL 面積爲

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{b+c+d-e}{2} & \frac{a+b-c}{2} & \frac{a}{2} & \frac{d+e}{2} & \frac{b+c+d-e}{2}\\ \frac{-b+c+d+e}{2} & \frac{-a+b+c}{2} & \frac{a}{2} & \frac{-d+e}{2} & \frac{-b+c+d+e}{2}\end{vmatrix}$$

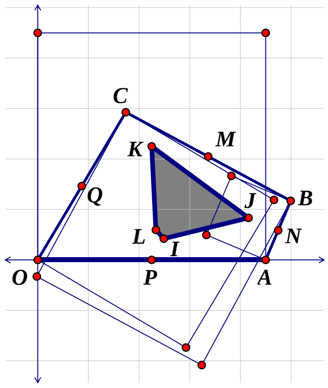


圖 5-1-5 任意四邊形內接正方形

$$=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}(b+c+d-e) & (a+b-c) & a & (d+e) & (b+c+d-e)\\ (-b+c+d+e) & (-a+b+c) & a & (-d+e) & (-b+c+d+e)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}((b+c+d-e)(-a+b+c)+a(a+b-c)+a(-d+e)+(d+e)(-b+c+d+e)$$

$$-(-b+c+d+e)(a+b-c)-a(-a+b+c)-a(d+e)-(-d+e)(b+c+d-e))$$

將其化簡得：$\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-2ac-2ad-2be+2cd)$

故內、外接面積差爲：

$$\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ac-2ad+2be-2cd)-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-2ac-2ad-2be+2cd)$$

即$2\times\frac{1}{2}(ac+be-cd)$，爲原面積之**兩倍**。

(以上證明是假設內、外接之結果均爲凸四邊形，且內、外接之結果圖形頂點順序爲一順時針、一逆時針才可成立，凹四邊形、複雜四邊形雖也有此性質，但以此證明無法說明。)

觀察外接正 n 邊形之情形，我稱當「內、外接之結果均爲凸四邊形，且內、外接之結果圖形頂點順序爲一順時針、一逆時針」時爲「理想情況」。在此情況下內、外接之面積差和原圖形面積的比值恆爲所外接之正 n 邊形中，任一頂點到重心的距離和邊長的一半之比值的平方，即**比值** $=\left(\frac{\mathbf{2\times 頂點到重心的距離}}{\mathbf{邊長}}\right)^{\mathbf{2}}$，用三角函數來表示，當外接正 n 邊形時，若比值爲 r，則$\mathbf{r=\sec^2\left(\frac{90°(n-2)}{n}\right)}$；若改爲內、外接相似等腰三角形，若底角爲 α，則公式爲$\mathbf{r=\sec^2\alpha}$。證明如下：

證：各點之代號與外接正方形相同，並假設等腰三角形底角爲 α

不同之處爲旋轉後再伸縮$\tan\alpha$倍。(爲使算式整潔，令$h=\tan\alpha$)

用與先前類似之方法，得外接結果 EFGH 之四點座標：

$E\left(\frac{(b+d)-(c-e)h}{2},\frac{(c+e)+(b-d)h}{2}\right)$

$F(\frac{a+b+ch}{2},\frac{c+(a-b)h}{2})$

$G\left(\frac{a}{2},\frac{-ah}{2}\right)$

$H(\frac{d-eh}{2},\frac{e+dh}{2})$

以測量師公式計算面積，得EFGH之面積：

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{(b+d)-(c-e)h}{2} & \frac{a+b+ch}{2} & \frac{a}{2} & \frac{d-eh}{2} & \frac{(b+d)-(c-e)h}{2}\\ \frac{(c+e)+(b-d)h}{2} & \frac{c+(a-b)h}{2} & \frac{-ah}{2} & \frac{e+dh}{2} & \frac{(c+e)+(b-d)h}{2}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{8}\begin{vmatrix}(b+d)-(c-e)h & a+b+ch & a & d-eh & (b+d)-(c-e)h\\ (c+e)+(b-d)h & c+(a-b) & -ah & e+dh & (c+e)+(b-d)h\end{vmatrix}$$

化簡得$\frac{1}{4}((ac+be-cd)+(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-2ad)h+(ac+be-cd)h^2$

同理得內接(IJKL)之四點座標：

$I\left(\frac{(b+d)+(c-e)h}{2},\frac{(c+e)-(b-d)h}{2}\right)$、$J(\frac{a+b-ch}{2},\frac{c-(a-b)h}{2})$

$K\left(\frac{a}{2},\frac{ah}{2}\right)$、$L(\frac{d+eh}{2},\frac{e-dh}{2})$

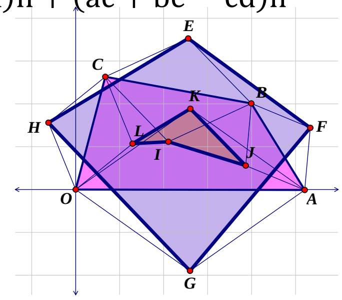


圖 5-1-6 任意四邊形內外接相似等腰三角形

同樣計算面積：

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{(b+d)+(c-e)h}{2} & \frac{a+b-ch}{2} & \frac{a}{2} & \frac{d+eh}{2} & \frac{(b+d)+(c-e)h}{2}\\ \frac{(c+e)-(b-d)h}{2} & \frac{c-(a-b)h}{2} & \frac{ah}{2} & \frac{e-dh}{2} & \frac{(c+e)-(b-d)h}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}(b+d)+(c-e)h & a+b-ch & a & d+eh & (b+d)+(c-e)h\\ (c+e)-(b-d)h & c-(a-b) & ah & e-dh & (c+e)-(b-d)h\end{vmatrix}$$

化簡得$\frac{1}{4}(-(ac+be-cd)+(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-2ad)h-(ac+be-cd)h^2$

故內、外接面積差爲：

$$\frac{1}{4}((ac+be-cd)+(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-2ad)h+(ac+be-cd)h^2$$

$$-\frac{1}{4}(-(ac+be-cd)+\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-2ad\right)h-(ac+be-cd)h^2$$

$$=\frac{1}{2}(ac+be-cd)+\frac{1}{2}(ac+be-cd)h^2$$

將其除以原圖形面積$\frac{1}{2}(ac+be-cd)$，

得 $1+\tan^2\alpha=\boldsymbol{\sec^2\alpha}$

在非理想狀況時，我發現部分凹四邊形、複雜四邊形也符合上述$r=\sec^2(\alpha)$之公式，且當其不符合公式時，比例**必定小於**用公式$r=\sec^2(\alpha)$所計算出的值。若以r'來表示實際上的比例、$r=\sec^2\alpha$，則$\boldsymbol{r'}\le\boldsymbol{r}$。

(二)第二種延伸之面積性質

在第二種延伸中，面積也有十分驚人的規律。同樣先從平行四邊形開始：

證：先前已推得內、外接結果之邊長(設$\angle ABC = \alpha°$)：

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BC} \sin \alpha}$$

$$\overline{IJ} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BC} \sin \alpha}$$

故其面積差爲$4\overline{AB} \times \overline{BC} \sin \alpha$

恰爲原圖形面積之**四倍**。

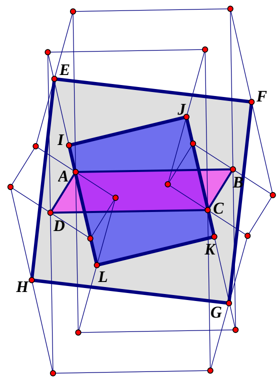


圖 5-2-1 平行四邊形內外接正方形

後來發現此種性質亦適用於任意四邊形。

仿照先前之延伸模式，先討論外接相似等腰三角形之情形，結果如下(α 爲其底角)：

n	α(度)	比例(r)
3	60	2
5	72	5.23607
7	$\frac{540}{7}$	10.09783
9	80	16.58172
11	$\frac{900}{11}$	24.68708
13	$\frac{1080}{13}$	34.41371

觀察右表之，可發現 α 與 r 之間的關係非線性，且 α 愈大，則其斜率愈大。而在正弦、餘弦、正切三種函數中，僅正切有此性質，經嘗試後發現 α 和 r 之間的關係式爲$r = \frac{\tan^2\alpha + 1}{2}$，即$r = \frac{\sec^2\alpha}{2}$。證明可利用先前外接相似等腰三角形時所得之頂點取中點後再計算面積。

其他非對稱、用兩個頂點之情形我尚未嘗試。

伍、結論

一、第一種延伸(重心連線)之結果如下(符合規律以”○”表示，否則以”×”表示)：

原圖形	平行四邊形	菱形	矩形	等腰梯形	鳶形
結果	平行四邊形	矩形	菱形	鳶形	等腰梯形
正 n 邊形 (即相似等腰三角形)	○ (n=4 時爲正方形)			○	○
相似三角形(逆)	○	○	×	×	○
相似三角形(順)	○	×	×	×	×
備註	1.相似等腰三角形中頂角(α)及 n 的轉換公式爲 n×α=360° 2.內、外接結果相同				

其中原圖形與結果圖形之間有**對偶**的規律

二、第二種延伸(頂點連線中點)之結果如下(符號同上)：

	原圖形	平行四邊形	菱形	矩形	等腰梯形	鳶形
	結果	平行四邊形	菱形	矩形	等腰梯形	鳶形
同一頂點	外接相似等腰三角形	○	○	○	○(矩形)	○(菱形)
	外接相似三角形(逆)	○	○	×	×	○(菱形)
	外接相似三角形(順)	○	×	×	×	×
不同頂點	外接相似等腰梯形	○ (外接正方形時結果爲正方形)	○	○	○	○
	外接相似圓內接四邊形(逆)	○	○	×	×	○
	外接相似圓內接四邊形(順)	○	×	×	×	×
	備註	1. 外接相似三角形中標示”×”者結果爲普通平行四邊形。 2. 平行四邊形外接正方形(包含於相似等腰梯形)時結果爲正方形。 3. 外接等腰直角三角形(包含於相似相似等腰三角形)時結果爲**正方形，適用於任意四邊形**。				

其中有**原圖形與結果相同**的規律

三、第三種延伸(外接圓交點)之，結果如下：

原圖形	平行四邊形	等腰梯形	鳶形
結果	四角相等之平行四邊形	等腰梯形	鳶形
正方形	○(全等)	○	○
相似三角形	○	○	○

四、第四種延伸，即對角線共點情形，其結果如下：

	原圖形	平行四邊形	等腰梯形	鳶形
第一種延伸	外接正方形	○	△	○
	外接相似等腰三角形	○	△	△
	外接相似三角形(逆)	○	△	△
	外接相似三角形(順)	○	△	×
第二種延伸	外接正方形	○	×	○
	外接相似等腰三角形	○	×	△
	外接相似三角形(逆)	○	×	△
	外接相似三角形(順)	○	×	△
	外接相似等腰梯形	○	×	△

(續)第三種延伸	外接正方形	○	×	△
	外接相似三角形	○	×	△

五、任意四邊形於理想狀態下內、外接底角為 α 之相似等腰三角形，連接頂點後得兩四邊形，兩者相減與原圖形面積之比值為$\boldsymbol{\sec^2\alpha}$；連接頂點後取中點則內、外接面積差則為原圖形之$\boldsymbol{\frac{\sec^2\alpha}{2}}$倍。

六、無論何種情形，在第一至第四種延伸中內、外接相同幾何圖形之結果**完全相同**(當外接結果為鳶形時，內接結果可能變成一兩鄰邊相等之凹四邊形；結果為等腰梯形時，內接結果可能會有「扭轉」之情形，但仍有一組對邊平行、一組對邊相等，基本上**性質不變**)。

七、歸納所有結果，我發現結果之「穩定度」 (即不同條件中出現"○"的頻率)為

平行四邊形(菱形＞矩形)＞鳶形＞等腰梯形；

八、關於上述之「穩定度」，我認為造成此結果之原因和**對稱性**有關。例如「鳶形逆接相似三角形」可使其成為線對稱圖形，故此時符合規律；但「等腰梯形逆接相似三角形」則否，故此時不符合規律。至於平行四邊形，因其總是對其對角線交點對稱(旋轉 180°)，而結果亦為平行四邊形，由第四種延伸可發現其結果與原圖形之對角線皆共點，故穩定度最高。

陸、討論與未來展望

一、證明第三種延伸中「平行四邊形外接相似三角形」時結果圖形與原圖形四角相等。

二、討論第二種延伸中非對稱及用兩個頂點等情況之面積性質。

三、證明第三種延伸之圓圖形與結果圖形之對角線共點性質。

四、找出上述各種使用非綜合幾何證明之情況之綜合幾何證明方法。

五、試圖向五邊形或立體圖形之情況推廣。

柒、參考資料

一、游森棚等編著。**高中數學課本 第三冊**。臺南市：翰林出版公司。

二、林福來等編撰。**高中幾何學 上冊**。臺南市：南一書局。

三、鮑龍、李慧君、許縵閣、孫福元編（1995）。**幾何第一冊**。臺北市：九章出版社。

四、鮑龍、李慧君、許縵閣編（1995）。**幾何第二冊**。臺北市：九章出版社。

五、黃家禮編著（1997）。**幾何明珠**。臺北市：九章出版社。

六、Martin Gardner 著（2004）。**打開魔數箱**。臺北市：遠流出版社。

【評語】030416

本作品將三角形的拿破崙定理、愛可爾斯定理和非對稱螺旋槳定理推廣到四邊形，此部分相當完整和嚴謹。不僅如此，最後還考慮原 4 邊形和結果 4 邊形對角線共點問題和內外結果四邊形面積差與原 4 邊形面積的比值問題,雖然沒有一般性的結果,已相當不錯。