作品名稱：從拼盤看費氏數列及費氏馬的捷徑

國中組　數學科　第三名

縣市：臺北縣

作者：　林漢維、吳岱潔

張育豪、蔡明翰

校名：臺北縣立福和國民中學

指導老師：　吳安振、劉睿琦

關鍵詞：費氏數列、拼盤、費氏馬的捷徑

從拼盤看費氏數列及費氏馬的捷徑

作者：林漢維、吳岱潔、張育豪、蔡明翰

指導老師：吳安振、劉睿琦

臺北縣立福和國民中學

壹、研究動機：

暑假時我們幾個同學想研究一些數學課外讀物，就向老師請教，老師建議我們去做比較有意義的學習，如製作科展，並提供一個方向—費氏數列，告訴我們：九大行星的距離、鸚鵡螺的螺旋角度，都和費氏數列有著微妙的關係呢！鼓勵我們費氏數列是一個大寶藏，只要花心思，很少會空手而回。於是開始展開我們研究的系列，蒐集往年科展資料，上網路查詢，到師大數學系圖書館翻閱雜誌，到書局翻書找靈感.... ，開始研究這一串神奇的數列。

貳、研究目的

(1) 研究費氏數列與楊輝三角形的關係

(2) 探討費氏數列的因數問題

(3) 思考費氏馬在無限棋盤上的捷徑

(4) 完整解決高中組科展『走馬步的奧秘』中馬步的最小步數

參、研究器材

人腦、電腦、紙、筆。

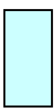
肆、研究過程：

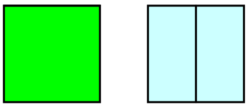
一、 所謂的費氏數列

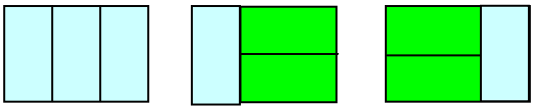
我們透過雅虎網站上網查詢有關費氏數列的資料，找到一篇有關費氏數列的初等遊戲，其中一個遊戲為：一個 2 ×n 棋盤用 1 ×2 矩形以既無間隙又不重疊的方式蓋住，那麼覆蓋的方法會有多少種呢？我們決定以此為基礎，進行研究。

首先我們懷疑這種覆蓋方式會不會存在？憑耀峰的“棋盤上的組合數學”中提及一個問題：給定一個 m ×n 的棋盤，能否用 1 ×2 矩形以“既無空隙 又不重疊”的方式蓋住？而這個問題的結論是：可完成這個覆蓋的必要條件是 **m、n 中至少有一個是偶數**。由於這個結論，顯然 2 ×n 棋盤都可以被 1 ×2 矩形以這種既無空隙又不重疊的方式覆蓋。那麼完成這個覆蓋共有多少種覆蓋方式呢？

設覆蓋方式有 a_n 種，觀察可覆蓋的圖形：

n＝1  $a_1=1$

n＝2  $a_2=2$

n＝3  $a_3=3$

由以上可知覆蓋的方式中只出現直立和橫放兩種情形，當 n＝4 時：

(1) **最左行爲直立的單一矩形時，剩下的 2×3 棋盤有** $a_3=3$ 種拼鋪方法

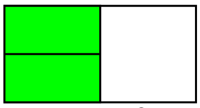
4

3

因此這類拼鋪共有 $a_3=3$ 種方法

(2) **最左行爲橫放並排的兩個矩形，剩下的 2×2 棋盤有** $a_2=2$ 種拼鋪方法

4



2

因此這類拼鋪共有 $a_2=2$

於是 $a_4=a_2+a_3$

繼續推廣下去得可得 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$

因此所求的覆蓋方法數依次爲 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 ,……, 竟然就是赫赫有名的**費氏數列**。

二、費氏數列與楊輝三角形

三、費氏數列的因數問題：

四、相鄰格點費氏馬最少步數

我們翻閱『世界數學名題欣賞—斐波那契數』書中 p147~p150 有一部份提到廣義馬問題，引起我們的興趣。象棋上馬走日，亦即馬可先橫走兩步再縱走一步，也可先橫走一步再縱走兩步，1 與 2 是相鄰的兩個費氏數列，我們把這種馬稍加推廣成費氏 (a_{n-1},a_n) 馬，它行走的方式爲可先向右橫走 a_n 步、再向上縱走 a_{n-1} 步，我們稱爲費氏 (a_{n-1},a_n) 橫馬向右上方走一步；也可先向右橫走 a_{n-1} 步、再向上縱走 a_n 步，我們稱爲費氏 (a_{n-1},a_n) 直馬向右上方走一步

問題 1 ：在無限棋盤上哪些費氏 (a_{n-1},a_n) 馬可以走遍每一個點？

無限棋盤上當費氏 (a_{n-1},a_n) 馬可以走遍每一個點時，**相鄰兩費氏數** a_{n-1}、a_n **必須互質且爲一奇一偶**。

問題 2： 象棋棋盤上馬要走到相鄰格點最少需要 3 步，在無限棋盤上，費氏 (a_{n-1},a_n) 馬最少要走多少步才能走到相鄰的點呢？

（1）先令費氏(a_{n-1},a_n)直馬向右上走a_{n-2}步到達$(a_{n-1}a_{n-2},a_na_{n-2})$；

（2）再令費氏(a_{n-1},a_n)橫馬向左下走a_{n-3}步到達

$$(a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-3}a_n,\ a_na_{n-2}-a_{n-1}a_{n-3})=(1,\ a_na_{n-2}-a_{n-1}a_{n-3})$$

（3）再令費氏(a_{n-1},a_n)橫馬右下及左下方向各跳a_{n-2}步，最後會到達

$(1,\ a_na_{n-2}-a_{n-1}a_{n-3}-2a_{n-1}a_{n-2})=(1,-a_na_{n-3})$位置。

（4）再令費氏(a_{n-1},a_n)直馬右上及左上方向各跳$\dfrac{a_{n-3}}{2}$步，最後會到達

$(1,-a_na_{n-3}+a_na_{n-3})=(1,0)$位置。

此時費氏馬共走

$$a_{n-2}+a_{n-3}+2a_{n-2}+a_{n-3}=a_{n-2}+2a_{n-1}=a_n+a_{n-1}=a_{n+1}\text{步}$$

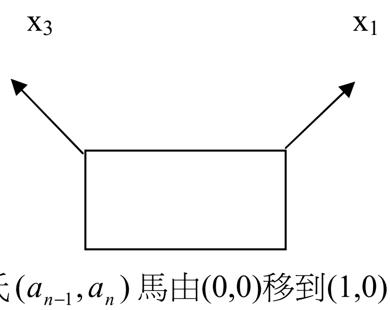
問題 3：a_{n+1}是否爲最少步數呢？，

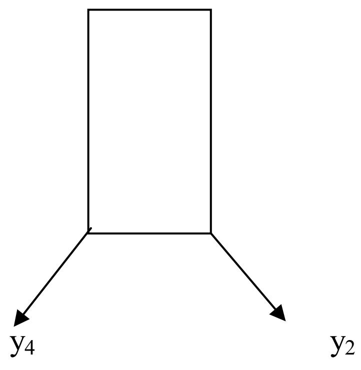
（1）我們觀察費氏(a_{n-1},a_n)馬由(0,0)移到(1,0)的整個歷程，最小步數與馬步移動的順序無關，因此可設：橫馬向右上移動 x_1 步，向右下共移動 x_2 步，向左上移動 x_3 步，向左下共移動 x_4 步；

直馬向右上移動 y_1 步向右下移動 y_2 步；直馬向左上移動 y_3 步，向左下移動 y_4 步。

（2）因爲橫馬向右上，左下移動會互相抵消，向右下，左上移動會互相抵消，直馬也一樣，因此最小步數的歷程中 x_1、 x_4 有一個會爲 0， x_2、x_3 有一個會爲 0，y_1、 y_4 有一個會爲 0， y_2、y_3 有一個會爲 0。

CASE1 若出現 $x_2=x_4=0$， $y_1=y_3=0$ 的情形，且$x_1\ge x_3$時，$y_4\ge y_2$





此時費氏(a_{n-1},a_n)馬由(0,0)移到(1,0)， 故

$$(x_1-x_3)a_n-(y_4-y_2)a_{n-1}=1,\qquad (y_2+y_4)a_n=(x_1+x_3)a_{n-1}$$

因 a_n 和 a_{n-1} 互質，由第二個方程式知爲

$y_2+y_4=ta_{n-1}\ge a_{n-1}$， $x_1+x_3=ta_n\ge a_n$，想要馬步總和 $x_1+x_3+y_4+y_2$ 最小，必須 $y_2+y_4=a_{n-1}$， $x_1+x_3=a_n$ 且不定方程式

$(x_1-x_3)a_n-(y_4-y_2)a_{n-1}=1,$ 有解，因

$$1=a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=a_n(a_{n-1}+a_{n-2})-a_{n-1}(a_n+a_{n-1})=a_na_{n-2}-a_{n-1}^2$$

可取 $x_1-x_3=a_{n-2}$, $y_4-y_2=a_{n-1}$

解之得

$$x_1=\frac{a_n+a_{n-2}}{2}=a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{2},\quad x_3=\frac{a_n-a_{n-2}}{2}=\frac{a_{n-1}}{2},$$

$$y_2=a_{n-1},\quad y_4=0$$

因此只要 a_{n-1} 為偶數，a_n 為奇數時，費氏 (a_{n-1},a_n) 馬可以利用 $a_n+a_{n-1}=a_{n+1}$ 次移動就可由(0,0)移到(1,0)。

而其移動的方式為

（1）橫馬右上移動 x_1-x_3=a_{n-2} 步，直馬左下移動 y_2-y_4=a_{n-1} 步。

（2）橫馬右上左上各移動 $x_3=\dfrac{a_{n-1}}{2}$ 次

CASE2 若出現 $x_2=x_4=0$， $y_1=y_3=0$ 的情形， 且 $x_1<x_3$ 時，$y_4<y_2$

與 CASE1 類似故省略

因此只要 a_n 為偶數，a_{n-1} 為奇數時，a_{n-3} 為偶數，不定方程式 $(y_2-y_4)a_{n-1}-(x_3-x_1)a_n=1$, 有整數解，費氏 (a_{n-1},a_n) 馬可以利用 $a_n+a_{n-1}=a_{n+1}$ 次移動就可由(0,0)移到(1,0)。而其移動的方式為

（1）橫馬右上移動 x_3-x_1=a_{n-3} 步，直馬左下移動 y_2-y_4=a_{n-2} 步。

（2）橫馬右上左上各移動 $x_1=a_{n-2}$ 次

（3）直馬右下左下各移動 $y_4=\dfrac{a_{n-3}}{2}$ 次

CASE3 其他情形，

費氏 (a_{n-1},a_n) 馬由(0,0)移到(1,0)至少要移動 a_{n+1} 次以上才可辦到。我們以 $x_2=x_4=0,y_3=y_4=0$ 為例來說明。因費氏 (a_{n-1},a_n) 馬由(0,0)移到(1,0)， 故

$$(x_1-x_3)a_n-(y_2+y_1)a_{n-1}=1\quad,(x_1+x_3)a_{n-1}=(y_2-y_1)a_n\ ,$$

因 a_n 和 a_{n-1} 互質，由第二個方程式知 $y_2-y_1=ta_{n-1}\ge a_{n-1}$, $x_1+x_3=ta_n\ge a_n$，

因此馬步總和

$$x_1+x_3+y_1+y_2=(x_1+x_2)+(y_2-y_1)+2y_1\ge a_n+a_{n-1}+2y_1\ge a_{n+1}$$

因此我們證明了費氏 (a_{n-1},a_n) 馬由(0,0)到(1,0)最少需走 $a_n+a_{n-1}=a_{n+1}$ 步。

五、費氏馬的捷徑

底下我們將相鄰格點問題，推廣到一般格點，找出費氏 (a_{n-1},a_n) 馬由原點到鄰近各格點的最少步數。

(一)費氏 (a_{n-1},a_n) 馬的最少步數表

首先我們利用土法煉鋼法則，直接找出費氏(a_{n-1},a_n)馬由原點到鄰近各格點的最少步數表(附錄一)

(二)問題：能否找出一個規律，求出費氏(a_{n-1},a_n)馬由原點出發到達格點(m,n)的最少步數 f(m,n)

觀察費氏(2,3)-馬的最少步數表，發現最少步數 f(m,n)具有下列**對稱**性質：

（1） f(m,n)=f(n,m)

（2）f(-m,n)=f(m,n)

（3）f(m,-n)=f(m,n)

利用對稱性質我們可限制討論的範圍爲

m≥n≥0

(三)平移問題 (先觀察一些現象)：

當 c>d≥0 時 $f((c,d)+(ta_n,ta_{n-1}))=f(c,d)+t$ 何時會成立？

（1）在討論範圍內，向右前進的橫馬走得最快，從(0,0)開始將費氏(2,3)馬向右推進，我們可得一個最短路徑的**樹狀圖**，顯然樹狀圖上每一個頂點都會滿足平移法則。

（2）在給定垂直直線，最快到達此直線上的某格點(k,b)的最少步數恰爲不定方程式 2x+3y = k 的整數解中滿足 $|x|+|y|$ 爲最小的正整數，此時 b 可由$|x|$個 3 和$|y|$個 2 加減運算後所得的非負整數，例如當 k = 10 時，2×2 + 3×2 = 10，最快到達直線 x = 10 的最少步數爲 2 + 2 = 4，可四步到達的格點爲可由 2 個 3 和 2 個 2 加減運算後所得的非負整數，計有 3-3+2-2=0, 3+3-2-2=2, 3-3+2+2=4, 3+3+2-2=6, 3+3+2+2=10 共有(10,0)，(10,2)，(10,4)，(10,6)，(10,10)等五點，以這些新基準點爲根點出發，同樣可造出最短路徑的樹狀圖，因此從原點最快到達直線 x=k 上的所有格點(k,b) 都會滿足平移法則。

（3）並非所有的格點均滿足平移法則，由費氏(2,3)-馬的最少步數表發現下列各點不能爲最短路徑的樹狀圖的根點，稱之爲**盲點**，這些點不滿足平移法則：f(1,0)=5, f(2,0)=4, f(3,0)=5, f(5,0)=5, f(7,0)=5, f(11,0)=7,
f(3,1)=4, f(6,1)=5, f(2,2)=4, f(4,2)=4, f(5,2)=5, f(8,2)=6,
f(3,3)=6, f(9,3)=6, f(5,4)=5, f(8,4)=6, f(6,5)=5, (11,6)=7,
f(7,7)=6, f(8,8)=6。

(四)橫馬區$0\le n\le\frac{2m}{3}$內 f(m,n)的計算法則：

（1）觀察 f(p,0)前面 m=0,1,2,…,13 各項之值依次爲

0,5,4,5,2,5,2,5,4,5,4,7,4,5,6,7,6,7,6,7,8,9,8,9,8,9,10,11,10,11

後面 p≥14 各項之值出現比較規律的數列，偶數項自第 14 項起出現三個三個一組的情形

6,6,6; 8,8,8;10,10,10;……

奇數項自第 15 項起出現三個三個一組的情形

7,7,7; 9,9,9;11,11,11;……

（1）偶數項第 18 項爲 6，第 24 項爲 8，第 30 項爲 10，其規律爲當 k≥3 時

f(6k,0)=2k，

又 6k 的前 2 項和前 4 項與第 6k 項相同，因此

$$f(6k,0)=f(6k-2,0)=f(6k-4,0)=2k$$

因此當 p≥14 爲偶數時，

$$f(\mathrm{p},0)=2\times\left[\frac{\mathrm{p}+4}{6}\right]$$

（2）奇數項第 19 項爲 7，第 25 項爲 9，第 31 項爲 11，其規律爲當 k≥3 時

f(6k+1,0)=2k+1，

又 6k+1 的前 2 項和前 4 項與第 6k+1 項相同，因此

$$f(6k+1,0)=f(6k-1,0)=f(6k-3,0)=2k+1$$

因此當 p ≥15 爲奇數時，

$$f(\mathrm{p},0)=2\times\left[\frac{\mathrm{p}+3}{6}\right]+1$$

2）觀察 f(p,1)前面 p =0,1,2,…,12 各項之值依次爲

5,2,3,4,3,2,5,4,3,4,5,4,5,6,5,6,7,6,7,8,7,8,9,8,9,10,9,10,11,10

後面各項之值出現比較規律的數列，偶數項自第 10 項起出現三個三個一組的情形 5,5,5; 7,7,7; 9,9,9;……

奇數項自第 13 項起出現三個三個一組的情形 6,6,6; 8,8,8;10,10,10;……

（1）觀察成組偶數項的中間項，第 12 項爲 5 第 18 項爲 7，第 24 項爲 9，….

其規律爲當 k≥2 時 f(6k,1)=2k+1，

又 6k 的前 2 項和後 2 項與第 6k 項相同，因此

f(6k,1)=f(6k-2,1)=f(6k+2,1)=2k+1

因此當 p ≥10 爲偶數時，

$$f(\mathrm{p},1)=2\left[\frac{\mathrm{p}+2}{6}\right]+1$$

（3）觀察成組奇數項的首項，第 13 項爲 6，第 19 項爲 8，第 25 項爲 10,…
其規律爲當 k≥3 時 f(6k+1,0)=2k+2，

又 6k+1 的後 2 項和後 4 項與第 6k+1 項相同，因此

f(6k+1,1)=f(6k+3,1)=f(6k+5,1)=2k+2

因此當 p ≥13 爲奇數時，

$$f(\mathrm{p},1)=2\left[\frac{\mathrm{p}}{6}\right]+2$$

因此當 $0 \le n \le \frac{2m}{3}$ 時，我們可得下面**計算 f(m,n)的法則**：任給定一個格點 (m,n)，m≥12，從此點開始採用橫馬快速返回方式，最後會出現三種情形，
（1）回到格點(p,0)
（2）回到格點(p,1)
（3）掉入盲點。

根據上述觀察，當 $0 \le n \le \frac{2m}{3}$ ，我們可以導出以下兩種方式的計算法則：

方式一 （i）若 n 爲偶數回到格點(p,0) 且 $\mathrm{p}=m-3\times\frac{n}{2}$ 爲不等於 2 的偶數時，則

$$f(m,n)=f(\mathrm{p},0)+\frac{n}{2}=2\times[\frac{\mathrm{p}+4}{6}]+\frac{n}{2}=2\times[\frac{2m-3n+8}{12}]+\frac{n}{2}$$

（ii）若 n 爲偶數回到格點(p,0)且 $\mathrm{p}=m-3\times\frac{n}{2}$ 爲奇數 p ≠1,3,5,7,11 時，

則 $f(m,n)=f(\mathrm{p},0)+\frac{n}{2}=2\times[\frac{\mathrm{p}+3}{6}]+1+\frac{n}{2}=2\times[\frac{2m-3n+6}{12}]+\frac{n}{2}+1$

方式二 （i）若 n 爲奇數回到格點(p,1)，且 $\mathrm{p}=m-3\times\frac{(n-1)}{2}$ 爲偶數 p ≠2,6 時，

則 $f(m,n)=f(k,1)+\frac{n-1}{2}=2\times[\frac{k+2}{6}]+1+\frac{n-1}{2}=2\times[\frac{2m-3n+7}{12}]+\frac{n+1}{2}$

（ii）若 n 爲奇數回到格點(p,1)，且 $\mathrm{p}=m-3\times\frac{(n-1)}{2}$ 爲奇數 p ≠3 時，則

$$f(m,n)=f(\mathrm{p},1)+\frac{n-1}{2}=2\times[\frac{\mathrm{p}}{6}]+2+\frac{n-1}{2}=2\times[\frac{2m-3n+3}{12}]+\frac{n+3}{2}$$

方式三　掉入盲點

上述這些例外的 p 值，對應的格點(m,n)，利用橫馬往左下方快速返回時會遇到平移問題(３)所提到的盲點，此時 f(m,n)可利用到達盲點前的格點

做爲基準 2 點，再利用平移公式求得。不過這種計算方式很麻煩，我們想到另一種方法：重新定義有問題的 f(k,0),f(k,1)，再用平移公式求得。 重新定義後的值爲： f(1,0) = 1, f(2,0) = 2, f(3,0) = 3, f(5,0) = 3, f(7,0) = 3, f(11,0) = 5,
f(3,1) = 2, f(6,1) = 3。

例 計算 f(19,12)之值

利用盲點：f(19,12) = f(4×(3,2))+f(7,4)=4+3=7

重新定義 f(1,0) =1。得到 f(19,12)=f(6 ×(3,2))+f(1,0) = 6+1 =7

重新定義有問題的後，這些新定義的值除了 f(2,1)之外，會滿足 f(m,0),f(m,1)的通式，因此當 m 大於且 $0 \le n < \frac{2}{3}(m-\frac{1}{2})$, 即$0 \le 3n < 2m-1$時，計算 f(m,n)可利用橫馬往左下方快速返回到 f(p,0)或 f(p,1)，直接套用方式一或方式二的公式也可正確求出 f(m,n)的值，亦即方式一或方式二的公式適用於所有的 (m,n), m≥12。例如 m=19,n=12 時 p =19-18=1 爲奇數，由方式一（ii）得知

$$f(19,12) = 2\times[\frac{2m-3n+6}{12}]+\frac{n}{2}+1 = 2\times[\frac{38-36+6}{12}]+\frac{12}{2}+1 = 7$$

至於例外的情形，.即 $n \ge \frac{2}{3}(m-\frac{1}{2})$，會滿足底下直橫馬交錯區的公式。

(五)直橫馬交錯區 $\frac{3}{2}(m+\frac{1}{2}) \ge n \ge \frac{2}{3}(m-\frac{1}{2})$ 內 f(m,n)的計算法則：

觀察圖表對角線附近區域，即滿足 $\frac{3}{2}(m+\frac{1}{2}) \ge n \ge \frac{2}{3}(m-\frac{1}{2})$ 的直橫馬交錯區，在此區域的格點(m,n)若滿足 m + n ≥ 17 時，f(m,n)爲一個與 m+n 有關的常數，因此我們只需求出代表格點 f(p,p)和 f(p+1,p)之值即可。

（1）觀察 f(p,p)前面 p = 0,1,2,…,8 各項之值依次爲

0,2,4,6,4,2,4,6,6

後面 p≥9 各項之值出現比較規律的數列

6,4,6,6,6 ; 8,6,8,8,8 ; 10,8,10,10,10;…

觀察各組的第二項：第 10 項爲 4，第 15 項爲 6，第 20 項爲 8，…. 其規律爲當 k≥2 時 f(5k,5k)=2k。

又此組的其他各項都比第二項大 2，由此可得

f(5k-1,5k-1)=f(5k+1,5k+1)= f(5k+2,5k+2)= f(5k+3,fk+3)=2k+2

因此當 p≥9, 且 p+1 不爲 5 的倍數時，$f(p,p) = 2\left[\frac{p+1}{5}\right]+2$

p+1 爲 5 的倍數時，$f(p,p) = 2\times\frac{p}{5}$

（2）觀察 f(p＋1,p)前面 m=0,1,2,…7 各項之值依次爲

5,3,1,3, 5,5,5,3；

後面 p≥9 各項出現比較規律的數列

5,5,5,7,5 ；7,7,7,9,7； 9,9,9,11,9；….

觀察各組的第四項，第 12 項爲 7，第 17 項爲 9，第 22 項爲 11，…. 其規律爲當 k≥2 時 f(5k＋2,5k+1)=2k+3。

又此組的其他各項都比第二項小 2，由此可得

f(5k-1,5k-2)=f(5k,5k-1)= f(5k+1,5k)= f(5k+3,fk+2)=2k+1

因此當 p≥9, 且 p-2 爲 5 的倍數時， $f(p+1,p)=2\times\frac{p-1}{5}+3$

p-2 不爲 5 的倍數時， $f(p+1,p)=2\left[\frac{p+2}{5}\right]+1$

因此我們可以導出下面結果：當格點 (m,n) 滿足 $\frac{3}{2}(m+\frac{1}{2})\ge n\ge\frac{2}{3}(m-\frac{1}{2})$ 且 m+n≥17 時

（1）m+n 爲偶數, 且爲 10 的倍數時

$$f(m,n)=f(\frac{m+n}{2},\frac{m+n}{2})=\frac{m+n}{5}$$

（2）m+n 爲偶數 2s, 且 2s 不爲 10 的倍數時

$$f(m,n)=f(s,s)=2[\frac{s+1}{5}]+2=2\times[\frac{m+n+2}{10}]+2$$

（3）m+n 爲奇數 2s+1, 且 s-1 爲 5 的倍數時

$$f(m,n)=f(s+1,s)=2\times\frac{s-1}{5}+3=\frac{m+n+12}{5}$$

（4）m+n 爲奇數 2s+1, 且 s-1 不爲 5 的倍數時

$$f(m,n)=f(s+1,s)=2[\frac{s+2}{5}]+1=2\times[\frac{m+n+3}{10}]+1$$

六、走馬步的奧妙

（1）橫馬區 m≥2n

（2）直橫馬交錯區 $2m\ge n\ge\frac{m}{2}$ 內 f(m,n)的計算法則：

伍、結論：

所謂的費氏數列

在 2 ×n 棋盤上用 1×2 矩形覆蓋的方法共有 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 種

費氏數列的因數

在費氏數列中，在某一項數爲另一項數的因數時，數列值也會爲其因數，

也就是當 k=1,2,3,…時對於所有的 n 恆有 f_{nk} 爲 f_k 的倍數，所以 a_{nk-1} 爲 a_{k-1} 的

倍數。

費氏數列與楊輝三角形

可發現費氏數列恰爲楊輝三角形 45 度斜線上各個數字的和，因此也可得到下面的式子：

$$a_n = C(n,0) + C(n-1,1) + C(n-2,2) + C(n-3,3) + ... + C(n-k,k)$$

(其中 k=$[\frac{n}{2}]$表示小於或等於$\frac{n}{2}$的最大整數)

走到鄰格最少步數

(1)在棋盤上，a_{n-1}, a_n 互質且爲一奇一偶時，費氏(a_{n-1}, a_n)馬可以走遍無限棋盤上的每一個點。

(2)欲走到相鄰的點，費氏(a_{n-1}, a_n)馬最少要走a_{n+1}步

討論費氏馬捷徑　費氏馬(2,3)

當格點 (m,n) 滿足 $0 \le n < \frac{2}{3}(m - \frac{1}{2})$，m≥12 時

(i) 若 n 爲偶數回到格點(k,0) 且 $k = m - 3 \times \frac{n}{2}$ 爲偶數時，則

$$f(m,n) = 2 \times [\frac{2m - 3n + 8}{12}] + \frac{n}{2}$$

(ii) 若 n 爲偶數回到格點(k,0)且 $k = m - 3 \times \frac{n}{2}$ 爲奇數時，則

$$f(m,n) = 2 \times [\frac{2m - 3n + 6}{12}] + \frac{n}{2} + 1$$

(i) 若 n 爲奇數回到格點(k,1)，且 $k = m - 3 \times \frac{(n-1)}{2}$ 爲偶數時，則

$$f(m,n) = 2 \times [\frac{2m - 3n + 7}{12}] + \frac{n+1}{2}$$

(ii) 若 n 爲奇數回到格點(k,1)，且 $k = m - 3 \times \frac{(n-1)}{2}$ 爲奇數時，則

$$f(m,n) = 2 \times [\frac{2m - 3n + 3}{12}] + \frac{n+3}{2}$$

當格點 (m,n) 滿足$\frac{3}{2}(m + \frac{1}{2}) \ge n \ge \frac{2}{3}(m - \frac{1}{2})$及 m+n≥17 時

m+n 爲偶數, 且爲 10 的倍數時

$$f(m,n) = f(\frac{m+n}{2}, \frac{m+n}{2}) = \frac{m+n}{5}$$

m+n 爲偶數 2s, 且 2s 不爲 10 的倍數時

$$f(m,n) = f(s,s) = 2[\frac{s+1}{5}] + 2 = 2 \times [\frac{m+n+2}{10}] + 2$$

m+n 為奇數 2s+1，且 s-1 為 5 的倍數時

$$f(m,n)=f(s+1,s)=2\times\frac{s-1}{5}+3=\frac{m+n+12}{5}$$

m+n 為奇數 2s+1，且 s-1 不為 5 的倍數時

$$f(m,n)=f(s+1,s)=2[\frac{s+2}{5}]+1=2\times[\frac{m+n+3}{10}]+1$$

走馬步的奧妙

（1）橫馬區 m≥2n 內，f(1,0)=3,

$$f(m,n)=f(m-2n,0)+n=(m-2n)-2\times\left[\frac{m-2n}{4}\right]+n \text{，} m\geq 2$$

（2）直馬區 n≥2m 內，f(0,1)=3,

$$f(m,n)=f(0,n-2m)+m=(n-2m)-2\times\left[\frac{n-2m}{4}\right]+m \text{，} n\geq 2$$

當格點 (m,n) 滿足 $2m\geq n\geq\frac{m}{2}$ 且 m+n≥8 時

（1）m+n 為偶數 2s 時

$$f(m,n)=f(\frac{m+n}{2},\frac{m+n}{2})=f(s,s)=2\times\left[\frac{s+2}{3}\right]=2\times\left[\frac{m+n+4}{6}\right]$$

（2） m+n 為奇數 2s+1 時

$$f(m,n)=f(s+1,s)=2\times\left[\frac{s+1}{3}\right]+1=2\times\left[\frac{m+n+1}{6}\right]+1$$

陸、參考文獻：

(1) 吳振逵：世界數學名題欣賞－斐波那契數列　遼寧教育出版社

(2) 馮耀峰：棋盤上的組合數學　　上海教育出版社

(3) R.Brualdi:　Introduction to Combinatorics P95　North-Holland

(4)走馬步的奧妙　台北市第 33 屆中小學科展高中組

(5)中華民國中小學科學展覽第 21 屆到第 30 屆優勝作品專輯國中組數學科合訂本　國立台灣科學教育館編印

評語：
本作品研究費氏馬在無限棋盤上的捷徑，然後利用研究結果研究馬步問題，利用其結果及方法重解去年高中組「走馬步奧密」。研究方法新穎，頗具創意，條理分明。

作者簡介

蔡明翰

從小，我就對數理和運動有著極大的興趣，而數學一直排在我心中的首位。小學時就讀資優班兼游泳隊，讓我擁有豐富的小學生活；上國中後，數學也保持著優良的成績，並任小老師。讀書讀累時，做幾題需要思考的數學，也可振奮精神，數學真是我的好朋友。

林漢維

記得從國小，我便是旁人口中的「資優生」，對數學的理解力也一直比別人強，但我直到在一次比賽中脫穎而出，才真正有了在數學方面鑽研的念頭。現在我國三，平時喜愛閱讀、繪畫、聽音樂；而數學不但是我的專長，也是我的興趣喔。

吳岱潔

由於我從小便對自然科有著濃厚的興趣,於是在國中期間便參加了數理資優班，以求能在數理方面能有加深、加廣學習。更希望藉由科展的學習研究,來訓練自己的思考和邏輯能力。很高興這次的科展能獲得如此的佳績，雖然在研究過程中,有苦也有樂，但這絕對是我永生難忘的回憶。

張育豪

從小爸媽就很鼓勵我多讀書，爸爸也常買許多關於數理方面的書給我看，可能因此牽引了我對數學的興趣。國中進入數理班後，老師鼓勵我們參與科展製作，我們也曾有多次製作科展的經驗，這次能榮獲科展全國第三，真是得到了很大的鼓舞，今後我會持續在數學的領域中探討更高一層的學問。