中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

最佳團隊合作獎

030409

費伯那西？盧卡斯？向日葵到底愛誰？

學校名稱：南投縣立宏仁國民中學

作者：	指導老師：
國二 王仁韋 國二 李政興 國二 蘇 航 國二 潘昱呈	林志隆

關鍵詞：費氏數列、黃金比例、向日葵

摘要

利用生物的幾何性質，歸納出生物成長的特殊規律性與數學幾何的密切關係。再針對菊科類植物花盤內螺旋線數量的獨特性質，去探討並推論其順、逆螺旋線數和**費氏數列（Fibonacci Sequence）**以及**盧卡斯數列（Lucas Sequence）**的特殊相關性，及其形成此規律性的原因。並藉由 Maple 執行各種不同發散角所模擬的花苞生長情形，來解釋爲何**黃金角**是造成花苞排列緊密的最佳發散角。

壹、研究動機

在數學第四冊裡，我們學到了許多關於數列、幾何圖形和線對稱圖形的內容，更從書裡看到了向日葵花盤的介紹，討論到有關於其花盤內螺旋線數與費氏數列的微妙關係，引起了我們極大的好奇心，所以我們就想了解向日葵爲何會與費氏數列扯上關係。

在我們查了許多書籍和資訊後，赫然發現，其實不只向日葵有如此性質，還有許多生物也跟費氏數列有關。這些發現讓我們更想一探數學與生物間神奇的契合之處，所以我們針對校園的生物、花田裡種的許多向日葵、菊科植物，以及網路上的許多生物介紹內容，進一步尋找我們想得到的答案與結論。

貳、研究目的

一、生物所擁有的數學對稱關係：

（一）動物分類結果 （二）植物分類結果 （三）非線對稱生物分類結果

二、向日葵的螺旋線數分類：

（一）費氏數列組別 （二）盧卡斯數列組別 （三）例外組別

三、Maple 模擬不同發散角所造成花苞生長的結果：

（一）有理數當發散角 （二）無理數當發散角 （三）黃金角當發散角

參、研究設備及器材

一、工具類：紀錄紙、相機、電腦

二、使用生物類：向日葵、校園內及各處所拍得的動植物照片、網路上查得的生物照片

三、使用軟體類：Photo Impact、Paint(小畫家)、Excel、Maple

肆、研究過程或方法

一、生物所擁有的數學對稱關係：

我們先從探討各種生物體的對稱關係，尋找生物與數學幾何上最基礎的相關性。因此我們拿起相機拍下所有校園中的動植物，並且從網路中、書籍裡尋找所有生物的相關資料與圖片，想知道它們身體上對稱的秘密。

以下是我們對所有尋找到生物的對稱情況所作的分類整理：

（一）動物類：

動物的身體常呈對稱，就是指通過身體的中央線，能將之均分爲相等的兩半。依照動物身體的對稱方式，可將動物的體型分爲**球狀對稱**、**輻射對稱**和**兩側對稱**三種。其定義如下：

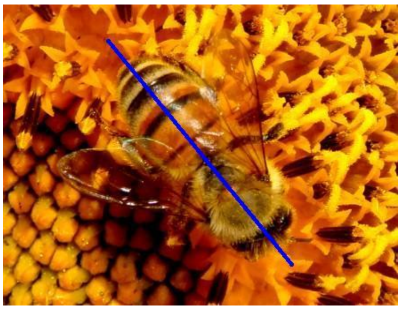
1. **球狀對稱**： 呈球狀的個體，若通過身體的中心，作任何切面時，均可將個體切爲約相等兩半，這種情形，叫做球狀對稱。呈球狀對稱的個體，適於在水中漂浮或滾動，例如某些原生動物。

2. **輻射對稱**： 輻射對稱爲通過身體中央的縱軸，作任何方向的切面，均可將其切成約相等兩半，例如海星。

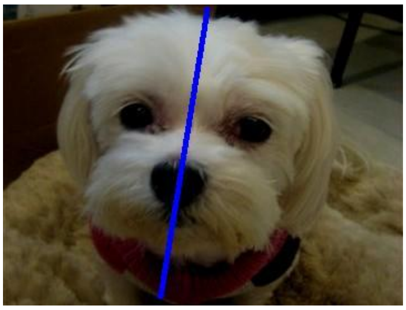
3. **兩側對稱**： 兩側對稱爲通過身體中央的縱軸，只能分割爲左右均等的兩半；若由背腹切爲兩半，則不相等。很多無脊椎動物及脊椎動物包括人類在內，均爲兩側對稱。

我們又依動物對稱軸數做出以下分類：

(1) 一條對稱軸（兩側對稱）：

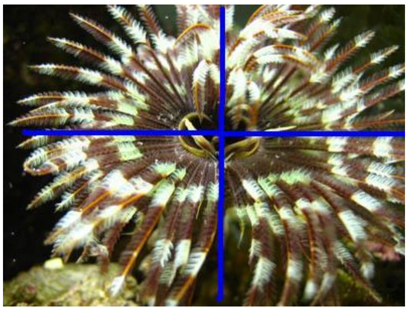

蜜蜂

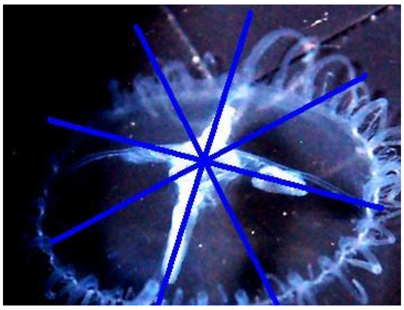

瓢蟲

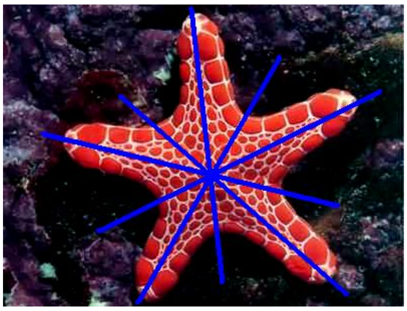

馬爾濟斯犬

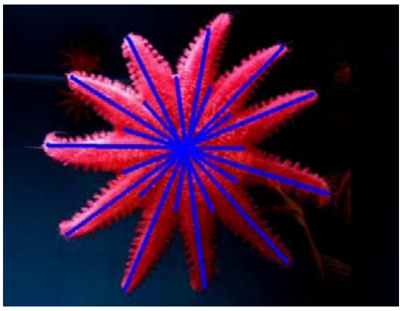
高等生物較易呈現出兩側對稱的型態，所以在我們生活週遭到處可見的動物中，以外表來看大部分都只有一條對稱軸。但是若加上體內器官來判斷，則大部分都不具線對稱情形，所以我們這邊討論的對稱軸數都是以外表來做判斷。

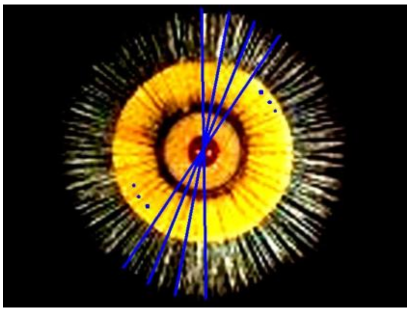
(2) 二條對稱軸以上（輻射對稱及球狀對稱）:

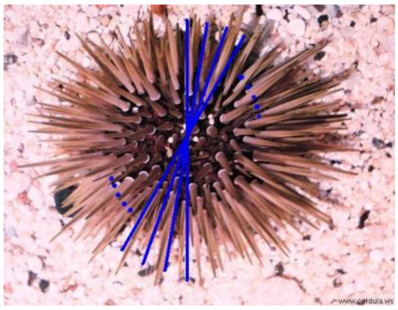

蓮花管蟲 (2 條)


桃花水母 (從上俯看 4 條)


菊海星 (5 條)


長棘海星 (11 條)


放射蟲 (無限多條)


梅氏長海膽 (無限多條)

擁有兩條對稱軸以上的動物，大多屬於低等的生物。因爲結構簡單，較易有兩條甚至是多條對稱軸呈現在型態上。但若是加上器官的對稱性，可能就沒有外表來的多。

（二）植物類：

植物和動物分法有極大的不同，取決於動物大多能清楚的分成三類對稱狀態，但植物由於在花、樹葉和枝幹都有其獨特性，同一株植物上，它的花和枝葉常有不同的對稱軸數。所以我們在植物的對稱分類方面，有幾個部份便改以**花類**、**葉類**和**枝幹類**來做區分及研究整理，其整理如下：

1. 一條對稱軸：

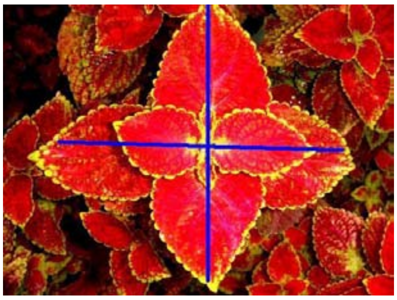

非洲鳳仙（花類）


桑葉（葉類）

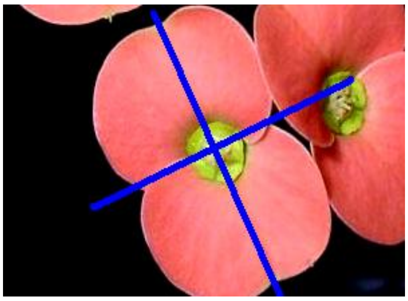

雞母珠枝葉（枝幹類）

一條對稱軸的植物爲數眾多，無論是花、樹葉或枝幹都有極多比例的種類是屬於單一條對稱軸的。我們在校園中、野外所尋找到的絕大部分都屬於此類，舉以上例子作爲代表。

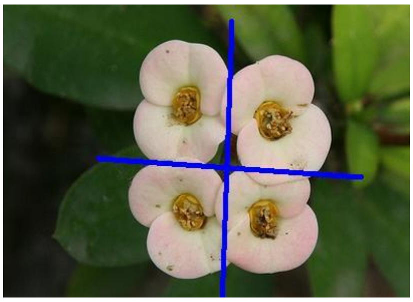
2．二條對稱軸：



彩葉草（組合葉類）



虎刺 （單一花類）

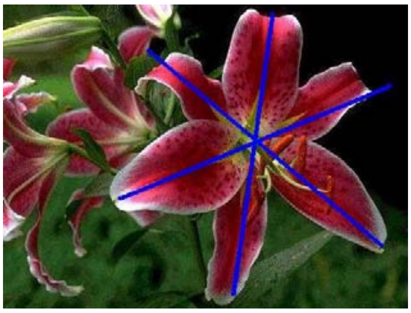


虎刺（組合花類）

這一類的植物相對之下少之又少，本來兩條對稱軸的植物種類便不多，加上要形成兩條稱軸必須整體大約呈現**矩形**及**菱形**，或像彩葉草般特殊的組合配對方式，否則無法形成兩條對稱軸，故此類數量並不多見。

3．三條對稱軸：

延齡草 (安大略省省花)



百合花

金針花

由於三瓣花類最容易有此性質，加上週遭三瓣花的種類並不多見，所以我們針對三瓣花去網路尋找相關花類，發現百合花、金針花是這類花種最常見者。而他們都是屬於只有三片花瓣，另三片類似花瓣者其實全是花萼，而三花瓣互相對稱，三花萼也是互相對稱。

4．四條對稱軸：

睡蓮

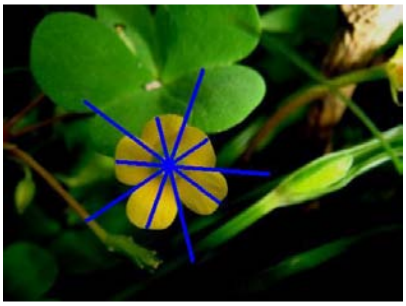
繁星花 (少數爲 4 瓣)

丁香花

此類除睡蓮是特殊配對方式外，四瓣花的種類皆是此類。四瓣花種類比二瓣花多，但數量還是算少數，而在校園內找到的繁星花極爲特殊，它大多是五瓣，但少數爲四瓣，甚至有些還會有六瓣，是我們在校園中找到對稱軸種類最多種的植物。

5．五條對稱軸：

梅花



酢漿草的花

繁星花(大多為 5 瓣)

在花的分類中，五瓣花算是大宗，所以五瓣花在生活週遭比比皆是。通常我們找到的花類，無論是哪一種類的花，大多比例皆是屬於此類。

6．多條對稱軸：

波斯菊 (8 條)

仙丹花 (4 條和 6 條)

繁星花 (6 條和 5 條)

鬼針草(咸豐草)花 (8 條)

洋菊 (11 條)

蒲公英種子 (無限多條)

若要以花瓣數作為分類法，隨著花瓣數變多，對稱軸數也隨著增加。因其他對稱軸數的花朵太多，所以我們只舉了以上例子作為分析討論。而另一類像蒲公英種子的對稱軸就是無限多條，它的形態很像是動物類的球狀對稱。

（三）非線對稱生物類：

生物中有不少情況不屬於線對稱型態，但本身又具有對稱關係，我們在此處另外拿出來探討。此類也是我們最感興趣的部份，所以我們在後面針對向日葵的花盤螺旋線數作了不少的討論與分析，就是希望找到這些特殊型態的規律性。

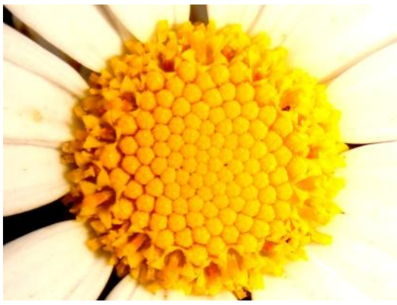
1．**非線對稱的對稱類型：**


向日葵花盤內的螺旋線


鳳梨的外皮


羅馬花椰菜(寶塔菜)

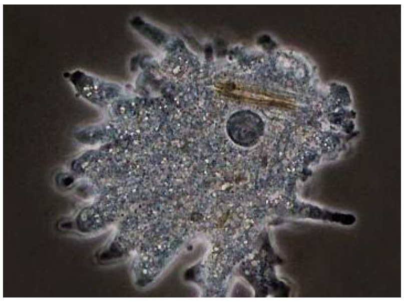

仙人掌


蓬蒿菊(瑪格麗特)花盤內螺線


鸚鵡螺的殼

這些生物雖不屬於線對稱，但其生長方式卻有著特殊的規律性或對應關係，根據不少資料顯示，有些植物的螺旋線數常有一定的數字呈現，所以更加劇了我們想針對這些性質作深入分析的動力。

2．**無明顯對稱類：**


變形蟲


牛樟芝


草履蟲

這些更為低等的生物，因為發展上和結構上更為簡易，所以它們通常沒有單純的對稱，就是根本沒有任何對稱。而此類最明顯的例子便是**變形蟲**。

我們由以上尋找生物對稱軸的過程中發現，高等動物的對稱性比較單一；愈低等的動物，對稱性種類多，更低等的甚至無對稱性。由此可見對稱性和生物體確有極大的相關性存在。

但是植物的狀況卻跟動物有極大的差別，除了植物本身花、葉、枝幹就有不同的狀態外，花朵本身的花瓣，更是造成對稱軸數型態眾多的一大主因。

以上屬於對稱軸的分類，畢竟是生物在數學幾何上最單純的規則，所以我們接著想要尋找的便是那些並非線對稱，但卻有獨特對稱性質的植物，我們找了向日葵來做我們想進一步深入研究的主題。

二、向日葵的螺旋線數分類：

爲了瞭解向日葵花盤內的小花苞排列的螺旋線數，我們找了一片向日葵花田，拍下所有盛開的向日葵花盤，作爲我們想進一步証明向日葵花盤螺旋線數與費氏數列是否有相關的研究來使用。

我們總共拍下了 290 張照片，經過篩選與擷取後，我們整理了出 192 張。再藉由小畫家畫出所有順時針和逆時針旋轉的螺旋線數，並數出其線數後，分類並歸納整理。

我們先將所有向日葵花盤照片依小畫家畫出它們所有的螺旋線，先以**藍色螺線**標示出所有順時針旋轉的螺旋線，再以**黑色螺線**標示出所有逆時針旋轉的螺旋線，若有第三種肉眼依然能看出的螺旋線存在，便以**紅色螺線**標出。

此外，再針對它們每一個小花苞的中心點，以小黑點方式標示，讓螺旋線的疏密能更加清楚且易於呈現。

因從歸納整理中發現，有些向日葵的螺旋線數並不屬於我們當初所設想的費氏數列數字。所以我們將這些向日葵的螺旋線種類分成三種類型，分別是**費氏數列組**（13、21、34、55、89 …）、**盧卡斯數列組**（11、18、29、47 …），與**例外組別**。其實驗分類如下：

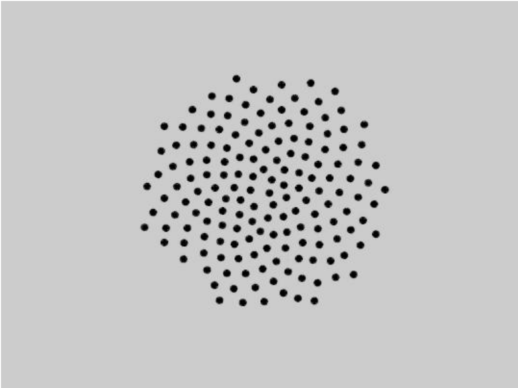
（一）實驗一（費氏數列組）：

我們將螺旋線數由順至逆做以下分類：

1.順時針螺旋線數 13 條，逆時針螺旋線數 21 條：

編號 1

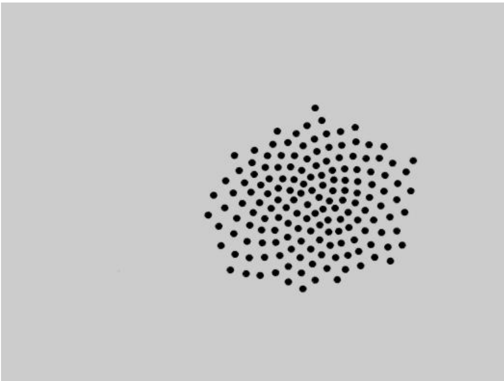
順時針螺旋線數 13 條

逆時針螺旋線數 21 條　　　　　　　　小花苞分布圖

2.順時針螺旋線數 21 條，逆時針螺旋線數 13 條：


編號 2　　　　　　　　順時針螺旋線數 21 條

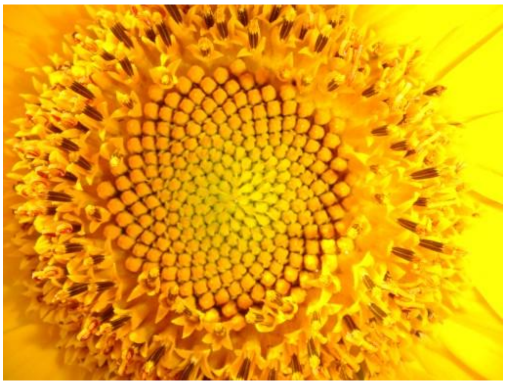



逆時針螺旋線數 13 條　　　　　　　　小花苞分布圖

以上兩類的費氏數列數字較小，表示螺旋線數在花盤內不多。螺旋線數較少有兩個原因存在，第一種原因是本身花盤就小，屬於小型向日葵；第二種原因是有些向日葵花盤周圍的花苞已經開花不少，剩下的為中心區域花苞，所以螺旋線數並無法過多。

但從這兩類可看出，**順時針和逆時針螺旋線數量並不一定是逆時針或是順時針方向就會比較多，而是兩種情形都有出現**。

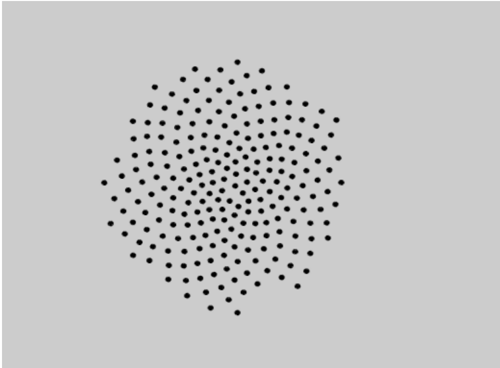
3. 順時針螺旋線數 21 條，逆時針螺旋線數 34 條：



編號 3

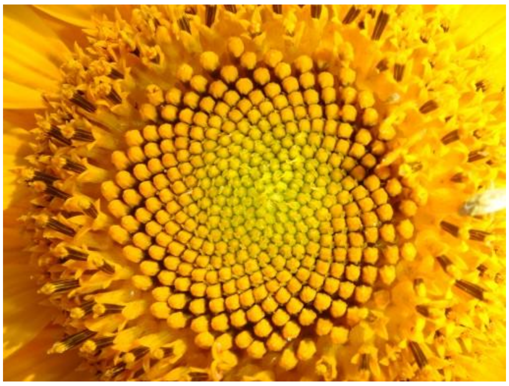
順時針螺旋線數 21 條

逆時針螺旋線數 34 條

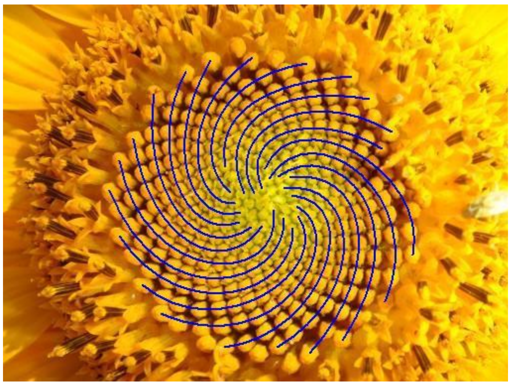


小花苞分布圖

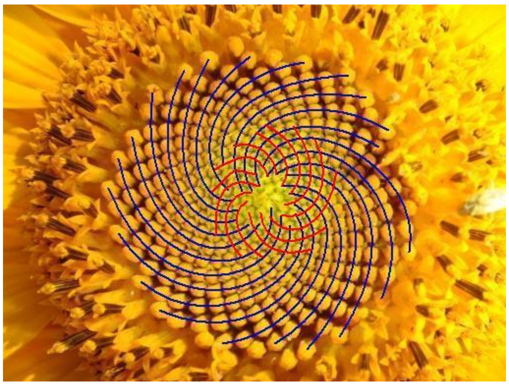
4.順時針螺線數 21 條，逆時針螺線數 13 條，逆時針螺線數 34 條：



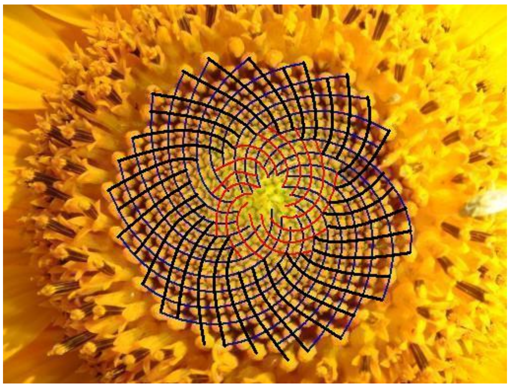
編號 4



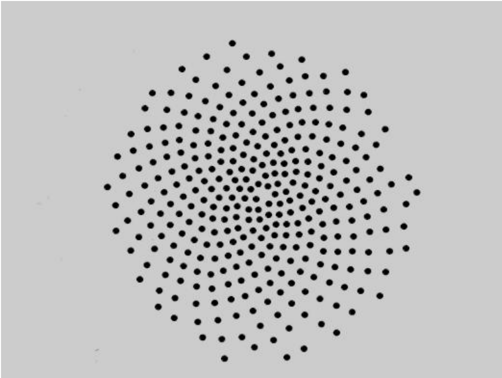
順時針螺旋線數 21 條



逆時針螺旋線數 13 條



逆時針螺旋線數 34 條



小花苞分布圖

以費氏數列次序作排列應為
逆 13，順 21，逆 34

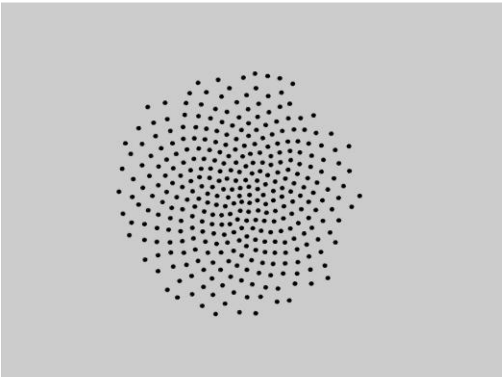
5.順時針螺旋線數 34 條，順時針螺旋線數 13 條，逆時針螺旋線數 21 條：

編號 5

順時針螺旋線數 34 條

順時針螺旋線數 13 條

逆時針螺旋線數 21 條



小花苞分布圖

以費氏數列次序作排列應為
順 13，逆 21，順 34

前五組資料中，第三、第四和第五組因為是花盤再大一點的向日葵，它們除了螺旋線數愈多之外，因為角度關係，在順時針螺旋線與逆時針螺旋線間，往往還會發現另一組螺旋線。

更令人訝異的是，此組螺旋線數數字也是費氏數列的其中一項。此數字夾在先前找到的順時針與逆時針螺旋線數的數字之間，剛好形成連續三個費氏數列的數字組合。

我們從先前查得的資料中了解，多數資料僅只提及兩組順時針和逆時針的螺旋線數，而從上面幾組的例子裡，在螺旋線的小花苞分布圖中，其實單以**肉眼觀察**，能看出的螺旋線數量最多大約是三組，但肉眼不能輕易查覺的，卻隱藏在點與點的連線之中。

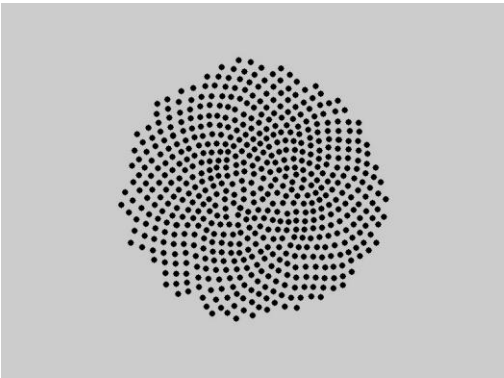
6.順時針螺旋線數 55 條，順時針螺旋線數 21 條，逆時針螺旋線數 34 條：

編號 6

順時針螺旋線數 55 條

順時針螺旋線數 21 條

逆時針螺旋線數 34 條



小花苞分布圖

以費氏數列次序作排列應為
順 21，逆 34，順 55

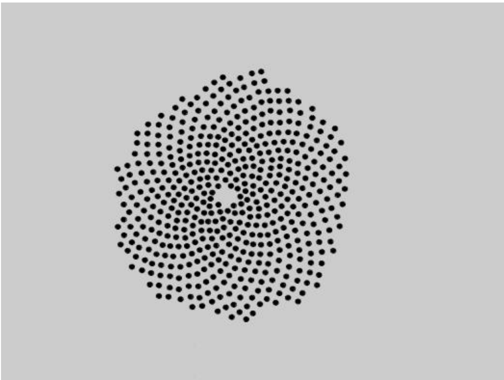
7.順時針螺旋線數 34 條，逆時針螺旋線數 21 條，逆時針螺旋線數 55 條：

編號 7

順時針螺旋線數 34 條

逆時針螺旋線數 21 條

逆時針螺旋線數 55 條



小花苞分布圖

以費氏數列次序作排列應爲
逆 21，順 34，逆 55

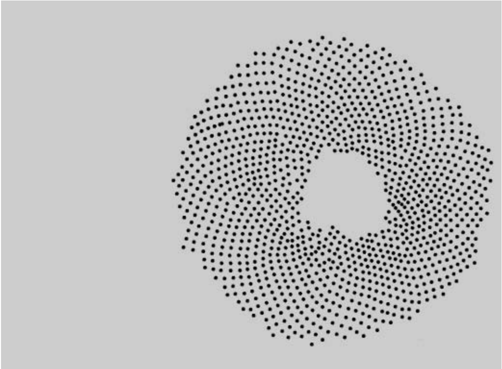
上面組別的螺旋線數能看到 55 條，除了本身花盤更大之外，其中螺旋線和螺旋線間的密集度明顯的變得更大了。而因爲螺旋線間隙更小，花苞的密度也能更大，也直接的影響了小花苞在花盤內的數量。

8.順時針螺旋線數 89 條，逆時針螺旋線數 55 條：


編號 8


順時針螺旋線數 89 條


逆時針螺旋線數 55 條


小花苞分布圖

這是我們尋找到的向日葵中，螺旋線數最多的一種，且僅有 4 個。除了它順時針螺旋線數可達 89 條外，也可看出其小花苞分布圖相當密集，且花苞和花苞間因爲數量過多，花苞無法太大，而密度極高，間接也造成過度擁擠的花苞，使得螺旋線曲度並不十分的平滑，整個花盤內花苞的分布十分的凌亂。

（二）實驗二（盧卡斯數列組）：

在尋找向日葵的螺旋線數過程中，我們赫然發現有少數的螺旋線數的數字並不符合我們所熟悉的費氏數列。本來以爲這些例外的向日葵花朵，是違反費氏數列的反例，但是當這些反例愈找愈多時，卻驚訝的發覺這些反例的數字都是相同的（11、18、29、47 …）！

而其數字的規律性跟費氏數列的規律性完全一樣：

11＋18＝29 18＋29＝47 （ 後項都等於前兩項數字的和 ）

公式也類似費氏數列的 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ （Fn 代表費氏數列的第 n 項 ）

所以我們查詢了相關資料後，發現此數列爲法國數學家盧卡斯（Edouard Lucas）所發表。**盧卡斯數列（Lucas Sequence）**和**費氏數列（Fibonacci Sequence）**有莫大的關係，且盧卡斯數（ 簡記 Ln）有很多性質和費氏數相似，如 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ 。而最大不同的是 $F_1 = 1$、$F_2 = 1$，而 $L_1 = 1$、$L_2 = 3$。所以盧卡斯數依序是：1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... 。

我們依照費氏數列的分類法，將這些盧卡斯數列的向日葵加以整理：

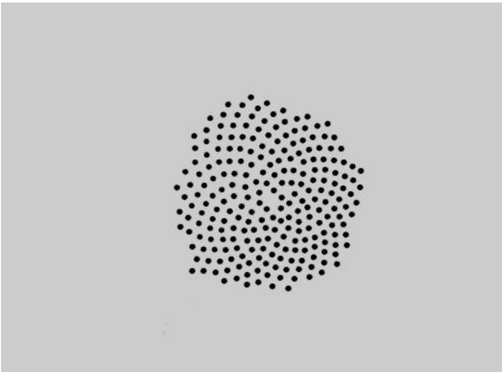
1．**順時針螺旋線數 29 條，順時針螺旋線數 11 條，逆時針螺旋線數 18 條：**

編號 9

順時針螺旋線數 29 條

順時針螺旋線數 11 條

逆時針螺旋線數 18 條



小花苞分布圖

以費氏數列次序作排列應爲
順 11，逆 18，順 29

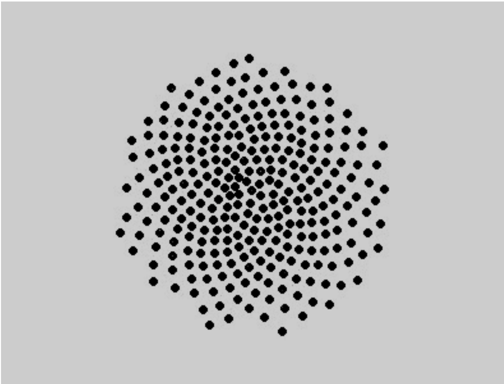
2．**順時針螺旋線數 18 條，逆時針螺旋線數 29 條，逆時針螺旋線數 11 條：**

編號 10

順時針螺旋線數 18 條


逆時針螺旋線數 29 條


逆時針螺旋線數 11 條


小花苞分布圖

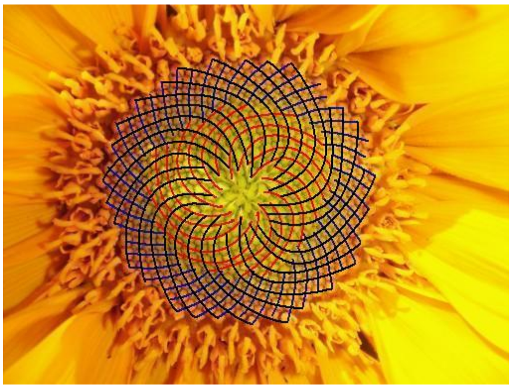
以費氏數列次序作排列應為
逆 11，順 18，逆 29

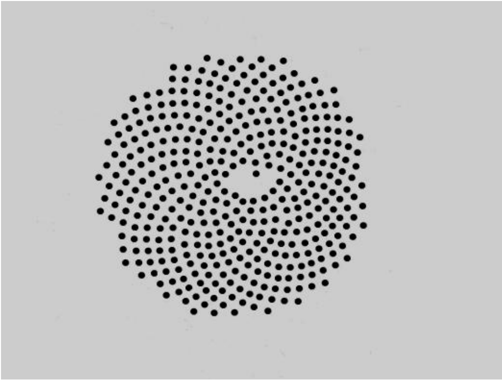
3. 順時針螺旋線數 47 條，順時針螺旋線數 18 條，逆時針螺旋線數 29 條：


編號 11


順時針螺旋線數 47 條


順時針螺旋線數 18 條


逆時針螺旋線數 29 條



小花苞分布圖

以費氏數列次序作排列應爲
順 18，逆 29，順 47

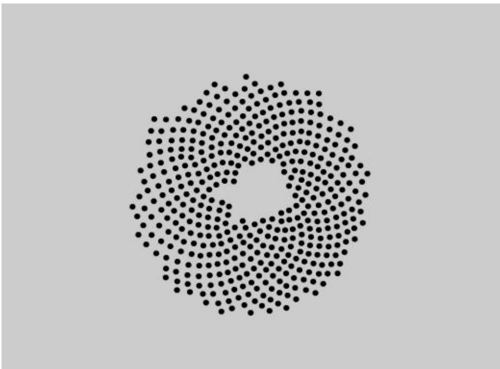
4．順時針螺旋線數 29 條，逆時針螺旋線數 47 條，逆時針螺旋線數 18 條：

編號 12

順時針螺旋線數 29 條

逆時針螺旋線數 47 條

逆時針螺旋線數 18 條



小花苞分布圖

以費氏數列次序作排列應爲
逆 18，順 29，逆 47

盧卡斯數列的螺旋線大致上和費氏數列的螺旋線狀況差不多，但顯得較爲密集。至於爲何我們找到花朵正常的螺旋線數都一定是這兩組數列，這便是我們接著在後面要討論的。

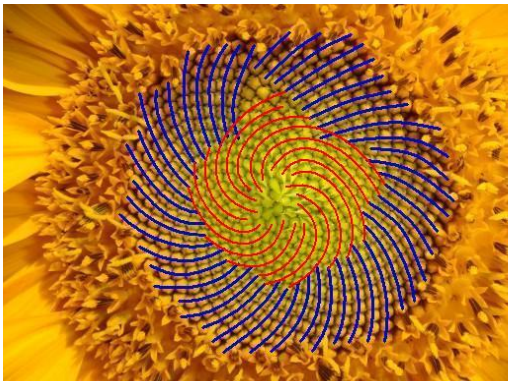
而底下是我們在眾多向日葵花朵中，極少數完全不屬於費氏數列或是盧卡斯數列組別的其中之一。但是我們探討原因之後發現，它違反規律的因素在於他花盤上方，有花苞生長的位置出現了極大的落差，造成逆時針螺旋線多出一條，以致於破壞了本屬於盧卡斯數列的線條數字。否則，它應該也是盧卡斯數列的一個例子。

（三）實驗三（例外組別）：

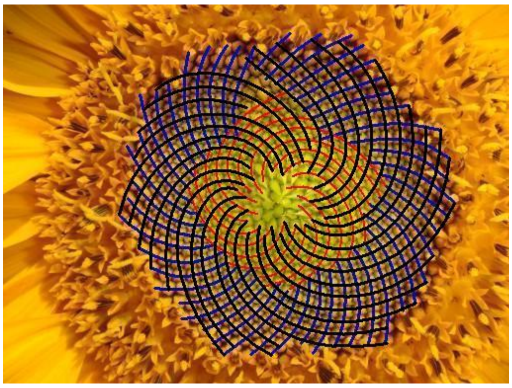
1．順時針螺旋線數 47 條，順時針螺旋線數 17 條，逆時針螺旋線數 30 條：

編號 13

順時針螺旋線數 47 條



順時針螺旋線數 17 條



逆時針螺旋線數 30 條

除了向日葵有費氏數列和盧卡斯數列的規律性外，我們也針對一些其他菊科的植物（諸如：**瑪格麗特、瓜葉菊、波斯菊、雛菊、粉花蓬蒿菊、五爪金英、白藍菊**）做研究。我們發現在我們尋找的眾多菊科植物裡，它們的螺旋線數都是費氏數列裡較小的數字。在尋找的過程中，並沒有費氏數列數字以外的螺旋線數出現（扣除生長不規律的花朵不提）。

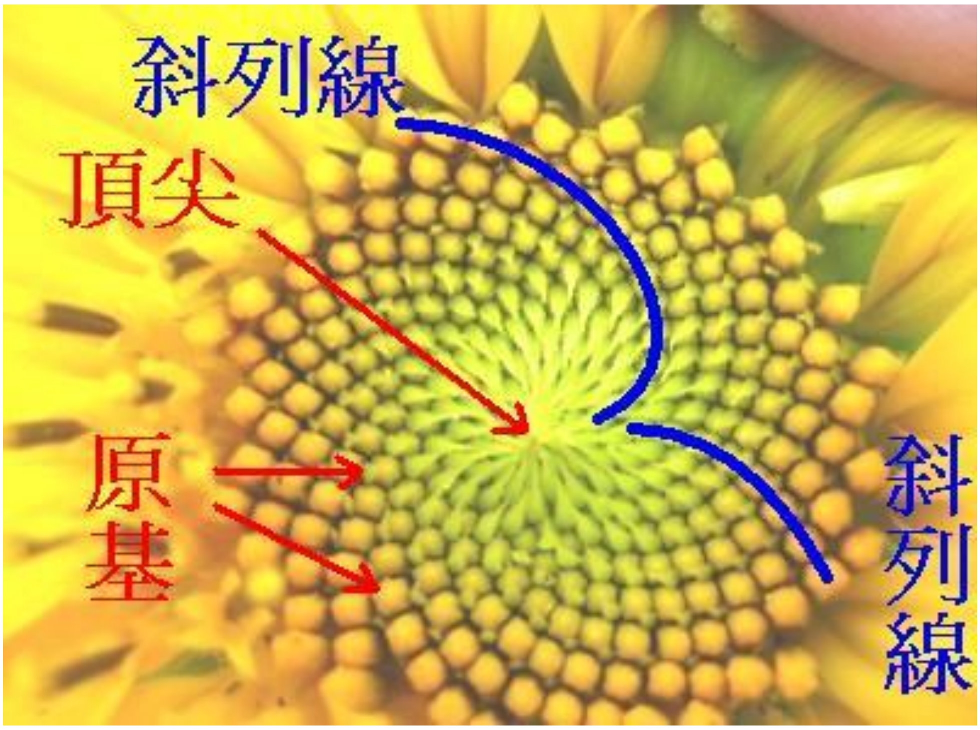
三、Maple 模擬不同發散角所造成花苞生長的結果：

植物從發芽開始往下長根，向上生成枝葉。根據生物學家的研究，他們從顯微鏡下觀察新芽的頂端，可以清楚看到植物在頂端中央，會有一個圓形的組織稱爲「頂尖」，而在頂尖的周圍，則有許多微小的突起物向外側逐漸形成，這些突起稱爲「原基」。

而先形成的原基會被後形成的原基向外推移，導致先形成的原基離頂尖較遠，生物學家就是從每個原基與頂尖之間的距離，來推測其出現的先後順序。他們還發現按照原基形成時

間的順序描繪出原基的位置，就能畫出一條旋轉得非常緊密的螺旋線，生物學家稱之爲「**生成螺線**」。

而我們前面一直尋找的順時針和逆時針螺旋線，其實只是視覺上的錯覺，這些可由肉眼輕易看出的螺旋線，生物學家稱之爲**斜列線**。而人的眼睛之所以能清楚分辨出斜列線，是因爲斜列線是由相鄰的兩個原基所組成，這也正是我們能看清向日葵小花苞螺旋線的緣故。



晶體學家布拉菲兄弟（Auguste and Louise Bravais）曾經測量出相鄰兩原基間的角度，發現量得的各個角度十分相近，且這些角的平均值非常接近 137.5 度，而這角度就是植物原基生長的「**發散角**」，而向日葵的發散角就正好是「**黃金角**」。

在數學上正確黃金比值爲 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ≒ **0.618033988⋯** ， 而黃金角就是

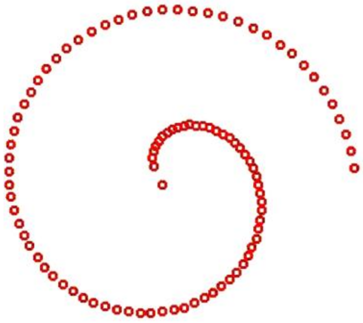
$360° - 360° \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ≒ 137.507764…°，四捨五入後就大約是 **137.5 °** 。

然而數學家伏格（H.Vogel）更以電腦模擬原基的生長狀況，在發散角爲固定值的假設下，想要找出最好的發散角，使得這些原基盡可能緊密地排列在一起。

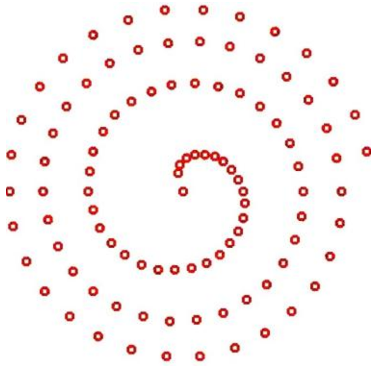
我們很想知道如何利用電腦模擬來找到向日葵花苞生長的情形，因此便藉由網路上取得的數學程式，並利用 Maple 來執行每一種發散角下花苞的模擬生長。爲了解發散角的角度變化與花苞排列有何關係，我們依照**有理數**到**無理數**的順序去探討，並做了以下的實驗：

（一）實驗一（有理數當發散角）：

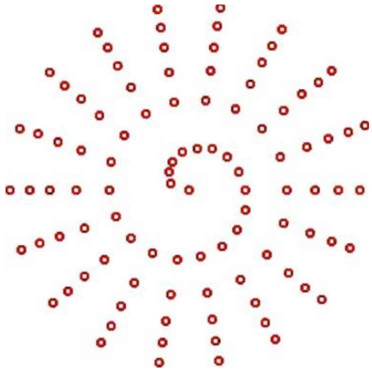
1．以 360n 的因數當發散角（n 爲正整數）：



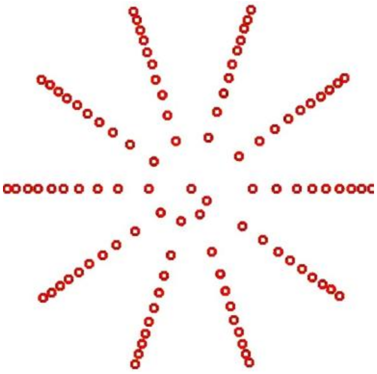
5 度-花苞 100



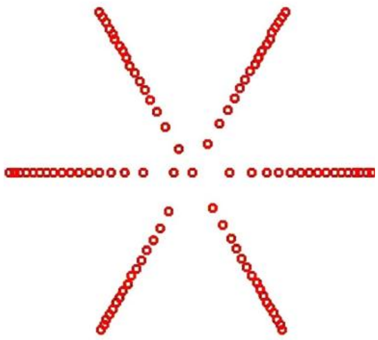
12 度-花苞 100



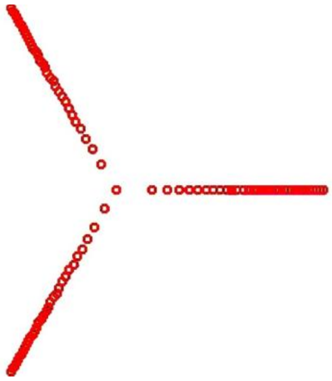
20 度-花苞 100



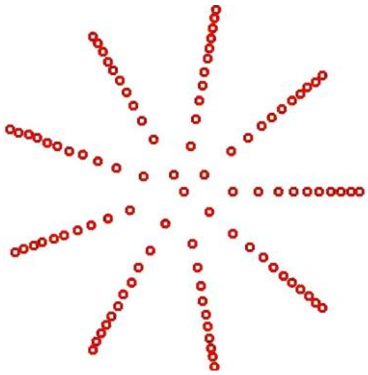
36 度-花苞 100



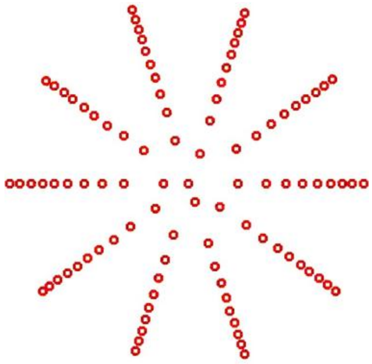
60 度-花苞 100



120 度-花苞 100



80 度-花苞 100



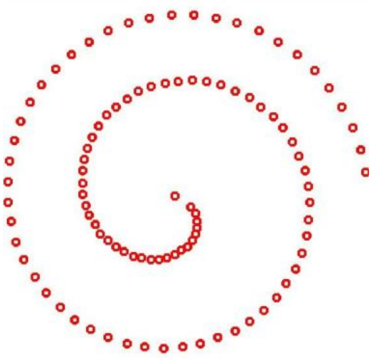
108 度-花苞 100

540 度-花苞 100

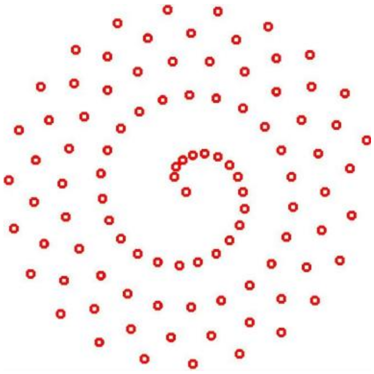
依照 360n 的因數當發散角，斜列線呈現**直線放射狀**，且只有**一組**。

因爲電腦模擬是以中心點開始發散各個小花苞，並按照所設定角度每隔一固定時間發散一個小花苞，所以設定角度只要是周角 **360 度整數倍的因數**，所形成的斜列線看起來都會是**放射狀的直線**。

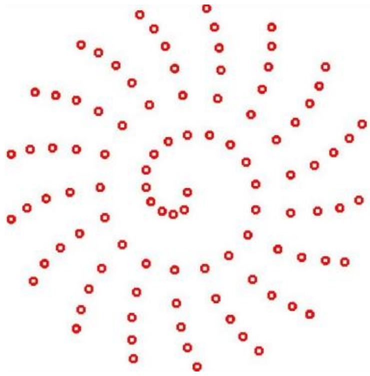
2．以非 360n 因數的整數當發散角：



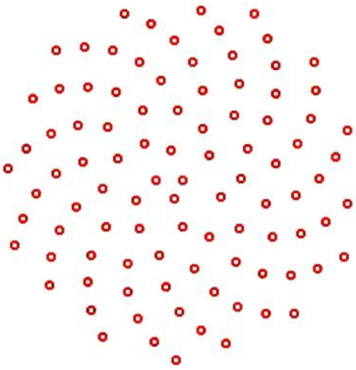
7 度-花苞 100



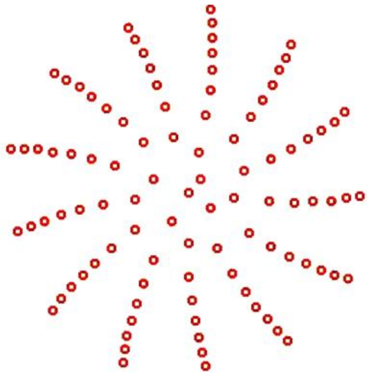
16 度-花苞 100



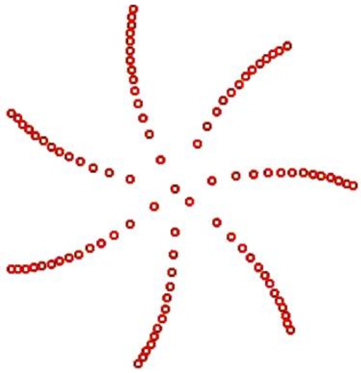
21 度-花苞 100



67 度-花苞 100



83 度-花苞 100

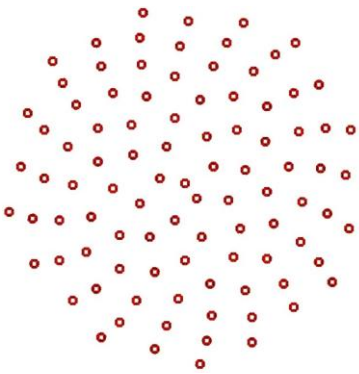


103 度-花苞 100

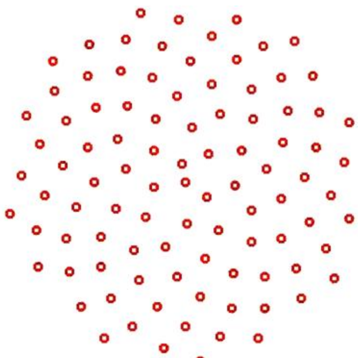
依照非 360n 因數的整數當發散角，斜列線呈現**螺旋放射狀**，還是只有**一組**。

3．以非整數的有理數當發散角：

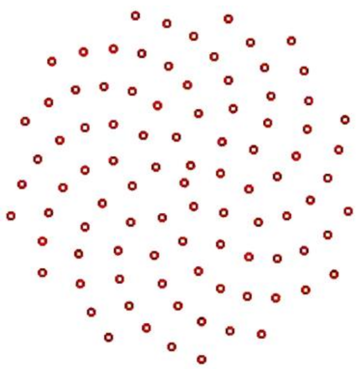
（1） 有限小數組：



137.3 度-花苞 100

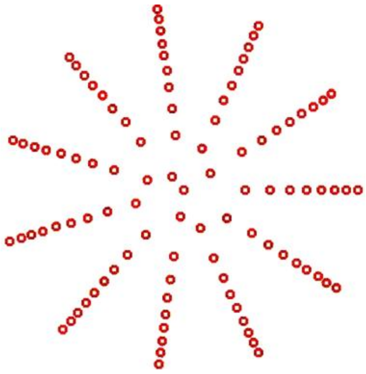


137.5 度-花苞 100

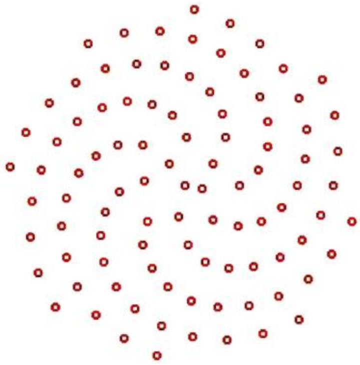


137.7 度-花苞 100

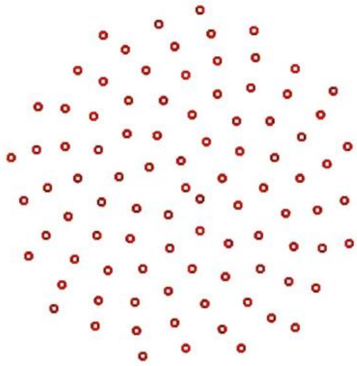
（2） 循環小數組(分數組)：



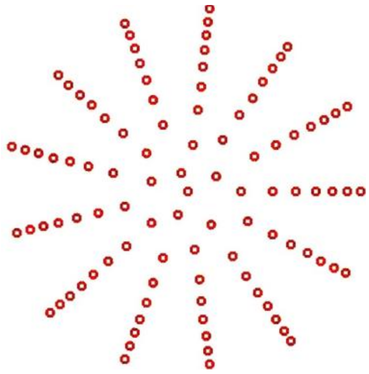
7/11-花苞 100



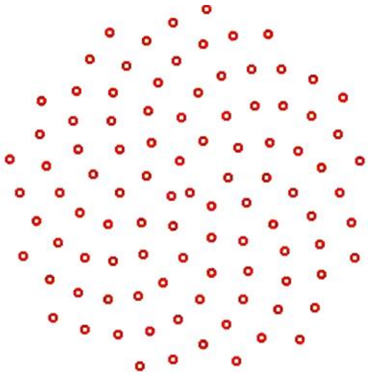
18/29-花苞 100



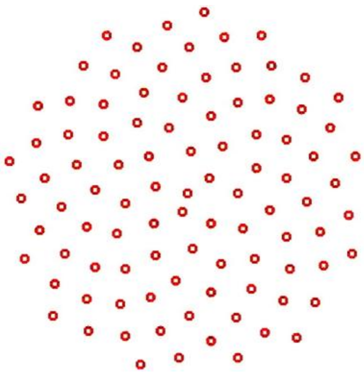
47/76-花苞 100



8/13-花苞 100



21/34-花苞 100

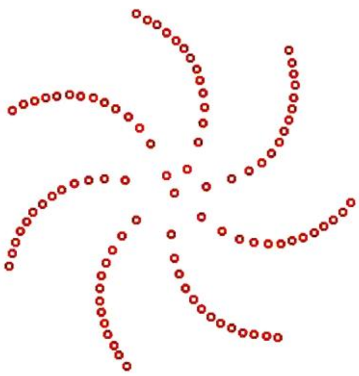


55/89-花苞 100

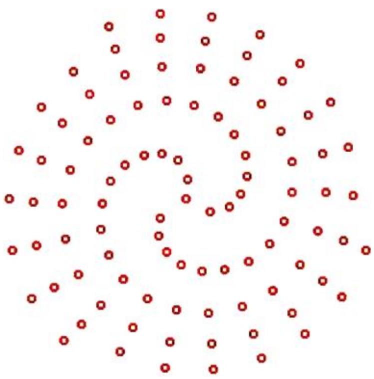
依照非整數的有理數當發散角，斜列線呈現**螺旋放射狀**，螺旋線有些**可以出現第二組**。

（二）實驗二（無理數當發散角）：

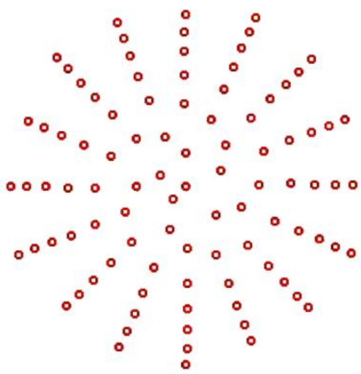
1．以 π 的組合值形成的發散角：



π -花苞 100



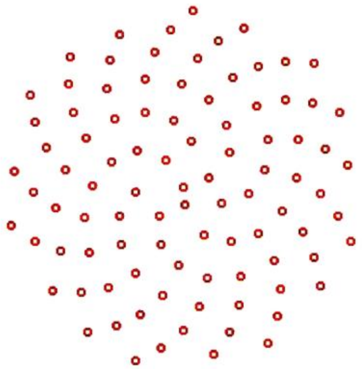
1/ π -花苞 100



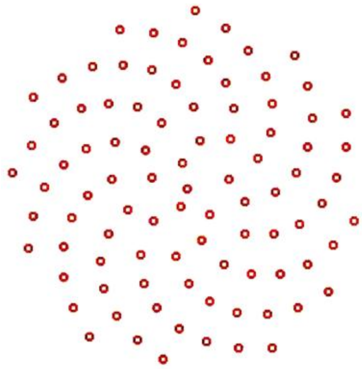
π /（ π -3）-花苞 100

因爲黃金比值是 $x=\frac{1}{x}-1$ 所得的根值，所以我們也刻意從 $x=\frac{1}{x}-2$ 和 $x=\frac{1}{x}-3$ 的根值去嘗試其他的發散角，以下的組別便是我們嘗試後的結果。

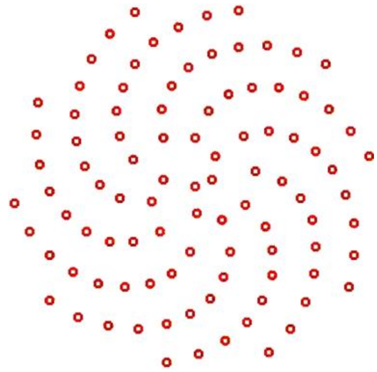
2．以根式的組合值形成的發散角：



$1/\sqrt{2}$ -花苞 100

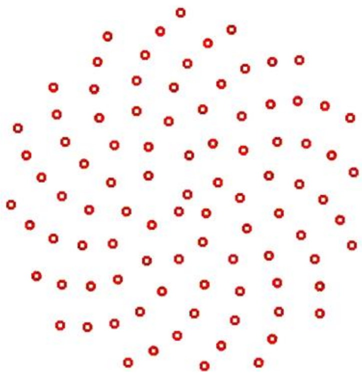


（$\sqrt{2}-1$）-花苞 100

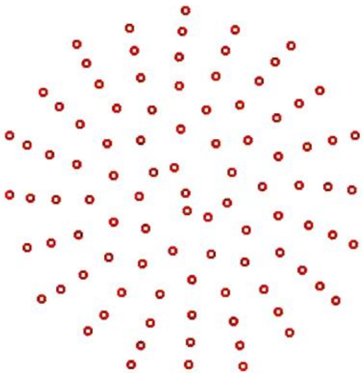


$(\sqrt{13}-3)/2$-花苞 100

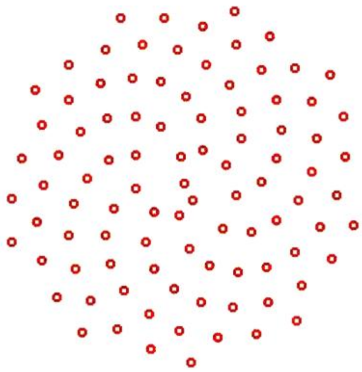
3．以 π 和根式的組合值形成的發散角：



$\pi/\sqrt{3}$ -花苞 100



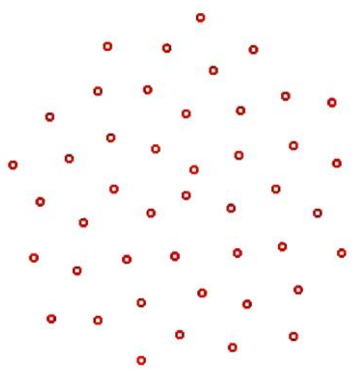
$\sqrt{2}/\pi$ -花苞 100



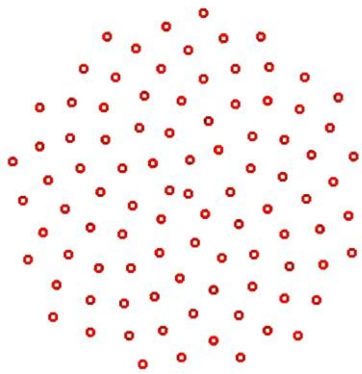
$\sqrt{3}/\pi$ -花苞 100

依照無理數當發散角時，斜列線呈現**螺旋放射狀**，螺旋線有些**可以出現第二組，且花苞的緊密度也變得更高**。

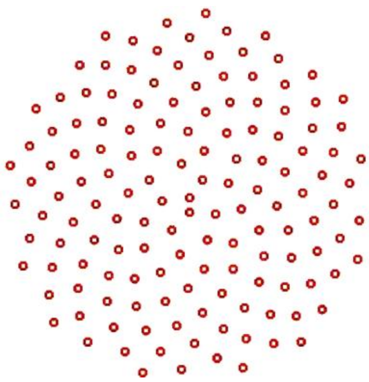
（三）**實驗三**（**黃金角當發散角，以不同花苞數執行**）：



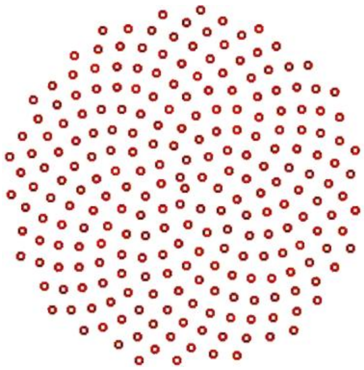
黃金角-花苞 50



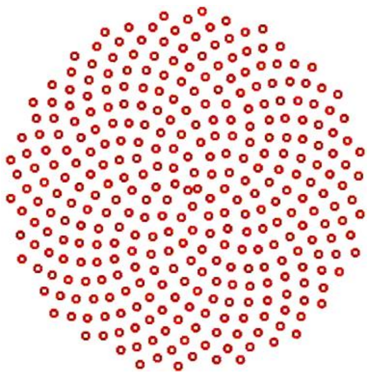
黃金角-花苞 100



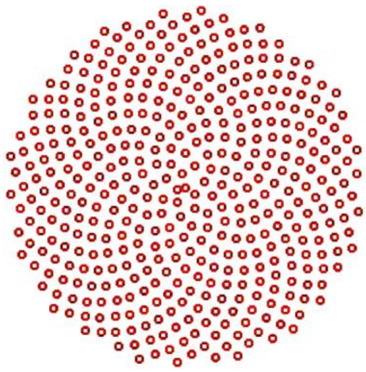
黃金角-花苞 150



黃金角-花苞 250



黃金角-花苞 350



黃金角-花苞 450

依照黃金角當發散角時，斜列線呈現**螺旋放射狀**，螺旋線**可以出現好幾組，且花苞的緊密度最高**。此外，我們還模擬同一單位面積下改變花盤內的花苞數，發現花苞數愈多時，花苞排列愈密集，其圖形更相近於向日葵的花苞排列狀況。

利用 Maple 所做的電腦模擬實驗中清楚顯示，當發散角**非黃金角**時，原基間會出現空隙，此時肉眼所見較明顯的螺旋線就只會有一組或兩組。因此，如果要使原基排列沒有空隙，發散角就必須是黃金角；而這時，多組螺旋線就會在眼前同時出現。簡單來說，要使花盤內花苞排列得最密集、最紮實，其最有效的方式就是讓發散角等於**黃金角**。

伍、研究結果

一、生物所擁有的數學對稱關係研究結果：

（一）動物分類結果：

1. 兩側對稱的動物都屬於一條對稱軸，大部分高等動物均屬此類。
2. 輻射對稱的動物都有二條對稱軸以上，而球狀對稱的動物則有無限多條對稱軸，以上兩類動物多屬於低等動物。

（二）植物分類結果：

植物因型態多元，即使同一株植物，由花、葉和枝幹常有不同的對稱軸數。以花瓣數作分類的對稱軸數為最多樣性，葉和枝幹則較少。而花瓣數通常與費氏數列有直接關係，多為 1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144…等。

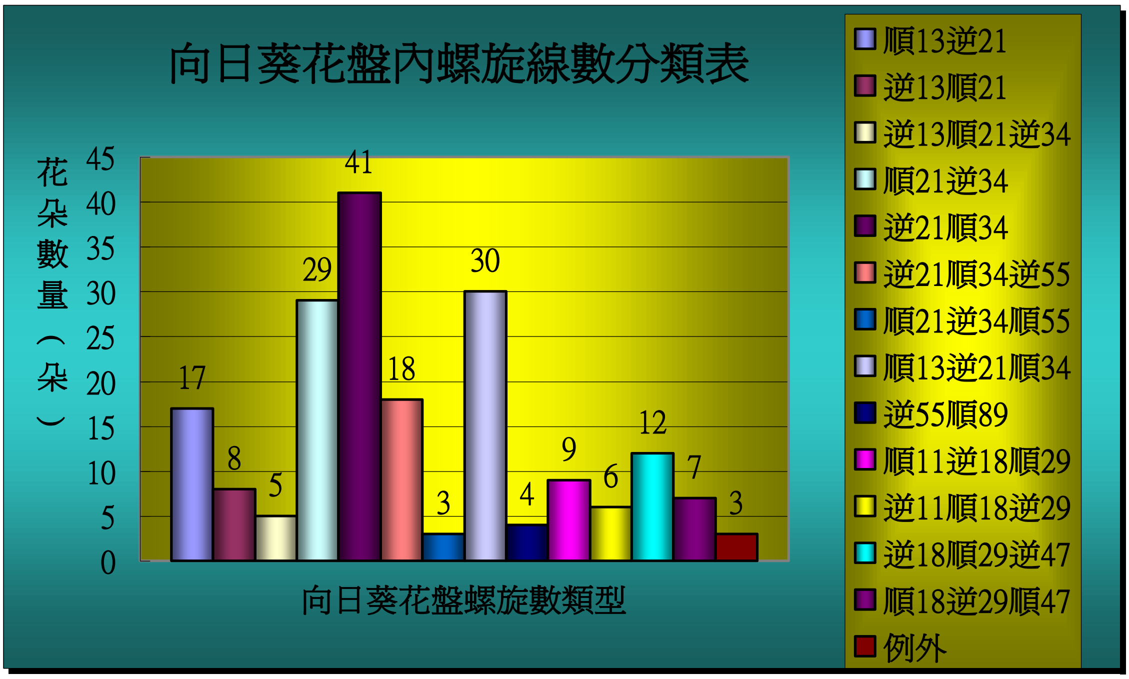
（三）非線對稱生物分類結果：

1. 此類爲擁有其他特殊對稱型態的生物，大多爲植物，而我們作深入探討的向日葵便屬於此類。
2. 完全沒有對稱性的生物則多屬於低等生物，如變形蟲就是最明顯的例子。

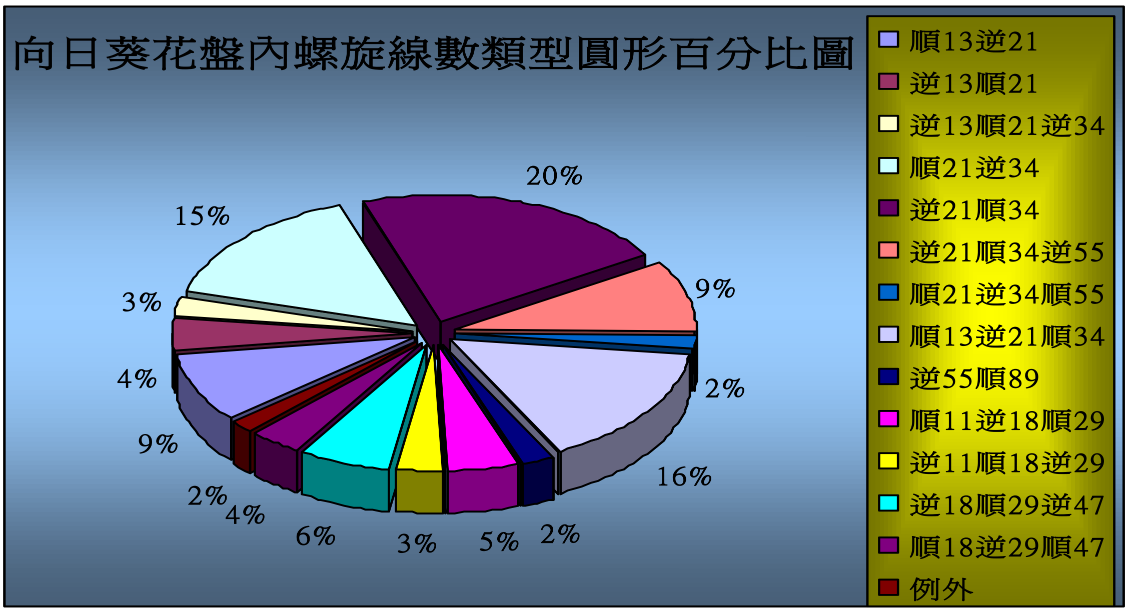
二、向日葵花盤內螺旋線數分類：

我們依據研究結果，將向日葵中可由肉眼明顯看出的順時針與逆時針螺旋線數的數量作分類，並製成統計圖，圖表如下

（一）螺旋線分類長條圖：

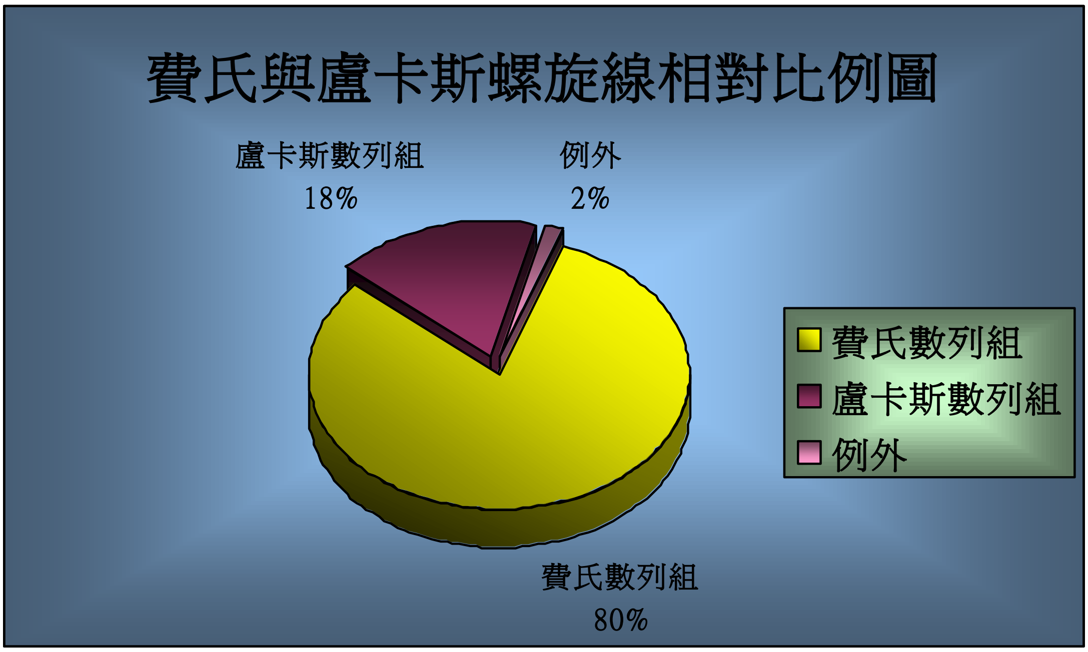


（二）螺旋線分類百分圖：



我們可以由以上圖表，得知逆時針螺旋線數 21 條、順時針螺旋線數 34 條的向日葵花朵比例為最多，共占 20%。而最少的是螺旋線數 89 條的向日葵花朵與例外型態。

（三）數列分類百分圖：



由此百分圖裡，可看出向日葵的花盤螺旋線數絕大部分都是屬於費氏數列組，少數由盧卡斯數列組所組成，而例外的純粹只是花盤內花苞生長狀況不佳所造成。

三、Maple 模擬不同發散角所造成花苞生長的結果：

由 Maple 的電腦模擬實驗中發現，使用 360n 的因數當發散角，**只能明顯看見一條螺旋線**，使用非 360n 的因數的有理數當發散角，花苞間空隙明顯縮小，**但是大多也只能明顯看見一條螺旋線**，**可是我們發現當發散角所取的值愈接近黃金比值，花苞螺旋線就愈多，花苞也就愈趨近於緊密**。

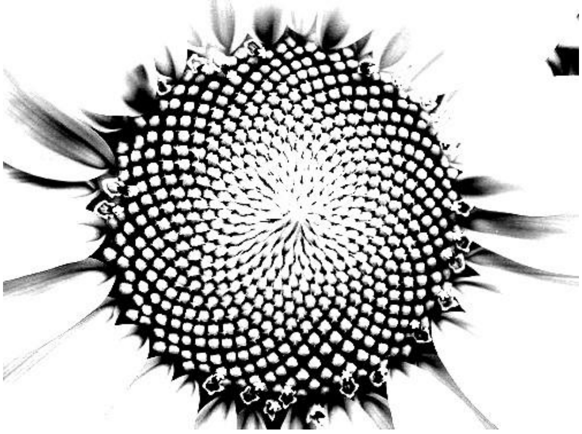
而當我們**以無理數去形成發散角時，確實更容易形成更多順逆螺旋線**，但都無法像使用黃金角來當發散角時，能讓順、逆螺旋線達到如同向日葵花盤內那般密集的程度。

陸、討論

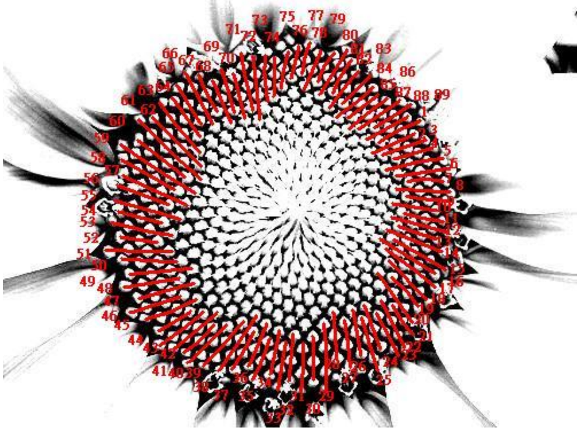
因為費式數列與黃金比例關係密切，所以兩組螺旋線數就剛好是費氏數列的相鄰兩項。我們依照此性質，歸納出向日葵中其他肉眼較看不出的螺旋線數，訝異的發現，無論愈多螺旋線數，或愈少螺旋線數，它們**幾乎**都是費氏數列的其中一項！

那**少數**不屬於費氏數列的部份的情形呢？我們結論發現它必然是**盧卡斯數列**！

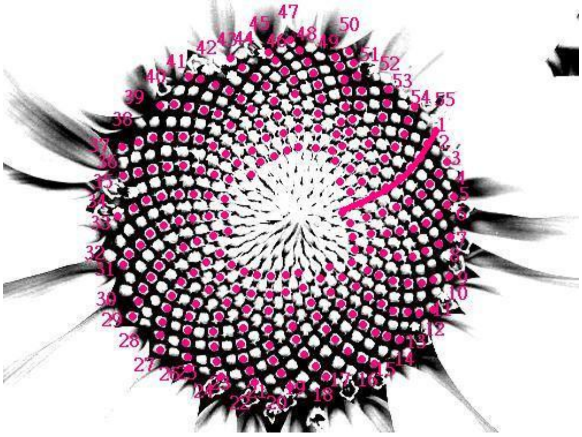
費氏數列組花盤原圖



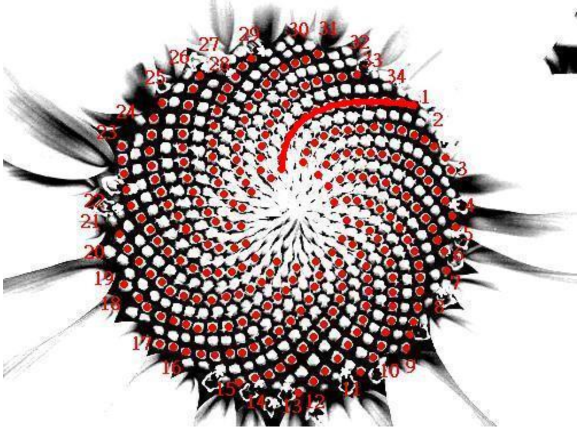
花盤灰階



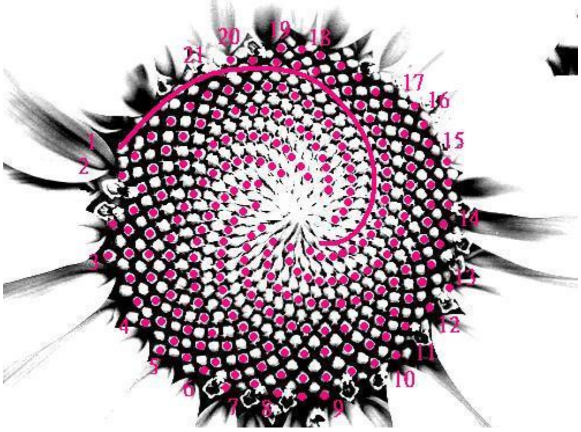
順時針螺旋線數 **89** 條



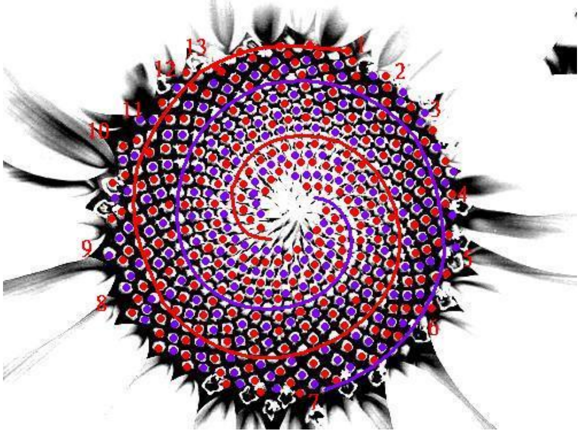
逆時針螺旋線數 **55** 條



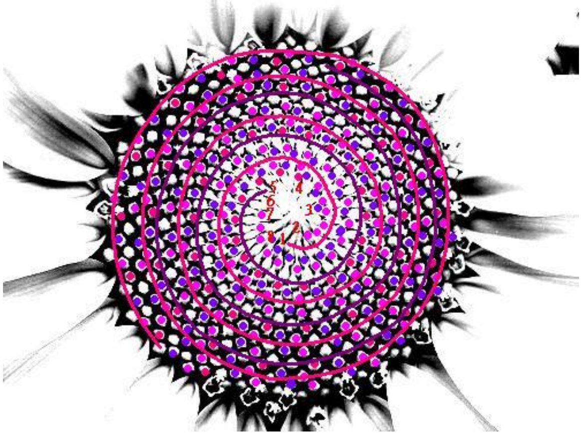
順時針螺旋線數 **34** 條



逆時針螺旋線數 **21** 條

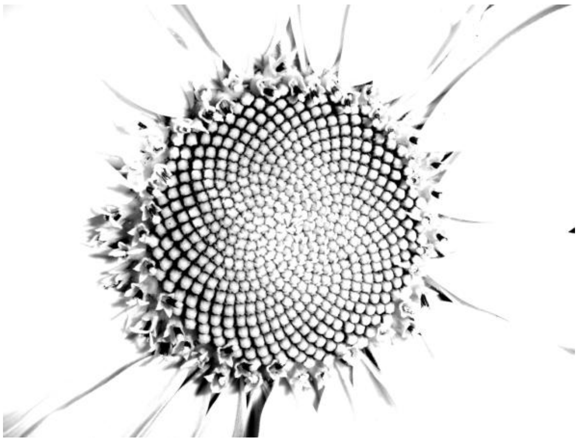


順時針螺旋線數 **13** 條

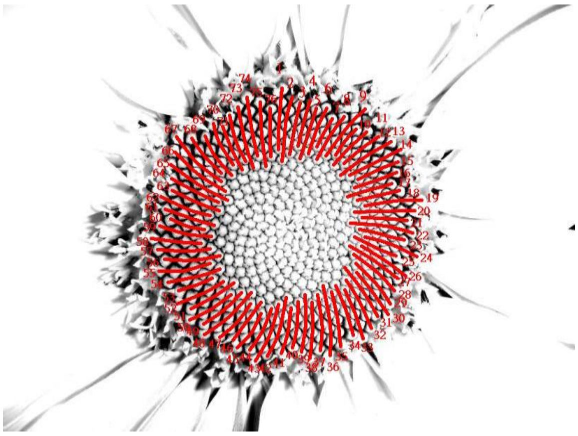


逆時針螺旋線數 **8** 條

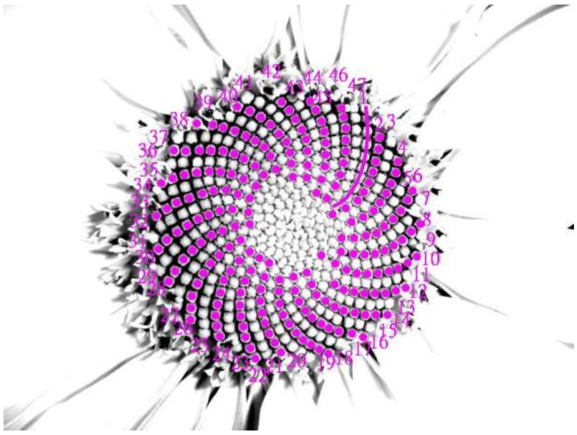
盧卡斯數列組花盤原圖



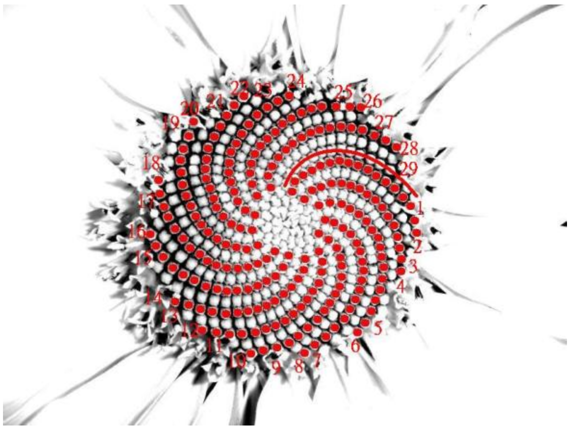
花盤灰階



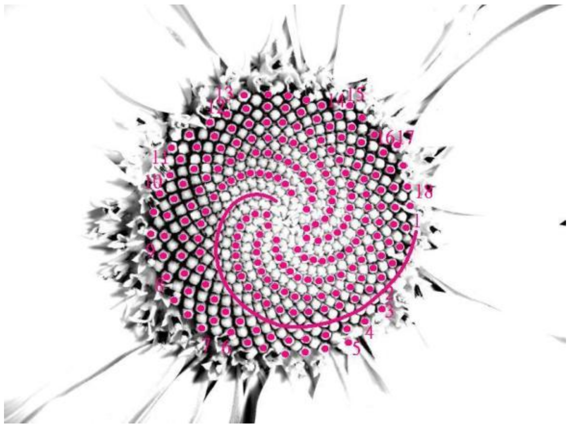
順時針螺旋線數 **76** 條



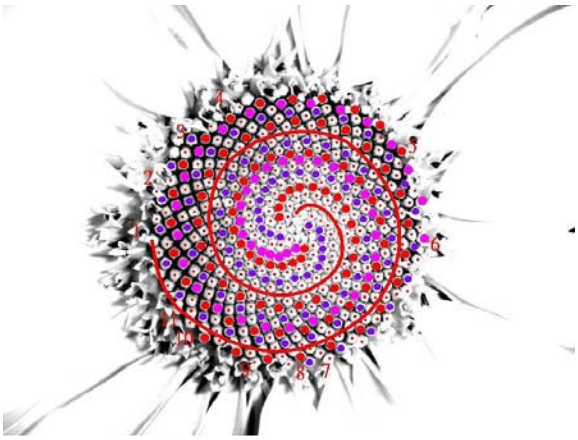
逆時針螺旋線數 **47** 條



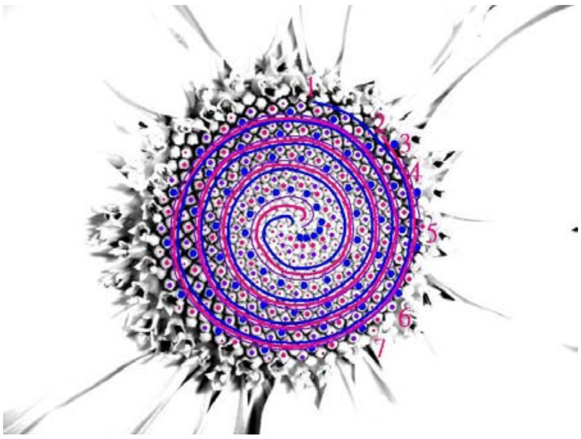
順時針螺旋線數 **29** 條



逆時針螺旋線數 **18** 條



順時針螺旋線數 **11** 條



逆時針螺旋線數 **7** 條

既然向日葵因爲發散角以黃金角比例去形成費氏數列的螺旋線數，然而剩餘的盧卡斯數列組別又是爲何存在於爲數不少的向日葵花盤中呢？

我們針對兩種數列做了下列的運算表，發現盧卡斯數列和費氏數列相鄰兩項數字間存在相同的比值，且都正好是**黃金比值**。

F_n 代表費氏數列的第 n 項

	F_n	F_{n-1} / F_n
n=1	1	
n=2	1	1
n=3	2	0.5
n=4	3	0.666666667
n=5	5	0.6
n=6	**8**	**0.625**
n=7	**13**	**0.615384615**
n=8	**21**	**0.619047619**
n=9	**34**	**0.617647059**
n=10	**55**	**0.618181818**
n=11	**89**	**0.617977528**
n=12	144	0.618055556
n=13	233	0.618025751
n=14	377	0.618037135
n=15	610	0.618032787
n=16	987	0.618034448
n=17	1597	0.618033813
n=18	2584	0.618034056
n=19	4181	0.618033963
n=20	6765	0.618033999
n=21	10946	0.618033985
n=22	17711	0.61803399
n=23	28657	0.618033988
n=24	46368	0.618033989
n=25	75025	0.618033989
n=26	121393	0.618033989
n=27	196418	0.618033989
n=28	317811	0.618033989
n=29	514229	0.618033989
n=30	832040	0.618033989
n=∞		

L_n 代表盧卡斯數列的第 n 項

	L_n	L_{n-1} / L_n
n=1	1	
n=2	3	0.333333333
n=3	4	0.75
n=4	**7**	**0.571428571**
n=5	**11**	**0.636363636**
n=6	**18**	**0.611111111**
n=7	**29**	**0.620689655**
n=8	**47**	**0.617021277**
n=9	**76**	**0.618421053**
n=10	123	0.617886179
n=11	199	0.618090452
n=12	322	0.618012422
n=13	521	0.618042226
n=14	843	0.618030842
n=15	1364	0.618035191
n=16	2207	0.61803353
n=17	3571	0.618034164
n=18	5778	0.618033922
n=19	9349	0.618034014
n=20	15127	0.618033979
n=21	24476	0.618033992
n=22	39603	0.618033987
n=23	64079	0.618033989
n=24	103682	0.618033989
n=25	167761	0.618033989
n=26	271443	0.618033989
n=27	439204	0.618033989
n=28	710647	0.618033989
n=29	1149851	0.618033989
n=30	1860498	0.618033989
n=∞		

當 n 值愈大時，兩數列的前項除以後項都逼近於 0.618033989……

這結果恰巧證明了向日葵擁有不少盧卡斯數列組別的原因，絕非偶然！

上列便是盧卡斯數列花盤的螺旋線情形，無論是順時針或是逆時針旋轉的螺旋線，完全與費氏數列組別的向日葵組成情況相同，唯一的差別只在於不同的數字。

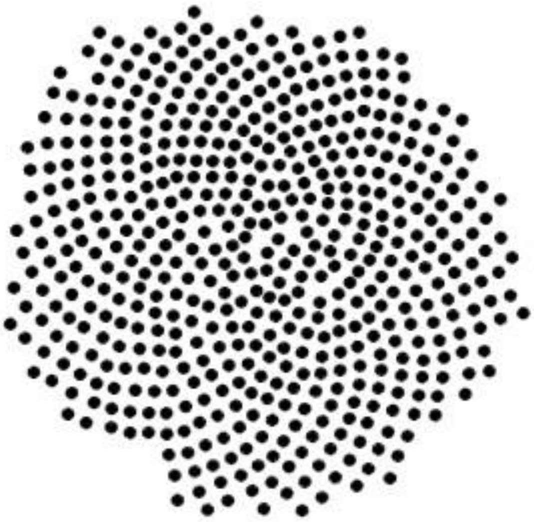
柒、結論

除了費氏數列的螺旋線數排列能達到近乎黃金角之外，盧卡斯數列的螺旋線排列法也能達到近乎於黃金角的情形，也直接證明了爲何向日葵能同時具有此兩種特殊數列的螺旋線數的原因。

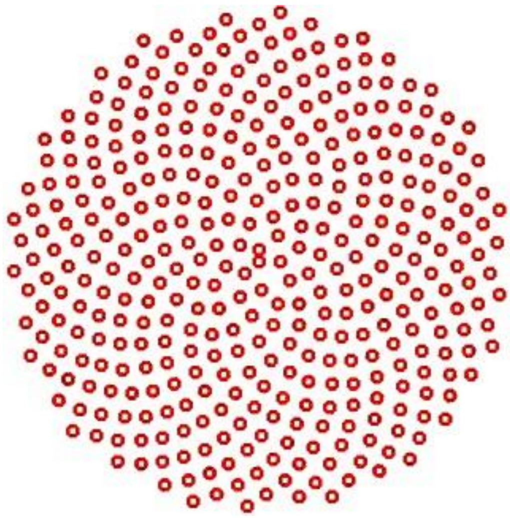
我們研究過程中發現，多數探討向日葵或植物生成螺線的資料中，提及的都是它們與費氏數列的關係，再而解釋費氏數列與黃金比例的關係，以說服大家能相信生物擁有與黃金比例密不可分的微妙之處。我們本想從實際的眾多向日葵花朵中，找到向日葵與費氏數列相關的確切證據，卻無意間發現原來向日葵中除了「**費氏數列**」外，還擁有另一種數列的存在，也就是「**盧卡斯數列**」。而此數列雖和費氏數列不同，但形成方式卻費氏數列有著極大的相關性，而這個最重要的相關性，就是「**黃金比例**」。

更重要的是，向日葵除了是菊科裡最巨大的花朵外，爲了生存，它想要在它花盤內的有限空間裡長出最多的種子，唯一的方式，就是讓每個小花苞儘可能依最密集的方式去排列。而最有效用的方式，便是讓花苞按照黃金比例的對應關係去排列成長。

以下就是向日葵花苞生長的實際狀況和模擬狀況的比對結果：



花苞實際排列狀況



花苞模擬排列狀況

證明向日葵以「**黃金比值**」這種「**無理數中最特殊**」的數來做發散角時，最符合生物**有利繁衍**的需要。

向日葵不必學數學，但它比人類更懂得運用數學呢！

捌、參考資料及其他

一、Ian Stewart（1998）, Life’s Other Secret：The New Mathematics of the Living World ，天下文化書坊

二、「先知預言」斐波那契及費氏數列不爲人知的驚世秘密, http://www.verycd.com/groups/g950g950/167285.topic/page1

三、斐波纳契數字和在藝術、建築學和音樂的黃金分割 ， http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html

四、Fibonacci Numbers and Nature ， http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html#pinecones

五、生物的數學遊戲 ， http://163.21.42.19/mathpath/%E7%AC%AC%E4%B8%83%E7%AB%99/2.htm

六、費氏數列及黃金切割， http://xserve.math.nctu.edu.tw/people/cpai/carnival/fibonacci/index.htm

【評語】030409

費伯那西數列與盧卡斯數列皆為先人早已在生物界發現的型態。作者們合作勤勞的在家居鄰區校園中探視相關現象，先對對稱性加以識別，再大量採集紀錄向日葵，細數其中的螺旋線，確認費氏數與盧氏數，且用電腦模擬進行實驗比對，在生物現象與高科技間建立關係，在生物世界中迎接數學，也讓數學走向生物學，值得鼓勵。

然而附錄1、2多采多姿，尚處於知識的預備階段，有待進一步探究現象後之本質，請合作閱讀參考資料第一項由天下出版的〝奧秘生命外一章〞，亦請修正研究結果（伍）中綜合的對稱關係。本作品中所採集的花朵雖接近兩百，數量不算少，但代表性待檢驗，是以製作統計圖表（長條圖、圓形圖）的意義應不在本研究的旨趣之內。