中華民國第53屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030421

三角形鋪砌挑戰費氏數列

學校名稱：臺中市立中山國民中學

作者：	指導老師：
國三 邱渝萍	魏君伃
國三 賈千躍	黃富翔
國三 洪意淨	

關鍵詞：數列、相似形、面積比

摘要

本研究在探討 A. Einstein 所提出的三角形鋪砌凸多邊形問題：”分別用$1,2,3,\ldots,N$ 個從1開始的整數邊正三角形鋪砌一凸多邊形。問：怎樣鋪砌所構成的凸多邊形面積為最大？”我們藉由觀察鋪砌正三角形的點、線、面關係發現以下幾點：

一、鋪砌出的凸多邊形之頂點數（V）、邊數（E）、面數（F）具有$V-E+F=1$的性質，而當所鋪砌的圖形為一凹多邊形時，則其性質變成$V-E+F=2$。

二、當$N\geq 4$時，最大面積凸多邊形必為五邊形。

三、所鋪砌出的最大面積凸多邊形，其正三角形的邊長具有類似費氏數列的規律。
$1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16,21,28,37,\ldots$

四、由黃金比例的探討發現，邊長數列雖也可繪製出類似鸚鵡螺曲線，但其曲線的半徑比卻無黃金比例的性質。

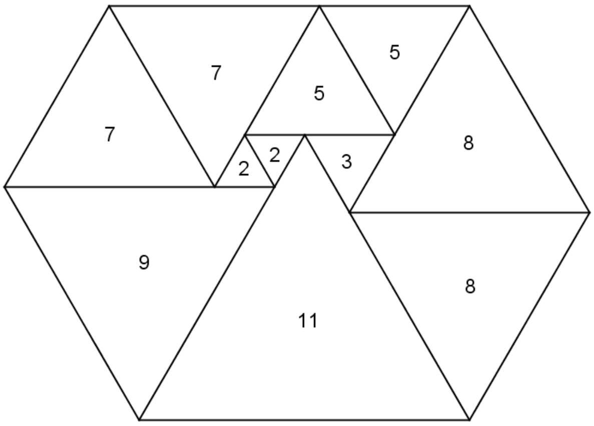
五、後項與前項的比值趨近1.333，若用隔一項的比則會趨近於1.75。用最大正三角形的邊長與高的比則趨近1.539。

壹、 研究動機

在一次偶然的機會下，我們從學校的圖書館借了一本名為歷史數學名題賞析⑥的書，書中的第10章有一篇談到Einstein三角形，其主要的內容是在描述由A. Einstein所提出的三角形鋪砌凸多邊形的問題，他所提的問題是：”分別用$1,2,3,\cdots,N$個從1開始的整數邊正三角形鋪砌一個凸多邊形。問：怎樣鋪砌所構成的凸多邊形的面積為最大？”。針對此問題書中只概略的說明A. Einstein並沒有找到一般的規律，但有給出$N=1\sim 11$的結論，如下表所示，其中N代表正三角形的個數，S則代表所鋪砌的凸多邊形最大面積。

個數 N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
面積 S	1	2	3	7	11	20	36	71	146	260	495

另外書中也提供了一個$N=11$時所鋪砌出面積為最大的凸多邊形，如下圖所示：



從圖中我們發現若$N=11$的圖形似乎與問題有所違背，因為正三角形的邊長必須從1開始，然而圖中的正三角形邊長卻是從2開始鋪砌，所以我們認為$N=11$的結果應該是錯誤的，但問題是正確的答案為何？

貳、研究目的

一、探討由邊長1開始的正三角形所鋪砌的凸多邊形之規律。
二、探討每個凸多邊形中所包含的的頂點數、邊數、面數有何規律。
三、探討凸多邊形的最大面積與其邊數是否有規律。
四、探討其規律和黃金比例、鸚鵡螺是否有相關性。

參、研究設備及器材

一、電腦
二、紙
三、筆
四、Gsp、PhotoImpact、Word

肆、研究過程或方法

一、以圖解的分式探討 $N=1\sim 9$ 的鋪砌規則

首先我們用各種面積大小不同的正三角形來鋪砌凸多邊形，並以 N 表示所使用的三角形個數。如下（表1）分別用1,2,3,⋯,9 個從1開始的整數邊正三角形鋪砌一個凸多邊形，並透過圖形的頂點數（ V ）、邊數（ E ）及面數（ F ）的關係來觀察其圖形的特性。

為了進一步分析圖形的特性，我們應用在歷史數學名題賞析⑥書中所提到的，數學家歐拉在研究任意的凸多面體時，發現凸多面體頂點數（ V ）、邊數（ E ）與面數（ F ）之間存在著以下的奇妙關係：

$$V-E+F=2$$

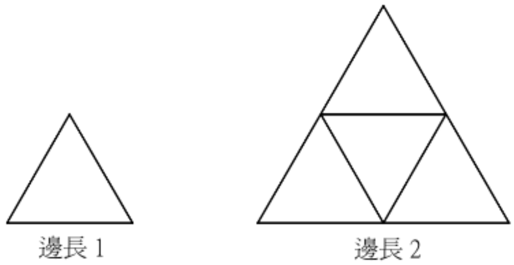
因此我們也希望能透過此一特殊關係，看看是否在鋪砌的凸多邊形中，也有存在這樣的性質。

由於多個不同邊長的正三角形在鋪砌後，會有許多邊是共用的情況，因此為了讓頂點數（ V ）與邊數（ E ）的計算有所依據，我們將邊數（ E ）與頂點數（ V ）的計算定義如下：

邊數（ E ）：若 n 點共線時則只算最長的那一條線，且線段不能相交，若有相交則只選取一條，其他以小段計算。

頂點數（ V ）：若共線的頂點其與其它頂點形成一封閉區間時，則只計算線段端點。

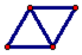
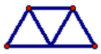
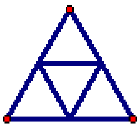
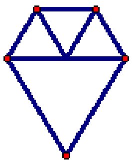
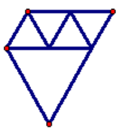
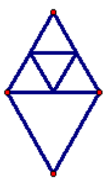
另外為了方便說明所求得的最大面積，我們先定義邊長為1的正三角形其面積為 a ，其餘不同邊長的正三角形與邊長為1的正三角形之間互為相似形，因此其面積則可以利用相似形的面積比等於邊長的平方比依此類推：

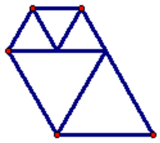
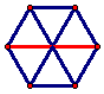
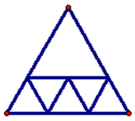
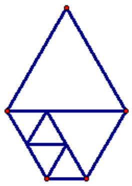
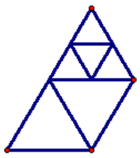
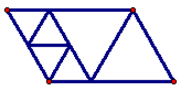
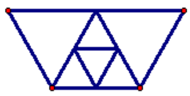


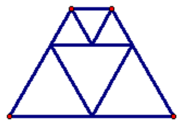
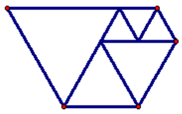
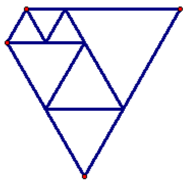
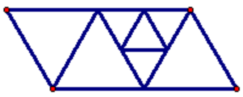
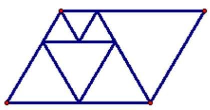
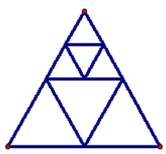
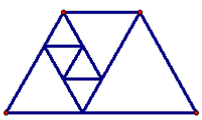
例如邊長2與邊長1的邊長比為 $\frac{2}{1}$ ，則面積比為 $\frac{2^2}{1^2}=\frac{4}{1}$ ，若邊長1的面積為 a ，則邊長2的面積則為 $4a$ 。

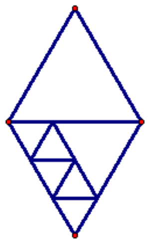
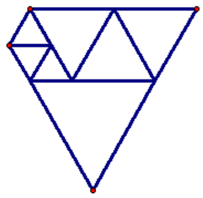
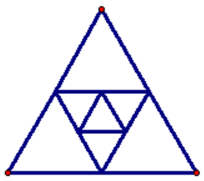
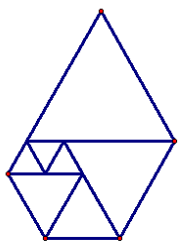
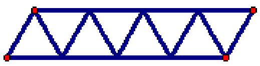
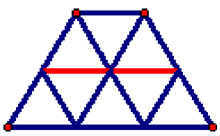
三角形邊長	三角形面積
1	a
2	$2^2a=4a$
3	$3^2a=9a$
4	$4^2a=16a$
5	$5^2a=25a$
6	$6^2a=36a$
7	$7^2a=49a$
8	$8^2a=64a$
9	$9^2a=81a$

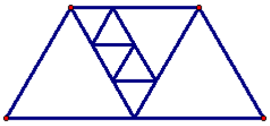
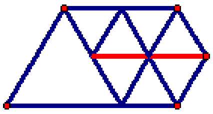
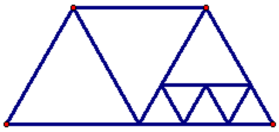
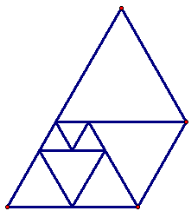
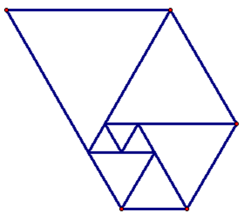
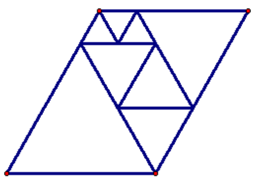
表1 $N=1\sim9$ 所排列出的多邊形

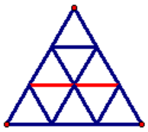
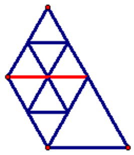
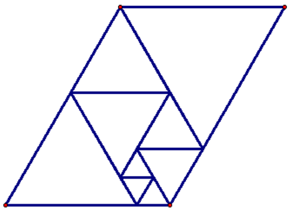
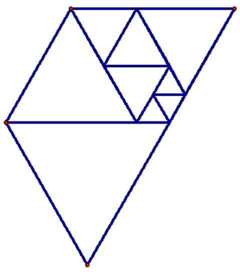
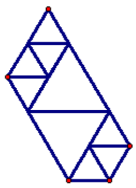
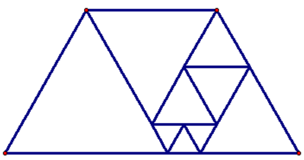
個數	圖形排列	頂點數	邊數	面數	$V-E+F$	面積
$N=1$	 邊長：1	3	3	1	3－3＋1=1	a
$N=2$	 邊長：1,1	4	5	2	4－5＋2=1	$a+a=2a$
$N=3$	 邊長：1,1,1	4	6	3	4－6＋3=1	$a+a+a=3a$
$N=4$	 邊長：1,1,1,1	4	7	4	4－7＋4=1	$a+a+a+a=4a$
	 邊長：1,1,1,1	3	6	4	3－6＋4=1	$a+a+a+a=4a$
	 邊長：1,1,1,2	5	8	4	5－8＋4=1	$a+a+a+4a=7a$
$N=5$	 邊長：1,1,1,1,1	4	8	5	4－8＋5=1	$a+a+a+a+a=5a$
	 邊長：1,1,1,1,2	4	8	5	4－8＋5=1	$a+a+a+a+4a=8a$
	 邊長：1,1,1,1,2	4	8	5	4－8＋5=1	$a+a+a+a+4a=8a$

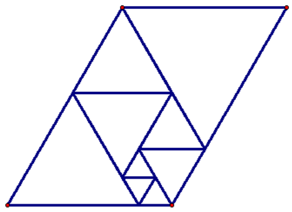
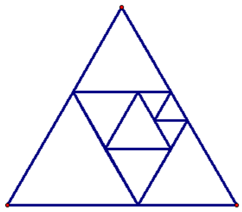
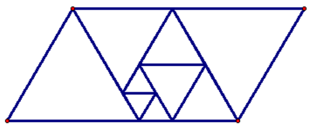
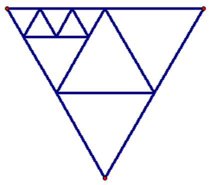
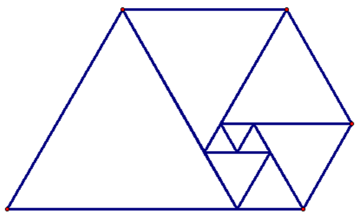
	 邊長：1,1,1,2,2	5	9	5	5－9＋5=1	$a+a+a+4a+4a=11a$
$N=6$	 邊長：1,1,1,1,1,1	4	9	6	4－9＋6=1	$a+a+a+a+a+a=6a$
	 邊長：1,1,1,1,1,1	6	11	6	6－11＋6=1	$a+a+a+a+a+a=6a$
	 邊長：1,1,1,1,1,2	3	8	6	3－8＋6=1	$a+a+a+a+a+4a=9a$
	 邊長：1,1,1,1,2,3	5	10	6	5－10＋6=1	$a+a+a+a+4a+9a=17a$
	 邊長：1,1,1,1,2,2	4	9	6	4－9＋6=1	$a+a+a+a+4a+4a=12a$
	 邊長：1,1,1,1,2,2	4	9	6	4－9＋6=1	$a+a+a+a+4a+4a=12a$
	 邊長：1,1,1,1,2,2	4	9	6	4－9＋6=1	$a+a+a+a+4a+4a=12a$

	 邊長：1,1,1,2,2,2	4	9	6	4－9＋6=1	$a+a+a+4a+4a+4a=15a$
	 邊長：1,1,1,2,2,3	5	10	6	5－10＋6=1	$a+a+a+4a+4a+9a=20a$
$N=7$	 邊長：1,1,1,1,1,1,1	4	10	7	4－10＋7=1	$a+a+a+a+a+a+a=7a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3	4	10	7	4－10＋7=1	$a+a+a+4a+4a+4a+9a=24a$
	 邊長：1,1,1,1,2,2,2	4	10	7	4－10＋7=1	$a+a+a+a+4a+4a+4a=16a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3	4	10	7	4－10＋7=1	$a+a+a+4a+4a+4a+9a=24a$
	 邊長：1,1,1,1,2,2,2	3	9	7	3－9＋7=1	$a+a+a+a+4a+4a+4a=16a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3	4	10	7	4－10＋7=1	$a+a+a+a+4a+4a+9a=21a$

	 邊長：1,1,1,1,1,2,3	4	10	7	4－10＋7=1	$a+a+a+a+a+4a+9a=18a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3	4	10	7	4－10＋7=1	$a+a+a+4a+4a+4a+9a=24a$
	 邊長：1,1,1,1,2,2,2	3	9	7	3－9＋7=1	$a+a+a+a+4a+4a+4a=16a$
	 邊長：1,1,1,2,2,4,4	5	11	7	5－11＋7=1	$a+a+a+4a+4a+9a+16a=36a$
$N=8$	 邊長：1,1,1,1,1,1,1,1	4	11	8	4－11＋8=1	$a+a+a+a+a+a+a+a=8a$
	 邊長：1,1,1,1,1,1,1,1	4	11	8	4－11＋8=1	$a+a+a+a+a+a+a+a=8a$

	 邊長：1,1,1,1,1,2,3,3	4	11	8	4－11＋8=1	$a+a+a+a+a+$ $4a+9a+9a=27a$
	 邊長：1,1,1,1,1,1,1,2	5	12	8	5－12＋8=1	$a+a+a+a+a+$ $a+a+4a=11a$
	 邊長：1,1,1,1,1,2,3,3	4	11	8	4－11＋8=1	$a+a+a+a+a+$ $4a+9a+9a=27a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3,4	4	11	8	4－11＋8=1	$a+a+a+4a+4a+$ $4a+9a+16a=40a$
	 邊長：1,1,1,2,2,3,4,5	5	12	8	5－12＋8=1	$a+a+a+4a+4a+$ $9a+16a+25a=61a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3,4	4	11	8	4－11＋8=1	$a+a+a+4a+4a+$ $4a+9a+16a=40a$
$N=9$	 邊長：1,1,1,1,1,1,1,1,1	4	12	9	4－12＋9=1	$a+a+a+a+a+$ $a+a+a+a=9a$

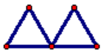
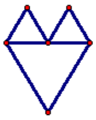
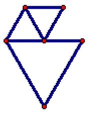
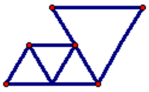
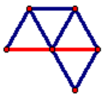
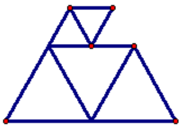
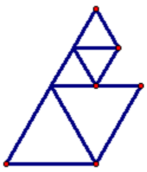
	 邊長：1,1,1,1,1,1,1,1,1	3	11	9	3－11+9=1	$a+a+a+a+a+a+a+a+a=9a$
	 邊長：1,1,1,1,1,1,1,1,2	4	12	9	4－12+9=1	$a+a+a+a+a+a+a+a+4a=12a$
	 邊長：1,1,1,2,2,3,3,4,5	4	12	9	4－12+9=1	$a+a+a+4a+4a+9a+9a+16a+25a=70a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3,4,5	4	12	9	4－12+9=1	$a+a+a+4a+4a+4a+9a+16a+25a=65a$
	 邊長：1,1,1,1,1,1,1,2,2	5	13	9	5－13+9=1	$a+a+a+a+a+a+a+4a+4a=15a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3,4,5	4	12	9	4－12+9=1	$a+a+a+4a+4a+4a+9a+16a+25a=65a$

	 邊長：1,1,1,2,2,3,3,4,5	4	12	9	4－12+9=1	$a+a+a+4a+4a+9a+9a+16a+25a=70a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3,3,4	3	11	9	3－11+9=1	$a+a+a+4a+4a+4a+9a+9a+16a=49a$
	 邊長：1,1,1,2,2,2,3,4,5	4	12	9	4－12+9=1	$a+a+a+4a+4a+4a+9a+16a+25a=56a$
	 邊長：1,1,1,1,1,2,3,3,3	3	11	9	3－11+9=1	$a+a+a+a+a+4a+9a+9a+9a=36a$
	 邊長：1,1,1,2,2,3,4,5,7	5	13	9	5－13+9=1	$a+a+a+4a+4a+9a+16a+25a+49a=110a$

由（表 1）的結果，我們發現將頂點數（V）、邊數（E）與面數（F）代入尤拉示性數後，都滿足$V-E+F=1$的特性，因此我們猜想此一特性是否可以用來判別所鋪砌出來的圖形是不是一個凸多邊形？

為了解開這個疑惑，我們再以幾個凹多邊形來驗證是否可以用$V-E+F=1$來判別是否為多邊形，並整理成下（表 2）。

表 2 凹多邊形之$V-E+F$

個數	圖形排列	頂點數	邊數	面數	$V-E+F$
$N=2$	 邊長：1,1	5	5	2	5－5＋2=2
$N=3$	 邊長：1,1,2	6	7	3	6－7＋3=2
	 邊長：1,1,2	6	7	3	6－7＋3=2
$N=4$	 邊長：1,1,1,2	6	8	4	6－8＋4=2
	 邊長：1,1,1,1	6	8	4	6－8＋4=2
$N=5$	 邊長：1,1,2,2,2	6	9	5	6－9＋5=2
	 邊長：1,1,1,2,2	6	9	5	6－9＋5=2

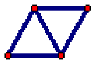
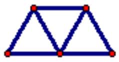
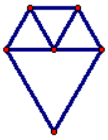
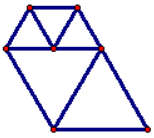
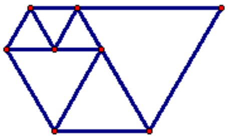
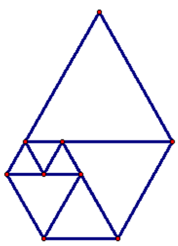
由（表 2）的結果可知我們的猜想應該是可行的。因此我們認為可以利用本研究所提出的$V-E+F=1$之計算方法來檢驗所鋪砌出的多邊形是否為凸多邊形。

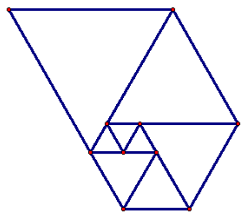
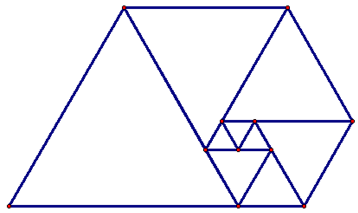
二、探討最大面積之多邊形

（一）邊長的規律性探討

由（表1）中發現在$N=1\sim9$的情況下不同的鋪砌方法確實能鋪砌出最大面積的凸多邊形，我們將（表1）中的最大面積凸多邊形整理成下（表3）：

表3 $N = 1 \sim 9$ 的最大面積凸多邊形

個數	圖形排列
$N = 1$	 邊長：1
$N = 2$	 邊長：1,1
$N = 3$	 邊長：1,1,1
$N = 4$	 邊長：1,1,1,2
$N = 5$	 邊長：1,1,1,2,2
$N = 6$	 邊長：1,1,1,2,2,3
$N = 7$	 邊長：1,1,1,2,2,3,4

$N=8$	 邊長：1,1,1,2,2,3,4,5
$N=9$	 邊長：1,1,1,2,2,3,4,5,7

由（表3）的結果發現，從 $N=5$ 開始所鋪砌出的最大面積凸多邊形似乎有其規律性，而且若將所鋪砌的正三角形邊長由小而大排列，則可得一個數列，但此一邊長數列是否也有其排列的規律可尋？

為此我們花了好長一段時間在探討，最後由費氏數列的靈感讓我們終於找到了它的規律。首先讓我們以 $N=9$ 的情況為例，其所鋪砌出的正三角形邊長數列的方式表示為：

$$A=1,1,1,2,2,3,4,5,7$$

因此數列 A 的每一項為：

$a_1=1$
$a_2=1$
$a_3=1$
$a_4=2$
$a_5=2$
$a_6=3$
$a_7=4$
$a_8=5$
$a_9=7$

我們發現從第四項開始，每一項會等於前二及前三兩項的和，即

$a_4=a_1+a_2=1+1=2$
$a_5=a_2+a_3=1+1=2$
$a_6=a_3+a_4=1+2=3$
$a_7=a_4+a_5=2+2=4$
$a_8=a_5+a_6=2+3=5$

$a_9 = a_6 + a_7 = 3 + 4 = 7$

因此依這樣的規律，我們就可以推導出：

$a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_3 = 1$，則第 m 項 a_m 就可以表示成第（1）式：

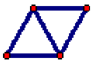
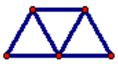
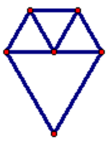
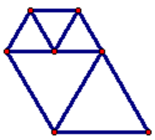
$a_m = a_{m-3} + a_{m-2}$，$m = 4,5,6,\cdots$ ----------（1）

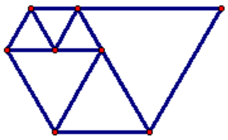
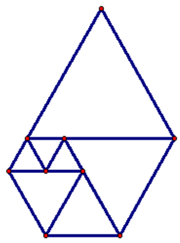
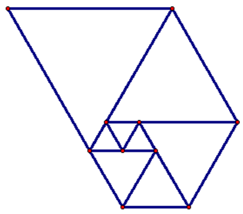
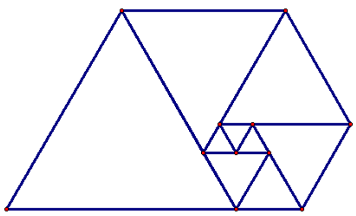
第（1）式中的 m 即為所要鋪砌的正三角形個數 N，因此若要取 N 個邊長由1開始的正三角形鋪砌出一個面積最大的凸多邊形，則其取法為取3個邊長為1的正三角形，接下來再分別令 $m = 4 \sim N$ 代入第（1）式，即可決定要取出的邊長為何。

（二）面積的計算

同樣的，我們將表（1）中所鋪砌出的最大面積凸多邊形整理成（表4）：

表4 最大面積凸多邊形的面積

個數	圖形排列	面積
$N = 1$	 邊長：1	a
$N = 2$	 邊長：1,1	$a + a = 2a$
$N = 3$	 邊長：1,1,1	$a + a + a = 3a$
$N = 4$	 邊長：1,1,1,2	$a + a + a + 2^2 a = 7a$
$N = 5$	 邊長：1,1,1,2,2	$a + a + a + 2^2 a + 2^2 a = 11a$

$N=6$	 邊長：1,1,1,2,2,3	$a+a+a+2^2a+2^2a+3^2a=20a$
$N=7$	 邊長：1,1,1,2,2,3,4	$a+a+a+2^2a+2^2a+3^2a+4^2a=36a$
$N=8$	 邊長：1,1,1,2,2,3,4,5	$a+a+a+2^2a+2^2a+3^2a+4^2a+5^2a=61a$
$N=9$	 邊長：1,1,1,2,2,3,4,5,7	$a+a+a+2^2a+2^2a+3^2a+4^2a+5^2a+7^2a$ $=110a$

由（表 4）的結果可以發現所鋪砌出的凸多邊形，其面積會等於邊長數列的各項平方和，即邊長數列若為 1,1,1,2,2,3,4,5,7，則其面積會等於

$$\text{面積}=\left(1+1+1+2^2+2^2+3^3+4^2+5^2+7^2\right)\times\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{----------（2）}$$

第（2）式中，因為邊長為 1 的正三角形其面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}$，因若依此規則所鋪砌出的凸多邊形面積可以表示成：

$$\text{面積}=\left(1+1+1+2^2+\cdots+a_N^2\right)\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\left(3+\sum_{i=4}^{N}a_i^2\right)\times\frac{\sqrt{3}}{4}\text{，}a_1=a_2=a_3=1\text{，}N>3 \quad \text{-----（3）}$$

因第（3）式中的$a_i=a_{i-3}+a_{i-2}$，因此可將第（3）式修改成第（4）式：

面積 $=\left(3+\sum_{i=4}^{N}\left(a_{i-3}+a_{i-2}\right)^2\right)\times\frac{\sqrt{3}}{4}$，$a_1=a_2=a_3=1$，$N>3$ ----------（4）

為了檢驗第（4）式是否正確，我們分別令 $N=4,5,6,\cdots,9$ 代入第（1）式及第（4）式計算其結果是否相符，並整理成（表 5）

表 5 $N=4\sim9$ 最大面積計算結果（令 $k=\frac{\sqrt{3}}{4}$）

N	面積
$N=4$	$=\left(3+\sum_{i=4}^{4}\left(a_{i-3}+a_{i-2}\right)^2\right)\times k=\left[3+\left(a_1+a_2\right)^2\right]\times k=\left[3+(1+1)^2\right]\times k=7k$
$N=5$	$=\left(3+\sum_{i=4}^{5}\left(a_{i-3}+a_{i-2}\right)^2\right)\times k=\left[3+\left(a_1+a_2\right)^2+\left(a_2+a_3\right)^2\right]\times k$ $=\left[3+(1+1)^2+(1+1)^2\right]\times k=11k$
$N=6$	$=\left(3+\sum_{i=4}^{6}\left(a_{i-3}+a_{i-2}\right)^2\right)\times k=\left[3+\left(a_1+a_2\right)^2+\left(a_2+a_3\right)^2+\left(a_3+a_4\right)^2\right]\times k$ $=\left[3+(1+1)^2+(1+1)^2+(1+2)^2\right]\times k=20k$
$N=7$	$=\left(3+\sum_{i=4}^{7}\left(a_{i-3}+a_{i-2}\right)^2\right)\times k=\left[3+\left(a_1+a_2\right)^2+\left(a_2+a_3\right)^2+\left(a_3+a_4\right)^2+\left(a_4+a_5\right)^2\right]\times k$ $=\left[3+(1+1)^2+(1+1)^2+(1+2)^2+(2+2)^2\right]\times k=36k$
$N=8$	$=\left(3+\sum_{i=4}^{8}\left(a_{i-3}+a_{i-2}\right)^2\right)\times k=\left[3+\left(a_1+a_2\right)^2+\left(a_2+a_3\right)^2+\cdots+\left(a_5+a_6\right)^2\right]\times k$ $=\left[3+(1+1)^2+(1+1)^2+(1+2)^2+(2+2)^2+(2+3)^2\right]\times k=61k$
$N=9$	$=\left(3+\sum_{i=4}^{8}\left(a_{i-3}+a_{i-2}\right)^2\right)\times k=\left[3+\left(a_1+a_2\right)^2+\left(a_2+a_3\right)^2+\cdots+\left(a_6+a_7\right)^2\right]\times k$ $=\left[3+(1+1)^2+(1+1)^2+(1+2)^2+(2+2)^2+(2+3)^2+(3+4)^2\right]\times k=110k$

將（表 5）與（表 4）對照後發現 $N=4\sim9$ 所計算出來的面積是一樣的，因此證明利用第（4）式確實可以求得凸多邊形的面積。

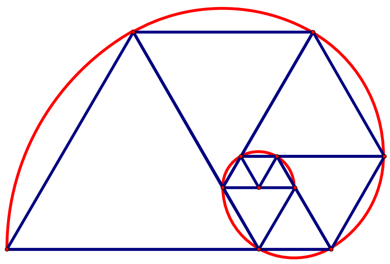
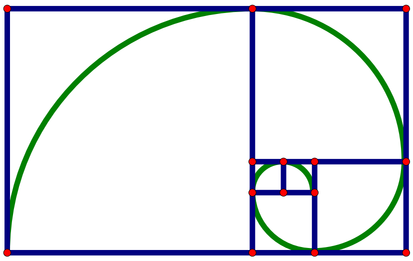
三、探討邊長數列與黃金比例的關係：

由於費氏數列具有黃金比例的關係，因此我們想進一步探討本研究的邊長數列是否也具有特殊的比例，以下我們利用鸚鵡螺來探討鋪砌三角形的邊長數列與費氏數列間的差異

（1）數列與鸚鵡螺黃金比例的關係

下圖為鸚鵡螺的剖面圖，我們將本研究所歸納出的邊長數列與費氏數列應用於繪製鸚鵡螺的圖形，並將結果整理成（表 6）。

表 6　數列與鸚鵡螺黃金比例的關係

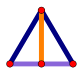
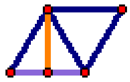
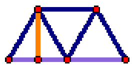
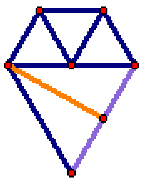
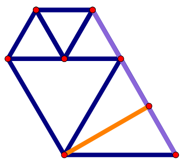
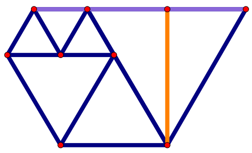
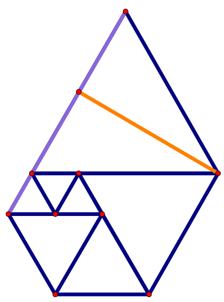
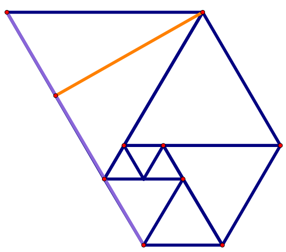
比較名稱	鋪砌三角形	費氏數列
數列	1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16,21,28,37,49,…..	1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…………
比值	$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx 1.33$ $\frac{a_n}{a_{n-2}} \approx 1.75$	$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx 1.618$
圖示		

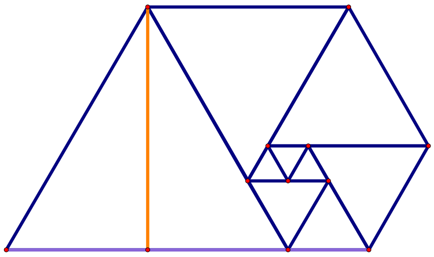
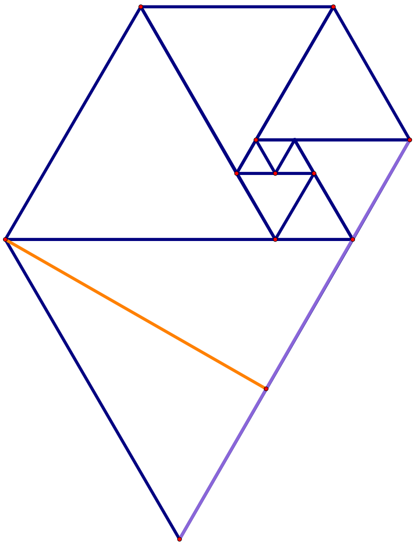
由（表 6）的結果發現費氏數列的後項與前項的比值最後會趨近於1.618，但本研究所提出的邊長數列比值則為趨近於1.33，若改成後項與前二項的比，其比值則會趨近於1.75，明顯與費氏數列不同。

（2）探討正三角形鋪砌的最大邊長與最大正三角形高的比是否具有特殊的比例關係

由於在數列與鸚鵡螺黃金比例的關係中，我們發現鋪砌三角形的邊長數列並不具有黃金比例的關係，因此我們更進一步的探討正三角形鋪砌的最大邊長與最大正三角形高的比是否具有黃金比例，我們將結果整理成下（表 7）

表 7　正三角形鋪砌的最大邊長與最大正三角形高的比值

正三角形鋪砌最大面積多邊形 紫色：最大邊長 橙色：最大正三角形高	最大邊長：最大正三角形高
	$1:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1$　比值=1.154
	$1:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1$　比值=1.154
	$2:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1$　比值= 2.309
	$2:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2$　比值= 1.154
	$3:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2$　比值= 1.732
	$4:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3$　比值= 1.539
	$5:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4$　比值= 1.445
	$7:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 5$　比值= 1.616

	$9:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 7$ 比值= 1.484
	$12:\frac{\sqrt{3}}{2}\times 9$ 比值= 1.539

因此最大邊長與最大正三角形高的比值： $a_n:\frac{\sqrt{3}}{2}\times a_{\text{n-1}}$ 比值 ≈ 1.529

伍、研究結果

一、$V-E+F=1$

由研究的過程我們發現不管 N 等於多少，其鋪砌出的凸多邊形之頂點數（V）、邊數（E）、面數（F）具有 $V-E+F=1$ 的性質，而當所鋪砌的圖形為一凹多邊形時，則其性質變成 $V-E+F=2$，因此可以利用 $V-E+F=1$ 來判別所鋪砌出的多邊形是否為凸多邊形。

二、當 $N\geq 4$ 時，則最大面積凸多邊形必為五邊形

由（表 3）的結果可以看出當 $N\geq 4$ 時，所排出的最大面積凸多邊形必為五邊形。

三、N 個三角形之邊長具有類似費氏數列的規律

若要取 N 個邊長由 1 開始的正三角形鋪砌出一個最大面積之凸多邊形，則其邊長的取法為一具有特殊規律的數列：

$1,1,1,2,2,3,4,5,7,\cdots$

我們可以發現邊長數列中的第 4 項等於第一項與第二項的和，第五項等於第二項與第三項的和，此好與費氏數列的規類似，只是本研究的邊長數列為前三項都是 1，而下一項會等於前二項及前三項的和，剛好跳過前一項，因此數列的方式表示：

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=1$，則第 m 項 a_m：

$a_m = a_{m-3} + a_{m-2}$ ， $m = 4,5,6,\cdots$

四、所鋪出的凸多邊形 面積 $= \left(3 + \sum_{i=4}^{N}(a_{i-3} + a_{i-2})^2\right) \times \frac{\sqrt{3}}{4}$ ， $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ， $N > 3$

五、經由數列與黃金比例的探討發現，本研究的邊長數列之後項與前項的比值為：

$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx 1.33$ （後項：前項）

$\frac{a_n}{a_{n-2}} \approx 1.75$ （後項：前二項）

六、最大邊長與最大正三角形高的比值為：

$a_n : \frac{\sqrt{3}}{2} \times a_{n\text{-}1}$ 比值 ≈ 1.529

陸、討論

一、本研究發現不管 N 等於多少，其鋪砌出的凸多邊形之頂點數（ V ）、邊數（ E ）、面數（ F ）具有 $V - E + F = 1$ 的性質，而凹多邊形時，變成 $V - E + F = 2$ 的性質，此一性質可以用來判別所鋪砌出的多邊形是否為凸多邊形，但要注意的是頂點數（ V ）、邊數（ E ）的計算方式，否則便無法成立。

二、由本研究的結果發現，我們在 $N = 1 \sim 7$ 的最大面積與書中所給的是一樣的，但從 $N = 8$ 之後的結果卻不相同，到底是我們的推論有問題？還是書中的表格從 $N = 8$ 之後其起始邊長變成不是1，若起始邊長不是1的話，那麼書中 $N = 11$ 的圖形就不是唯一的，如下（圖 1）所示，因為由相似形的原理可知，只要每一個正三角形的邊長同時乘上某一倍數，則其圖形仍能維持緊密鋪砌，因此我們認為不論 N 為多少，正三角形的邊長都必須從1開始，否則就沒要探討的意義。

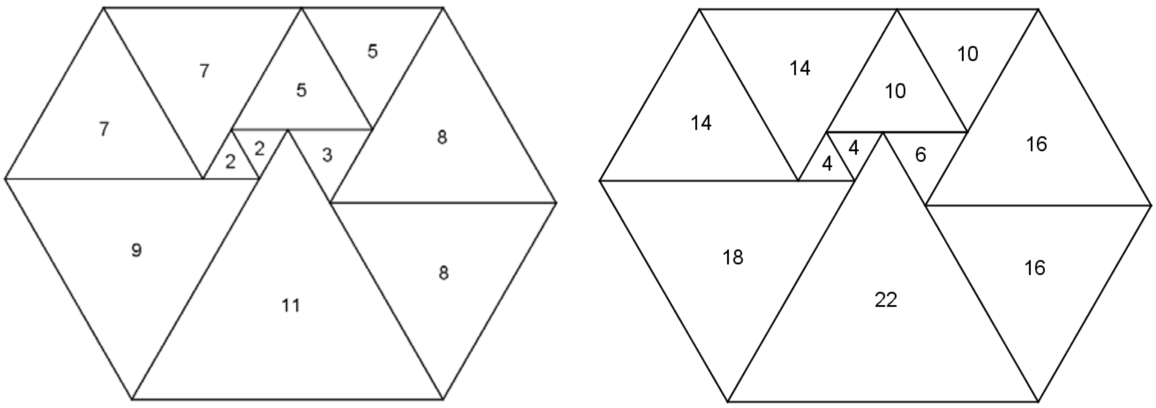


圖 1 將左邊圖形中的各個邊長乘以2可得右邊的圖形

三、本研究的結果在 $N=1\sim7$ 的情況下是與書中的結果是相同的，再加上討論二的推論，我們發現不管 N 為多少，若正三角形的邊長必須從1開始，則其鋪砌的邊長會具有類似費氏數列的規則，而且依此方式所鋪砌出的最大面積凸多邊形，在 $N=4$ 之後其圖形皆為五邊形。

四、由討論二及討論三可知當 $N=11$ 時，所鋪砌出的最大面積凸多邊形如（圖 2）所示：

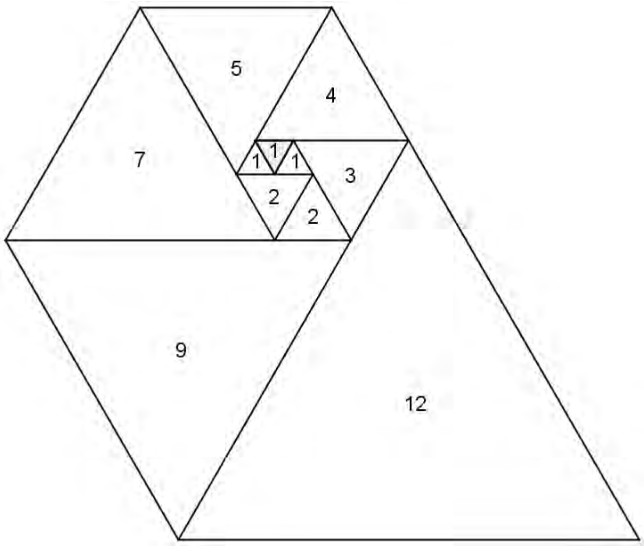


圖 2 $N=11$ 時，最大面積凸多邊形

五、由黃金比例的探討結果發現，本研究的邊長數列雖然也可以繪製出的類似鸚鵡螺曲線，但其曲線的半徑比卻不是具有黃金比例的1.618，而是趨近1.33。若是改成隔一項的比時，則比值會趨近於1.75

六、當用最大邊長與最大正三角形高的比值為趨近1.539

柒、結論

在本研究中我們先探討如何在給定三角形個數 N 的情況下，由邊長1開始取出各種不同邊長的三角形去鋪砌出一個凸多邊形，剛開始拼排三角形的時候，只要注意圖形是否為凸多邊形及是否有依照邊長順序排列而已，過程中並沒有遇上太大的困難，然而在拼出最大面積凸多邊形後卻發現一個難題，因為無法從圖中去找到規律，而當我們在最棘手的時候，老師突然告訴我們可以用數列的方式找找看，於是讓我們發現了類似費氏數列的規律，若依此規律鋪砌，則能鋪砌出最大面積的凸多邊形。

另外一個問題就是利用尤拉示性數（$V-E+F=2$）來探討鋪砌出的圖形規律，在大家的努力下終於讓我們從圖形中歸納出 $V-E+F=1$ 的性質，此一性質可用來判別所鋪砌出的是圖形否為凸多邊形。

回想起研究過程中，碰上困難無法前進時心中的感受令人十分難忘，但憑著大家努力不懈的精神，屢次突破難關，繼續深入探索我們的主題。這次的研究是靠著老師的指導、大家的思考才得以完成，這種全心投入、一起並肩作戰的經驗就是這次科展最大的收穫！

捌、參考資料及其他

1. 沈康身,歷史數學名題賞析⑥,新北市：稻田出版有限公司,299~300 頁,2011
2. 宋秉信,從尤拉公式到空間的平面分割,中國湖南省湘潭教育學院數學系
3. 愛上數學，安納・伽拉佐利/譯:王愛雅，台北市，165~171,2003

【評語】030421

1. 作者觀察三角形的鋪砌凸邊形問題，發現最大凸多邊形有類似費氏數列。

2. 觀察發現鋪砌三角形的數列結構類似費氏數列，且可用黃金螺旋的予取予求描述，係一新發現，但如能推出該螺旋線的參數方程式，更可突顯作品水準及創意。