

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

第一名

080403

探討多人玩的井字棋_Otrio 是否有必勝方法

學校名稱：臺南市麻豆區麻豆國民小學

作者： 小六 黃鼎祐 小六 陳彥程	指導老師： 謝沛原 黃育炫
-------------------------	---------------------

關鍵詞：井字棋、自動評分、桌遊

得獎感言

Excel 研究數學變成數學 Excellent

黃鼎祐心得：

這次參加科展讓我十分開心，因為能夠利用在資優班的時間去做自己想做的研究，並且還能夠進而參加科展，在這當中訓練我的口說能力，雖然在台南科展中沒有辦法親自分享自己的研究成果，但是在全國科展中，我總算能夠實現這個願望了，而且還讓我意外的得到了全國第一名這個特殊的榮耀，但是沒有同學一起跟我研究、寫報告，和老師的引導、幫助，以及家人的支持，我是一定沒辦法得到這樣的名次。雖然在這次的科展比賽中，受到了疫情的影響，使得我們團隊在比賽之前只能利用網路來練習講解，而且全國科展的複審也只能採用線上的方式，少了那一種臨場感。但這次也是最特別的一次，因為也就可能只有這一屆的科展會以這樣的方式進行，而且頒獎典禮雖然用 youtube 來公布名次，但那種不知道自己是第幾名的緊張感反而更加的劇烈。我想這一次的全國科展讓我收穫許多，例如：利用機器去加速我們的研究、用多種方式呈現研究過程和結果…。希望之後的科展中，我能夠再次和大家分享我的作品，也希望能夠參加到像以前一樣較大規模的科展，去認識更多人的作品。

陳彥程心得：

我對於這一次的全國科展，我和同學原本以為我們連第一關都不會過，結果我們市賽的書審居然過了，我們的想法是如果過第一關那就要盡全力拼進全國賽，而之後因為疫情的關係所以全都是書審，因為我們認為報告書不是最好的版本所以不會有好成績。之前也因為程式的問題卡了很久，也花了很多時間完成樹狀圖，所以知道有進全國賽，可以和更多評審解釋我們的題目時，我們都感到非常期待。因為疫情沒辦法去學校，所以我們選擇用 Teams 和 google meet 在晚上的時間來進行線上練習。中途我有想過要不要請老師把我們的目標放低，讓我們不用那麼的累，最後我心想反正都參加了，不如就認真的把它完成。我們在中途有決定要改變紀錄方式，讓別人比較好理解，所以我們就把之前做好的表格全都改變格式，又花了很多的時間，但是我居然在最後全國賽的講解和問答時，不知道為什麼感覺特別緊張，導致一直出錯，讓我之後感到十分後悔當時的失誤。這一次可以拿到全國第一名，我很開心，也很感謝這次老師在過程中的啟發，也很感謝家人的督促，希望以後還有機會進全國賽。



這遊戲是學弟妹介紹的，當時的挑戰，讓我們被學弟妹電得很慘。



這題目不容易展開，我們花許多時間研究架構要如何組織。



這是我們在學校講解給學弟和學妹聽的照片，也給了我們第一次的講解經驗。

摘要

傳統井字棋在兩人不犯錯的情況下遊戲會平手；另外 2 款傳統井字棋的延伸版：奇雞連連與棋蹟連連，有人研究過，當玩家都擁有全部種類的棋子時，遊戲是不公平的。

因此，傳統井字棋是公平，但變化少；而兩款井字棋延伸版變化多，但先手必勝；因此，我們想研究的是四人版的井字棋 Otrio，且玩家都分別有大中小棋可以連線。

為了研究是否公平，我們設計了動態棋譜，根據場上狀況自動評估得分，玩家可依據下棋，評估的標準是連線數量與阻擋機會，而我們透過這方式研究，可以節省掉製作全部可能樹狀圖的任務，以更有效的方式研究是否公平，而目前為止，我們發現兩人遊戲是先手必勝，但在三人與四人遊戲中，先手玩家沒有絕對優勢會必勝，所以遊戲具可玩價值。

壹、 研究動機

井字棋是一個經典的遊戲，已經有許多研究證明，在 2 個人都夠聰明的情況下一定會和局。原始井字棋可下的位置只有 9 個，而雙方也只有各 1 種棋，最多下 5 次，就佔滿棋盤，很容易看出結果。

為了擴充遊戲變化性，有人把井字棋改編成另 2 款桌遊，分別是奇雞連連、棋蹟連連。這兩款遊戲在全國科展第 58 屆：棋盤上的奇蹟-奇「雞」連連也有討論過，若遊戲回歸到原始設計，是多種棋進行時，都是先手必勝，也就是說擴充了遊戲玩法，但卻反而不公平。

所以有人把這些遊戲又繼續延伸出一種叫做 Otrio 的桌遊，這款桌遊非常具有挑戰性，而且和奇雞連連、棋蹟連連比起來，Otrio 可玩人數比較多，玩起來也會比較有趣。也因為目前沒有人研究過他的必勝方法，所以我們想研究，並找出 Otrio 是否為公平的桌遊？

井字棋、奇蹟連連與棋蹟連連這 3 種遊戲只可以有 2 個人玩，所以只要創造出雙活路就一定會贏；但 Otrio 不同，因為 Otrio 有 4 個人玩，所以如果第 1 位創造出雙活路也不一定會贏，而且我們初步觀察到，反而在第 2 位的人可以不用防守，把防守工作留給第 3 位、第 4 位來防守，這時可達到一十二鳥：第 1 位的雙活路會被破解，第 3 位和第 4 位也沒辦法製造出活路。所以可能第 2 位是最有利，有可能打破傳統對於第 1 位最有機會勝利的想法。

為了研究出是否公平，我們聯想到一個方法，想打造一個下棋的機器人，如果他夠厲害

可以順利取得**絕對優勢**的話，那遊戲就確定是不公平。因此，我們研究有一個重點是要打造出下棋機器人。

貳、 研究目的

- 一、 探討遊戲公平與否的研究策略與方向
- 二、 探討各種玩法最快有輸贏的理想狀況
- 三、 探討初始勝率並設計自動對戰評分表
- 四、 探討兩人玩 Otrio 的必勝方法
- 五、 探討三人玩 Otrio 的必勝方法
- 六、 探討四人玩 Otrio 的必勝方法

參、 名詞釋義

- 一、 Otrio 多人井字棋

(一) 外觀



(二) 玩法

每一位玩家共有 3 種棋，大棋、中棋與小棋。棋盤是一個以九宮格為基礎，但每一個位置都還有三個大小的位置，可以放大棋、中棋與小棋。玩家依序輪流下棋，只能從場外將棋放入場內，場內的棋不能動，過程中只要有任何一個玩家連線成功，就獲勝；若玩到棋盤位置都被占滿，沒有任何連線就代表是個和局的狀態。

連線成功的定義有三種：

1. 大中小一直線(獲勝)：

大棋、中棋與小棋依序由大到小或由小到大出現在同一直線、橫線或斜線上。



2. 大中小同一格(獲勝)：

大棋、中棋與小棋在九宮格的任何一個位置內，



3. 同位階一直線(獲勝)：

同一玩家若在任何一直線、橫線或斜線上，有三個一樣尺寸的棋子。



二、 活路型態

活路：我們這裡的活路是說如果兩顆棋子都在棋盤上，而且只要再下一顆棋子就可以連線的情況；**雙活路**：這裡的情況是說如果三顆棋子都在棋盤上，但它們沒有連線，而是出現了兩條活路，這種情況就是雙活路，兩人玩時，創造出雙活路的人必勝；**多活路**：這個情況是當三顆以上的棋子在棋盤上時，它們沒連線，但有三個以上的連線方式可以讓玩家再下一顆棋子時連線。

三、 玩家、回合與棋盤格編號

順位第一的玩家就是第一家，其它依此類推；以 **Player** 縮寫來簡稱，第一家為 **P1**、第二家為 **P2**...等；當第一位玩家下了第幾顆棋，就代表回合進行到第幾回合，無論其他玩家下了幾顆棋，回合都是以第一位玩家下第幾顆棋為第幾回合；使用 **Large**、**Medium** 與 **Small** 簡稱大棋為 **L**、中棋為 **M** 與小棋為 **S**。棋盤格編號是以傳統井字棋的九宮格為基礎，與 **Otrio** 多了任何一個格子還可以放置大中小三種棋，不衝突，因此在編號上，我們只對九宮格的九個格子編號，這樣在討論傳統井字棋與 **Otrio** 時，就不會衝突，可以有共同的編號語言。

檢查其它玩家在過程中的其它所有可能，若都無法避免讓必勝玩家必勝的話，那就代表遊戲不公平。所以理論上只要找出樹狀圖眾多分支的其中一「搓」樹狀圖，都導致一樣的結果，那就可以證明遊戲是不公平的。

(二) 假設遊戲是公平：

如果遊戲是公平的，那麼必然不存在任何一種必勝走法。我們必須真實的窮舉出所有可能，才能列舉沒有任何一「搓」樹狀圖存在必勝走法。以玩家每次有 3 種棋共 27 種位置(隨著回合進行會每次減 1)，若是將遊戲玩到格子都被填滿，那麼樹狀圖的分支將會是 $(3 \times 27) \times (3 \times 26) \times (3 \times 25) \times \dots (3 \times 1)$ 遞減乘下去，共 27 個相乘，約 $8.30341E + 40$ ，這樣的研究數量實在太大了。雖然我們可以運用一些推理減少完全無效的走法，以及提早遊戲結束讓分析的可能再少一些，但是這個數字量非常大，研究過程將會非常耗時。

(三) 我們假設遊戲是不公平作為研究努力方向：

基於以上兩點，我們先朝向遊戲是不公平的可能去猜測，如果我們找到一個路徑是有任何一玩家必勝的話，那麼就代表遊戲不公平。但是這樣做有一個風險就是如果我們真的無法找出必勝玩法，只能說我們試了很大的努力，遊戲可能沒有必勝玩法，但我們也無法確認遊戲是否公平。

二、 探討各種玩法最快有輸贏的理想狀況

(一) 討論主題：探討 2 人玩時，最快有輸贏的回合與總步數

假設在創造活路的過程中沒有人阻擋的情況下：

1. 假設都沒有阻擋：只需 3 個回合、兩人總共 5 步的時候會有人獲勝。
2. 假設第 2 人有阻擋：可以在第 3 回合時創造出雙活路，如過第 2 人有阻擋的話第 1 人還會有 1 條活路，所以第 1 人會在第 4 回合且兩人總共動 7 步時獲勝。

(二) 討論主題：探討 3 人玩時，最快有輸贏的回合與總步數

為了創造活路下且在創造活路的過程中沒有人阻擋的情況下：

1. 假設都沒有阻擋：只需 3 個回合、3 人總共動 7 步的時候會有人獲勝。
2. 假設有 1 人沒有阻擋在創造出自己的活路：最快要在第 3 個回合中創造出雙活路，因為有 1 人為了創造出自己的活路，所以沒有擋。然後第 1 人會在第 4 個回合、3 人總共動 1 步時獲勝。因為這樣第 1 人就獲勝了，所以不會發生。

3. **假設都有阻擋**：可以在第 3 回合時創造出 3 活路，如過第 2 人、第 3 人都阻擋的話第 1 人還會有 1 條活路，所以第 1 人會在第 4 回合且 3 人總共動 7 步時獲勝。

(三) 討論主題：探討 4 人玩時，最快有輸贏的回合與總步數

假設在創造活路的過程中沒有人阻擋的情況下：

1. **假設都沒有阻擋**：只需 3 個回合、4 人總共動 9 步的時候會有人獲勝。
2. **假設兩人沒有阻擋在創造出自己的活路**：可以在第 3 回合時創造出雙活路，如過第 2 人、第 3 人都沒有阻擋的話只有第 4 人有阻擋的時候，第 1 人還會有 1 條活路，所以第 1 人會在第 4 回合且 3 人總共動 13 步時獲勝。
3. **假設有 1 人沒有阻擋在創造出自己的活路**：最快要在第 4 個回合中創造出 3 活路，因為第 2 人為了創造出自己的活路，所以沒有擋。所以第 3 人和第 4 人各阻擋了 1 條活路，第 1 人還會有 1 條活路，然後第 1 人會在第 4 個回合、4 人總共動 13 步時獲勝。
4. **假設都有阻擋**：因為無法只創造 4 活路，3 顆棋最多可以製造出 3 活路但如果其他 3 人都阻擋的情況下，這樣的話不會獲勝，所以需要第 4 顆棋，第 4 顆棋最多可以創造出 6 活路 3 人都各阻擋 1 條活路的情況下第 1 人還會有 3 條活，所以第 1 人會在第 5 回合且 4 人總共動 17 步時獲勝。

三、 探討初始勝率並設計自動對戰評分表

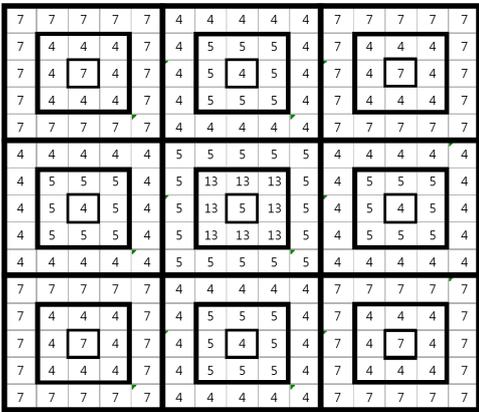
假設遊戲是不公平，因此我們必須想辦法找到一個必勝的絕技讓來其他玩家都守不住；我們想到一個辦法，可以創造一個很強的下棋機器人，或許他可以比我們人類更能有效率地找出必勝的策略。

打造這個機器人，打算根據**評分表**來設計下棋的選擇，我們想到的評分表是**根據連線可能的多寡來決定下棋的位置**。分為幾個部分，首先根據所有位置不同大小棋可以連線的可能，打造出**靜態棋譜**。接下來要挑戰隨著遊戲的進行，場上的狀況會不同，我們的棋譜要能根據場上的變化進行**動態調整**。

(一) 靜態棋譜(下棋輔助器 1.0)：

靜態棋譜就是根據場上沒有任何阻擋的情況下，每一種棋在每一種位置的連線可能。這個想法來自於一開始我們要研究 Otrio 之前，我們先將傳統的井字棋進行一個簡單的研究，想知道為何什麼正中央的格子是最佳位置，是玩家必爭之地。發現了透過連線的可能數來

看，正中央格是 4 種連線的交點。透過這個想法，我們若把每一格連線的次數累加，那就可能成為這一格的價值，全部討論完，就是一個初始下棋位置的考量範本了。

傳統 Tic-Tac-Toe 井字棋靜態評分表	4 人玩 Otrio 井字棋靜態評分表									
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="width: 33.33%; height: 60px;">3</td><td style="width: 33.33%;">2</td><td style="width: 33.33%;">3</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	3	2	3	2	4	2	3	2	3	
3	2	3								
2	4	2								
3	2	3								

可以看出傳統井字棋是以正中央分數最高，總共有 4 次連線機會；而 Otrio 也是正中央 e 格，但是只有中棋 M 分數比較高，高達 13 次連線機會，L 與 S 都是 5 次。這是因為成功連線型態中有一個是大中小一直線，所以中央位置(e 格)放中棋 M 會多了 8 個方向可以完成大中小一直線，所以多出 8 次機會。

那根據以上簡單分析，傳統井字棋先手是下中央位置(e 格)；因此 Otrio 第一步棋也應該下中棋在正中央的位置(e 格)。

(二) 動態棋譜

一開始我們使用靜態棋譜下棋，先測試兩人玩的 Otrio，第一個玩家使用靜態棋譜，第二個玩家以人腦進行思考。**結果靜態棋譜忽略掉對方已經有活路卻沒去擋，仍然依據自己的連線可能高分去下棋，而輸掉比賽。**這讓我們思考到我們的靜態棋譜必須是要動態改變的。

P1選擇的輔助說明與想法	P1的評分表	a b c d e f g h i	P2的評分表	P2選擇的輔助說明與想法
	3 2 3 2 4 2 3 2 3			
			2 1 2 1 0 1 2 1 2	a,c,g,i 四格都是2分。旋轉後都一樣。任選一個放。假設放在i格。
a,b,c,d,g五格都2分。其中。c,g這兩格都能阻擋到P2。對稱圖形因此選c或g都可以。假設c格。阻擋的想法也將添加到後來的優先順序。	2 2 2 2 0 1 2 1 0			
			1 1 0 1 0 0 2 1 0	
以回顧來看。當時只有b格是2分。但未考量到P2下h格就會贏。因此忽略了防守的狀態。成為我們後續修改的方向。	1 2 0 1 0 1 0 1 0			
			1 0 0 1 0 0 0 1 0	a,d,h三格都是1分。選h格可以贏。所以下h格。所以立即造成自己會贏。也會納入優先順序中。

以上是我們設計出靜態評分表後，先使用靜態棋譜進行 2 人傳統井字棋對戰的過程，由於只考慮可能的連線數，所以反而是先手玩家輸了，因此，我們必須要考慮場上的即時變化，於是我們開始思考能否設計一個能根據場上變化自動調整評分系統的棋譜呢？

1. 自動扣分系統(下棋機器人 2.0)

前面透過傳統井字棋驗證想法的過程中，P1 與 P2 的評分表也會跟著場上剩下來的連線數改變，不過這是我們手動計算剩下來的連線數。

若改良到下棋機器人，也就是自動扣分的話，我們就要讓場上連線可能被其他玩家佔據的時候，自動扣除那條線的連線可能，因此評分表的分數會隨著回合越來越少。

那我們是如何思考的呢？

每個玩家初始有 3 種棋，且有 9 個位置，因此是 27 個格子的評分累加。我們思考的點是每一個格子都要寫判別式，因為我們當初設計下棋程式就是用 EXCEL 完成的，因此可以更方便我們寫判別式在裏頭。

格，代表這個連線機會沒了。

$$(3) \text{ IF(AND(OR(V1 = 0, V1 = Q1), OR(AA1 = 0, AA1 = Q1)), 0, 1)$$

這裡是說如果 $OR(V1 = 0, V1 = Q1)$ 與 $OR(AA1 = 0, AA1 = Q1)$ 這兩個事件同時都成立的話，我們不扣分，但是如果沒有同時成立，那就代表一定有一格被別的玩家佔據了，因此我們扣 1 分。

那我們這樣就寫完 1 個輔助格了，有 7 種連線狀況，所以還有其他 6 個輔助格要寫，概念都是如上面示範的這樣，考量自己或別人下這個位置來決定要不要累加分數。

因為扣分系統是先將要扣的分數累加完之後，再由總分減去它們，所以輔助格分開討論時，會以先正分討論，比較合乎我們習慣的思維，最後再加總起來一次性減去就可以了。

根據 7 種連線狀況寫出 7 個輔助格後，再整併起來，那我們這樣就寫完 1 格了；接著，我們要依據大中小棋在 9 個位置的 27 種狀況，分別根據它們的得分，寫出相等於得分數量的判別式，因此我們總共要寫下 a 格(7 + 4 + 7) + b 格(4 + 5 + 4) + c 格(7 + 4 + 7) + d 格(4 + 5 + 4) + e 格(5 + 13 + 5) + f 格(4 + 5 + 4) + g 格(7 + 4 + 7) + h 格(4 + 5 + 4) + i 格(7 + 4 + 7) = 147 個判別式，那動態棋譜的自動扣分系統就完成了。

「輔助格」說明

那因為 a 格就有 3 種棋、b 格也有 3 種棋與 c 格也有 3 種棋，所以我們把 abc 格再設計成一個九宮格來記錄輔助格的判別式。那我們輔助格也是根據判斷成功連線型態的相對位置與連線延伸方向去放置輔助格的判別式，這樣我們比較不會弄亂

$$= \text{IF(AND(OR(F1 = 0, F1 = A1), OR(K1 = 0, K1 = A1)), 0, 1)$$

上述程式碼說明的是這一格。

還有其他六格要寫出輔助格計算

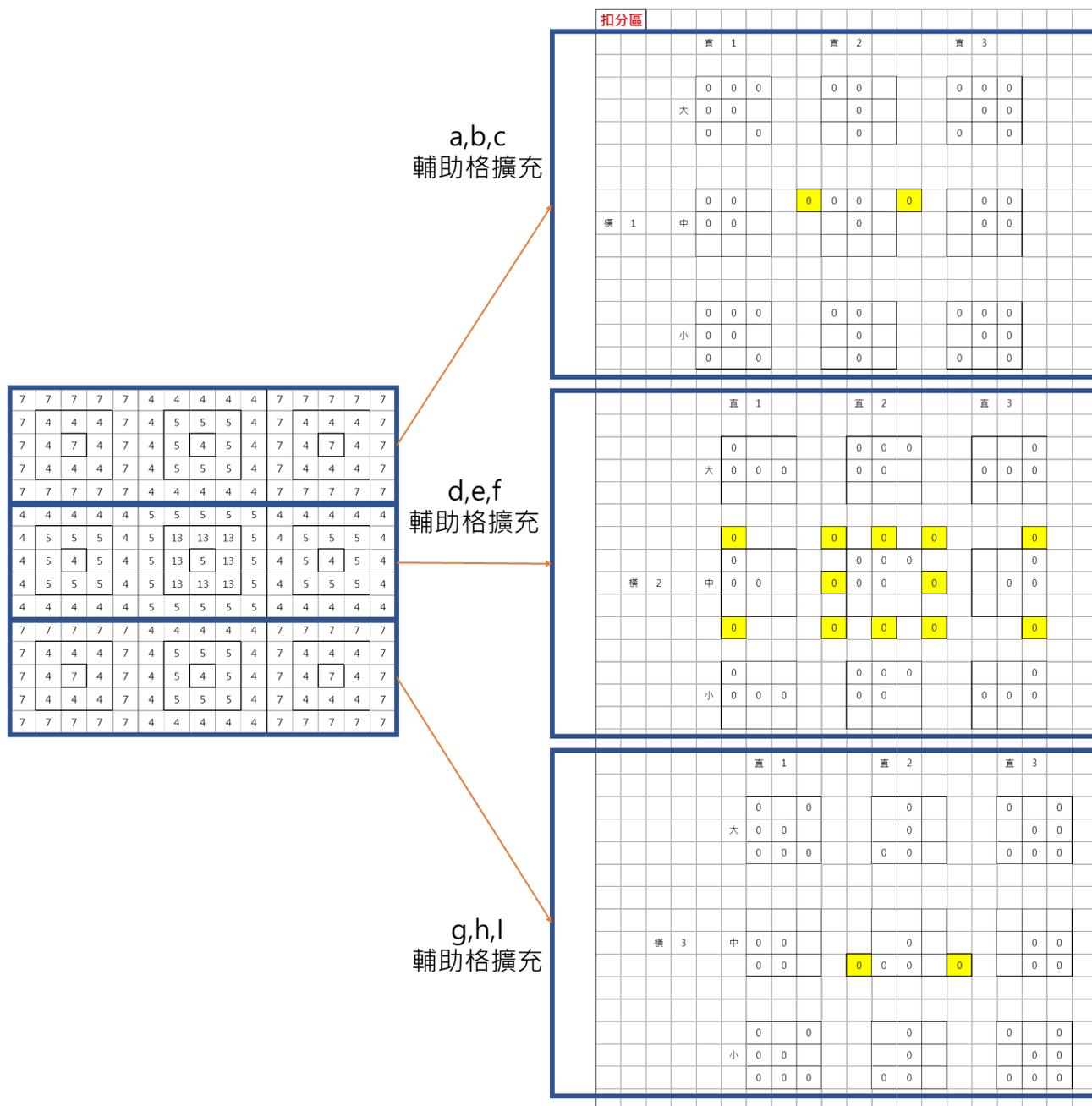
		a 格輔助格 由上而下分別是大中小棋的判斷 連線可能 7+4+7	b 格輔助格 由上而下分別是大中小棋的判斷 連線可能 4+5+4	c 格輔助格 由上而下分別是大中小棋的判斷 連線可能 7+4+7
扣分區	直 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
	直 2		0 0 0 0 0 0 0 0 0	
	直 3			0 0 0 0 0 0 0 0 0
橫 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
小	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0

當我們要把原本靜態評分表進行扣分的時候，我們就要將全部輔助格的分數扣掉，但因為原本每一格的連線可能都超過 1 種可能，所以必須要分別根據連線可能數量設計出相等數量的輔助格來幫助我們判斷每一個連線可能是否要扣分，而我們輔助格的延伸方向也盡量根

據相對方向去延伸，比方說若是大中小同一格的判斷，就統一寫左上角這一格；若是大中小一直線的，就看延伸方向是左邊還是右邊，往不同方向延伸。

以下是完整的輔助格與靜態評分表如何在 excel 加上扣分系統如何實現的說明，

a,b,c,d,e,f,g,h,i 格代表的是原始九宮格的那九格。



2. 自動扣分系統(下棋輔助器 2.0)--忽略快連線的可能

當我們完成自動扣分系統之後，我們以為完成動態評分表了，由是我們又根據兩人的 Otrio 進行實戰，一人根據自動評分表，另一人以人腦。但我們發現自動評分表沒有考量到對手已有 2 顆棋完成布局，剩 1 顆即將連線時，那一格理論上要最高分，這樣我們才知道要

去擋；或者是，我們自己已經完成 2 顆棋，剩下 1 顆就連線成功時，理論上我們要去下這個位置。由於這 2 個快連線的可能沒有被考量到，於是自動評分表(下棋輔助器 2.0)還是輸了。

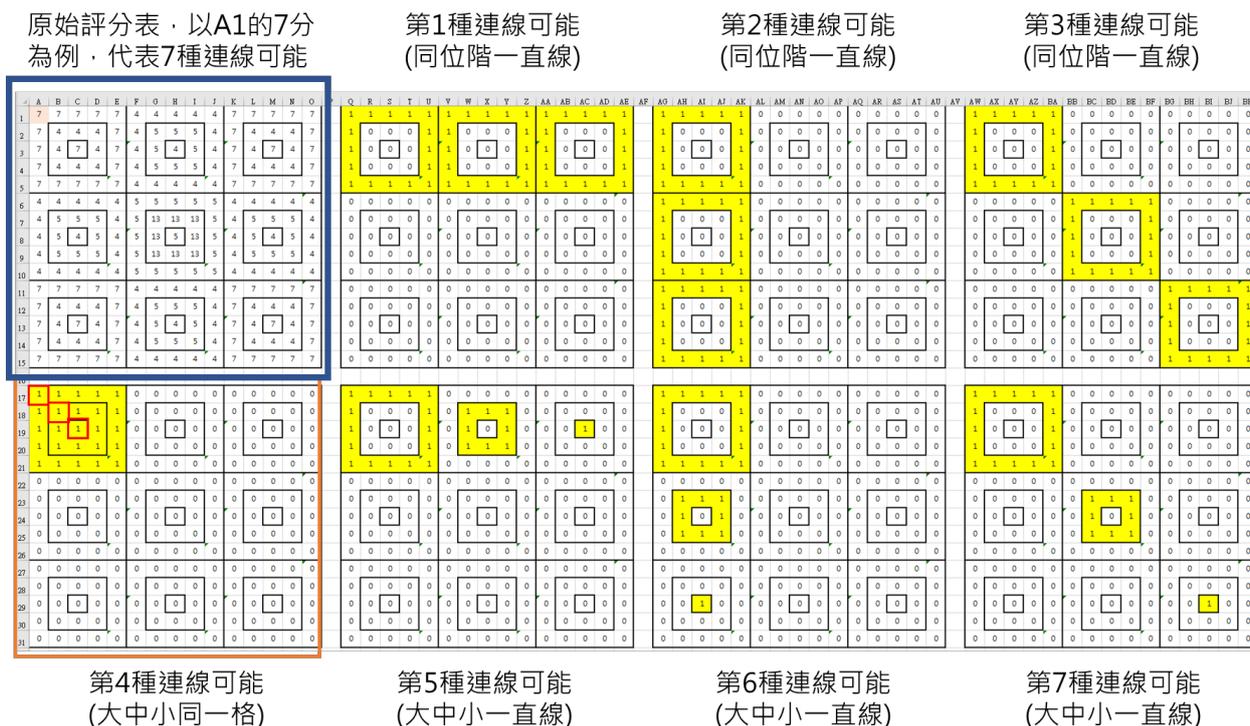
因此，我們還必須將快連線的可能(對方或是自己有活路)考量進去，讓關鍵的那 1 顆棋有非常高分的提示，讓我們不會錯過。

3. 自動加分系統(下棋輔助器 3.0)

接下來要挑戰的是，無論是對手或自己已有兩顆棋完成布局時，那我們必須把關鍵的位置加上高分，這樣我們輔助參考時，才知道要優先考量這個位置。

而我們想到也有可能自己快連線與對手快連線同時出現，那這時候還是要比優先順序，當然是以自己快連線為優先。因此我們參考靜態棋譜最高分 13 分為基礎，將自己快連線的關鍵格加上 50 分，對手快連線的關鍵格加上 30 分，這樣就能順利比較出快連線的關鍵格比原始累加的分數還要高的情況。

我們以 **a 格大棋 L** 的原始分數 7 分為例來說明，並以**第 4 種連線**可能舉例



根據這些連線的可能，我們必須同時思考若是對手除了 a 格大棋 L 以外已經完成 2 顆棋，剩下 a 格大棋 L 這顆就完成連線的可能，以及自己除了 a 格大棋 L 以外已經完成 2 顆棋，剩下 a 格大棋 L 這顆就完成連線的可能。

我們以第一家作為示範，我們在輔助格寫上 = $IF(AND(B2 = A1, C3 =$

A1), 50, IF(AND(B2 = C3, OR(B2 = 2, B2 = 3, B2 = 4)), 30, 0))

(1) IF(AND(B2 = 1, C3 = 1), 50, 另一個條件)

這裡判斷的是如果 B2 與 C3 都同時等於 1 的話，那麼就代表第一家在其他 2 格已經完成中棋與小棋在 a 格，因此直接加 50 分；那另一個條件是，如果不符合的話要進行的。

0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

(2) IF(AND(B2 = C3, OR(B2 = 2, B2 = 3, B2 = 4)), 30, 0)

首先AND(B2 = C3,如果 B2 與 C3 內部的數值一樣，可能都是 0，2，3，4，這裡不會出現 1，因為如果是 1，那在前一個判斷式就已經先成立，不會來到這裡。那後半段OR(B2 = 2, B2 = 3, B2 = 4)說的就是，判斷到底此時到底是 2 或 3 或 4 號玩家快完成連線了。最後就寫上如果真的是其他玩家快連線了，那就加 30 分，如果不是，那就一樣維持 0 分。

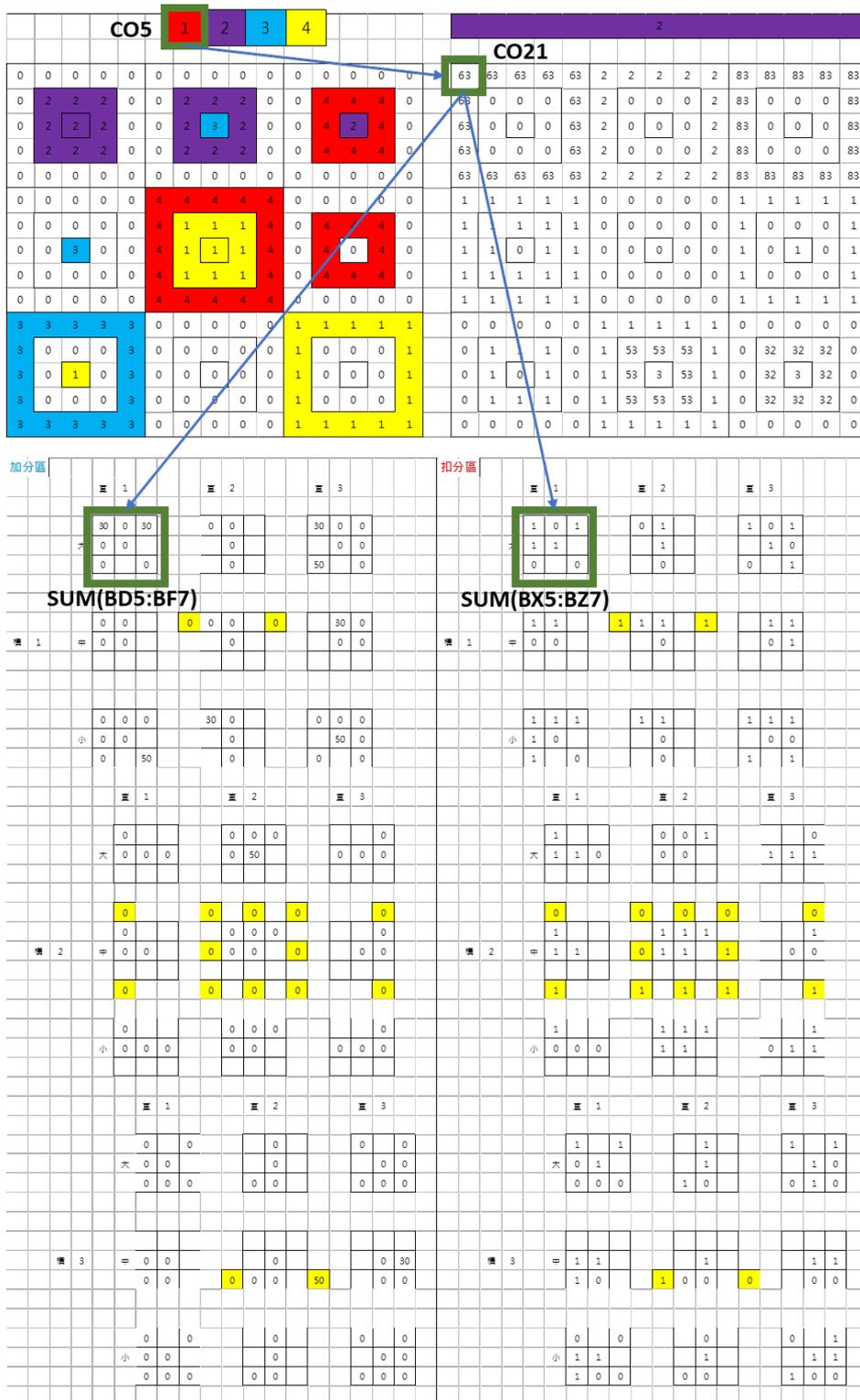
0	0	0	0	0
0	2	2	2	0
0	2	2	2	0
0	2	2	2	0
0	0	0	0	0

0	0	0	0	0
0	3	3	3	0
0	3	3	3	0
0	3	3	3	0
0	0	0	0	0

0	0	0	0	0
0	4	4	4	0
0	4	4	4	0
0	4	4	4	0
0	0	0	0	0

我們這個自動加分系統會累加回評分表，所以如果有人快贏了，無論是我方或敵方，都能幫我們家到很高的分數，幫助我們判斷。那加分系統與扣分系統一樣，都要分別寫出 147 個判別式，且輔助格也要分別設計總共 27 大格。

以 63 分這格如何計算為例= **IF(NOT(CO5 = 0),0,CO21 - SUM(BX5: BZ7) + SUM(BD5: BF7))**，由於圖片有經過剪貼，我們舉例說明如何對應，CO5 就是紅 1 這格(因為我們還設計了這一系列判斷式可以同時給 P1,P2,P3,P4 玩家使用，只要改變這裡的順序就是不同玩家的判斷式。SUM(BX5: BZ7)是扣分區那格，SUM(BD5: BF7)是加分區那格。



透過輔助格協助，以 P2 為例，下 83 分那格會贏，順利完成下棋機器人(下棋輔助器 3.0)。

四、 探討兩人玩 Otrio 的必勝方法

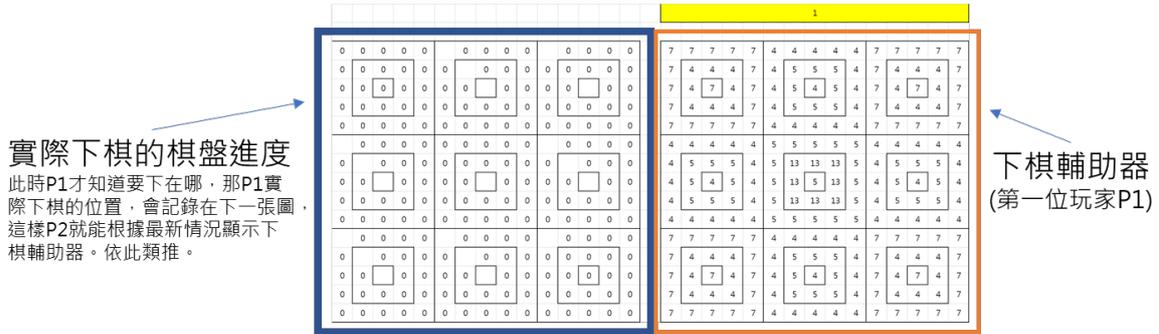
目前下棋輔助器 3.0 已具備的功能：

- **初始連線數統計(靜態 1.0)：**大中小棋一開始在任何位置所有連線可能的統計。
- **扣分系統(動態 2.0)：**根據對方佔據的位置，推算剩下來的的大中小棋在任何位置的

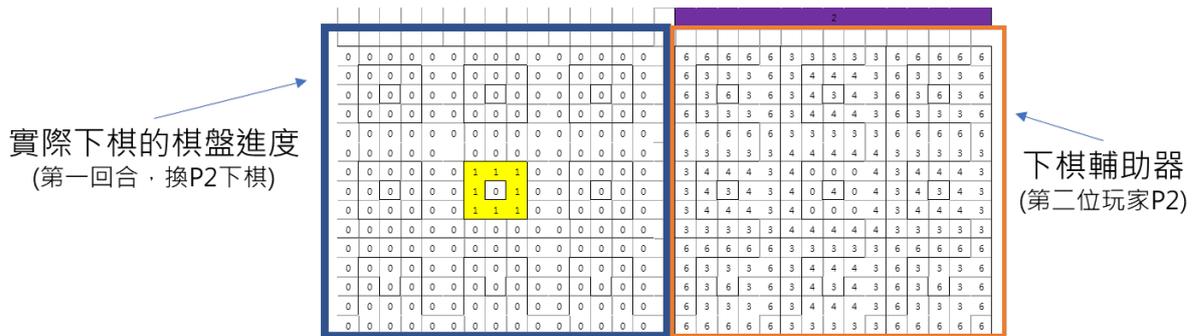
連線可能。一定會比初始連線數少，所以是扣分系統。

- **加分系統(動態 3.0)：**考量對手與自己活路可能，將關鍵格加高分，提示下棋為優先考量。

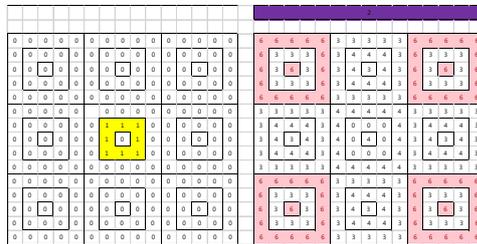
以下是我們透過下棋輔助器在 Otrio 兩人的研究。每一次下棋時，P1 與 P2 玩家都會各自參考自己的下棋輔助器。並透過輔助器的高分提示進行下棋。



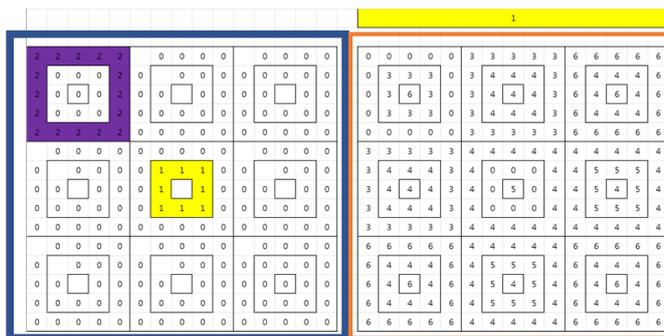
從上圖可以看出 P1 第一步應該選擇 eM=13 分，當他選擇後，留給 P2 的狀況如下：



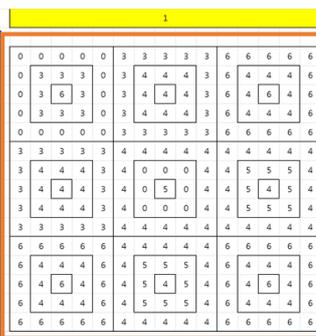
此時 P2 第一步選擇有 8 個，aL、cL、gL、iL、aS、cS、gS 與 iS 也都是 6 分。下圖透過紅底來標示；目前場上只有正中央 P1 的一顆 M 棋，若棋盤旋轉，代表四個角落的評分是相對位置，選擇變成兩大類(aL,cL,gL,iL)與(aS,cS,gS,iS)。而相對於 P1 的中棋，P2 的大棋與小棋也是相對概念，因此，需考量一個角落任選 L 或 S 就可以了，我們假設 P2 選擇 aL 下棋。



實際下棋的棋盤進度
(第二回合，換P1下棋)

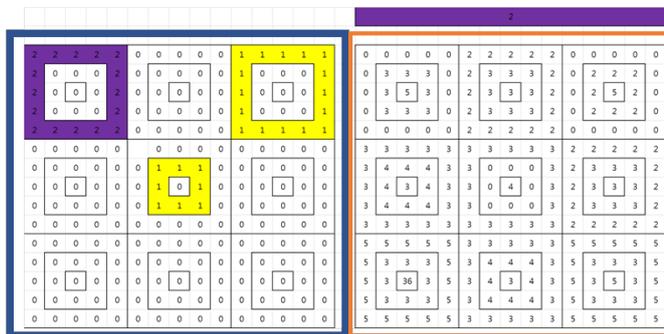


下棋輔助器
(第一位玩家P1)

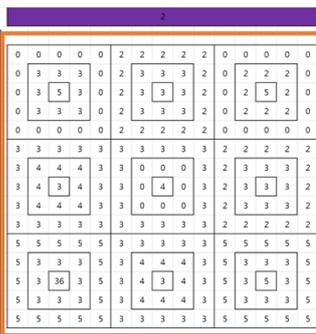


P1 第二步的選擇應該選 6 分最高，但 cL、gL 與 iL 都是 6 分，而若考量對稱性的話，以左上到右下斜線為對稱軸，那 cL 與 gL 是一樣的，因此這裡有叉路 2 個選擇。選(cL,gL)或(iL)這兩種，我們假設 P1 選(cL,gL)裡的 cL。

實際下棋的棋盤進度
(第二回合，換P2下棋)

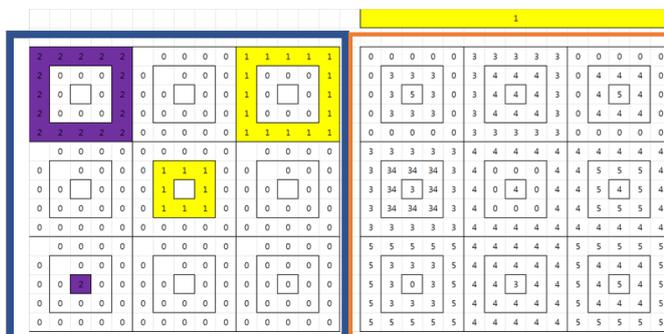


下棋輔助器
(第二位玩家P2)

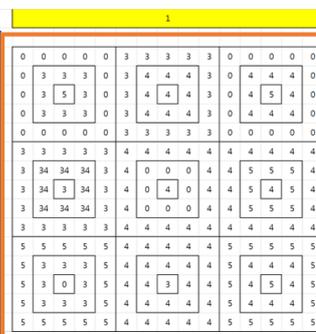


P2 第二步有一個 36 分，因為超過靜態初始值最高分 13，代表這是加分而來的分數，代表有人創造了活路，因此 P2 一定要選 36 分，選擇 gS 下棋。

實際下棋的棋盤進度
(第三回合，換P1下棋)

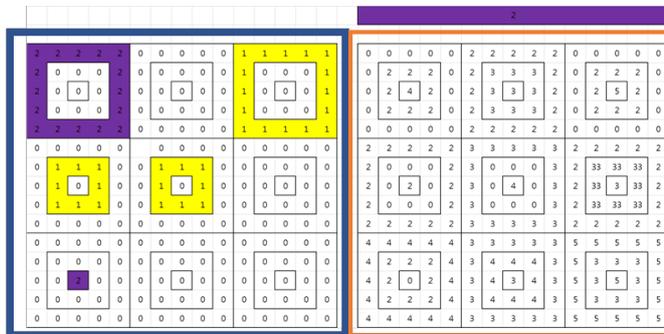


下棋輔助器
(第一位玩家P1)

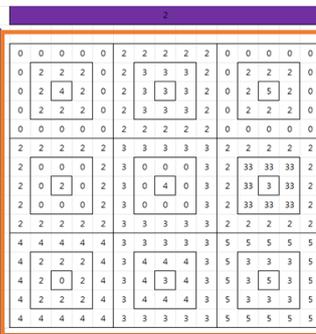


P1 第三步必須選 dM=34 分，這是最高分。

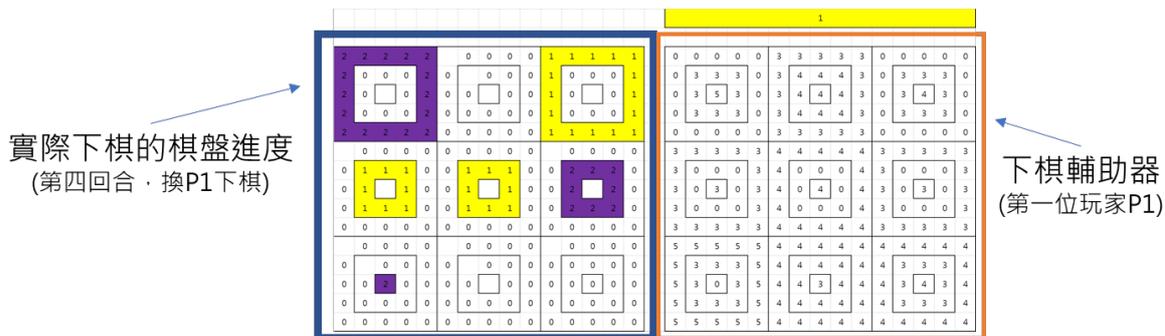
實際下棋的棋盤進度
(第三回合，換P2下棋)



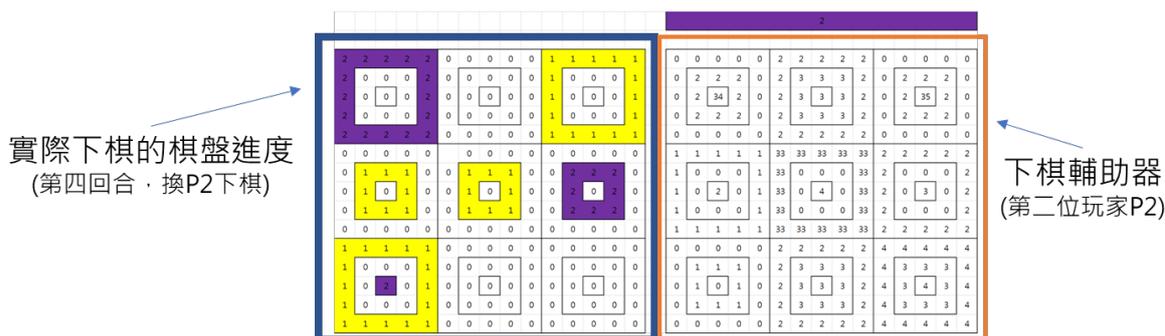
下棋輔助器
(第二位玩家P2)



P2 第三步必須選擇 fM=33 分，這是最高分。



P1 第四步有 2 個最高分，aS 與 gL 都是 5 分，因此這裡也是一個叉路 2 個選擇。那假設先選擇 gL 好了。



P2 第四步會變成有三個位置都是超過 30 分，代表這是加分而來的，因此對方會有 3 個活路。因此無論選擇 aS=34 分、cS=34 分或 eL=34 分，接下來 P1 都還有剩下 2 個活路可以致勝，因此，P2 輸了。

回頭檢視 P2 過程中所有選擇機會，只有第一步時有 8 個選擇，回到那個叉路去討論，看是否能避免必輸的狀況。但是當時是一個對稱圖形，因此無論選擇哪一個位置，對於 P2 來說，只是盤面觀看的角度不同，無法改變戰局。

若當時 P2 第一步選擇 aL：

	回合	回合	回合	回合		回合	回合	回合	回合
	1	2	3	4		1	2	3	4
P1	eM	cL	dM	gL	P1	13	6	34	5
P2	aL	gS	fM		P2	6	36	33	34 · 33 · 35

若當時 P2 第一步選擇 aS：

	回合	回合	回合	回合		回合	回合	回合	回合
	1	2	3	4		1	2	3	4
P1	eM	cS	dM	gS	P1	13	6	34	5
P2	aS	gL	fM		P2	6	36	33	34 · 33 · 35

不管怎麼選，從第二回合開始，P2 的選擇也都只剩下超過 30 分必須要選，代表整個過程都是受迫下棋，只有他的第一步可以選擇，但根據軸對稱來看盤面，無法改變狀況。

而 P1 在過程中也有許多叉路，我們使用綠底標識。但我們假設遊戲是不公平，因此，討論的重點是改變其他玩家的選擇看能否改變戰局，對於獲勝的玩家，若不受威脅，可以不需要改變走法，因為原本這個走法會贏，就代表找到一條必勝的路徑，就足以證明遊戲不公平的。

所以，我們可以下一個結論，Otrio 在兩人玩時，先手必勝，遊戲不公平。

以下我們將剛剛分析的兩人 Otrio 對戰步驟列成表格顯示完整走法。

由上而下，由左而右，S 型閱讀。左半邊都是 P1 的根據此時場上狀況所產生的評分表與，當 P1 下棋後，會順勢影響最新場上狀況，成為右半邊都是 P2 根據此時場上狀況所產生的評分表，依此類推循環下去。因此，完整的考量為：

P1 第一步選擇 eM=13 分；P2 第一步選擇 aL=6 分(此時有叉路)；P1 第二步選擇 cL=6 分；P2 第二步選擇 gS=36 分；P1 第三步選擇 dM=34 分；P2 第三步選擇 fM=33 分；P1 第四步選擇 gL=5 分；P2 的評分表出現 aS=34、eL=33 分、cS=35 分，代表對方三活路，故輸掉比賽，且除了 P2 第一步選擇有叉路之外，之後 P2 完全處於被動防守直到遊戲結束。

五、 探討三人玩 Otrio 的必勝方法

當遊戲超過 2 人以上，下法會如研究目的二的討論分析那樣，當有人快連線時，依據不同順位，玩家可以根據會不會立即造成輸贏來選擇「擋」或「不擋」，也就是說若不是該玩家的下家有活路的話，那可以選擇留給下一家去阻擋另一個玩家的活路。

(一) 合理化遊戲流程

因為有這樣的變形，所以在 3 人以上討論時，我們擬定兩項必須遵守大前提，讓下棋的選擇更統一且合理化。我們以第一人稱代表即將下棋的玩家來說明比較不會搞混。

1. 若該我不會馬上獲勝，必須努力延長回合：

若我本身沒有活路，而其他玩家至少有兩家已經有活路了，那我必須依順位優先選擇「擋」接下來有活路的玩家。

2. 若下位玩家不會馬上獲勝，我必須先創造自己的機會：

若下家沒有活路，而下下家有活路的話，那必須選擇不去阻擋下下家，留給下家擋，並先創造自己的活路。

(二) 人工輔助流程表 (自動化下棋的依據)

上述兩項可以透過 if 判別式完成假定，但在 EXCEL 運用相對位置寫公式有其極限，雖然我們已能拓展二維空間透過輔助格計算單格價值，但若又考慮遊戲流程進度，必須再增加一個維度，受限於三維以上要表達在二維空間的困難，所以就不將接下來的考量程式化。

我們根據上述想法，擬定了一些人為輔助的參考順序，讓研究 3 人以上的 Otrio 下棋過程也能有標準化參考。

除了上述兩大前提之外，下棋根據分數判別時，還要進行以下考量，而接下來這些考量是以 *if~else* 的概念設計，若前者符合，就先執行了，若不符合才檢查下一段判別，而過程中如果有遊戲勝負出現，那就提早結束遊戲，完成一個路徑考驗。那我們的研究就必須回到上一層有所有玩家有叉路選擇的地方再繼續往下延伸，如此反覆的推理，就能把樹狀圖有相同價值的選擇全部考量完。

以下是我們在 3 人 Otrio 的人工輔助流程表分析(4 人的會在研究目的六再進行調整)：

1. 當有任 1 格的分數是 5x 或 8x 開頭時，下那一格直接贏得勝利。

這是因為我們將自己要贏的勝利的那一格設定成加 50 分，因為加 50，我們就以 5x 開頭來說明，實際上有可能初始分數是一位數或二位數而讓加分後變成 50 幾分獲 60 幾分，但我們統一使用 5x 表示；至於 8x 開頭則是因為那個除了可以讓自己贏得勝利外，這一格也有可能是敵人要連線的 30 分，而敵人可能不只一個關鍵格在這，所以可能 30 會加不只一次，我們還是統一使用 8x 開頭，代表自己與敵人的關鍵格都在這

而不論是 5x 或 8x，都是玩家關鍵格，所以選擇最高分的位置下棋，直接贏得勝利，提早結束遊戲。

玩家順位	我	下家	下下家
關鍵格出現	5x or 8x		

但若自己沒有任一格的分數是 5x 或 8x 開頭，代表進行下一段的判別。

2. 若「下家」有 1 格以上是 3x 或 6x 以上開頭，必須阻擋那下家分數高那格。

加分系統是將對手活路的關鍵格設定為+30 分，但可能是下家要連線，下下家要連線，或是前一家要連線。但若是下家有 3x 開頭以上的關鍵格，代表只有我能擋，所以一定要擋，選分數最高的去擋，而 6x 開頭代表這一格同時是 2 位其他玩家以上的關鍵格，會加不只一次 30 分，但我們統一以 6x 開頭代表

玩家順位	我	下家	下下家
關鍵格出現		3x or 6x	

但若下家 3x 或 6x 開頭的關鍵格有 2 格以上，那下家會贏得勝利，提早結束遊戲。

3. 若「下下家」有 2 格以上 3x 或 6x 開頭，必須阻擋下下家，但保有選擇權擋哪。

這是因為如果是下下家有 2 條以上的活路要連線，那就必須靠我和下一家來阻擋他獲勝，那因為順位是我在前面，所以我有選擇權，跳到「同分比較順序表」進行判斷。

但若下下家 3x 或 6x 開頭的關鍵格有 3 格以上，那下下家會贏得勝利，提早結束遊戲。

玩家順位	我	下家	下下家
關鍵格出現			3x or 6x
關鍵格出現			3x or 3x

(三) 同分比較順序表 (自動化下棋的依據)

會進行同分比較順序表，代表在前提一樣的情況下，我們要進入下一階層的判斷，選出最佳位置，因此，這裡所說的「同分」，意思我有選擇權，所以此時前面考量過的條件對我來說條件是相等價值，這可分為兩種討論。第一種是我必須阻擋對手時，那我將對手那些關鍵格都視為同分，因為我保有選擇權，但我可以從對手的關鍵格中選擇對自己比較有利的分數進行考量；第二種是我要創造自己的有利條件時，也就是我自己的最高分不只一個時，那我應該想辦法阻擋對手，阻擋到對手連線可能越多代表相對距離拉得越開，對我更有優勢。

因此，會有以下兩個順序在同分比較時要依序考慮。

1. 若必須阻擋對方時，選擇可以立即創造出自己最多活路的位置去下

只能從阻擋對方的幾個關鍵格做選擇，所以選擇自己分數高的位置下，因為有許多的活路都是隱藏的，因此你要在這些選擇之中可及時創造出最多活路的為優先。

2. 若能創造的活路一樣多時，那就以那些格子中對手的最高分位置去下

如果能創造的活路一樣多，那就代表對於你來說，他們都是一樣的，所以你要去看別人的評分表，以可以阻擋他們高分的位置做選擇，除了可以創造自己的價值還能阻礙對手連線可能。

3. 若上述狀況都未發生，選最高分下，若有同分，進行叉路分析

因為上面的狀況若都沒有發生的話，代表其他要考量的條件都會是一樣的，因次剩下來的分數若是相等的，代表條件一樣，那這裡就會產生分支，而這樣的分支會是我們未來要回頭的節點，當研究玩一個完整的路徑有任一玩家獲勝之後，就要往上層去找到最近的節點，進行分叉研究，透果這樣反覆就能建立樹狀圖分析。

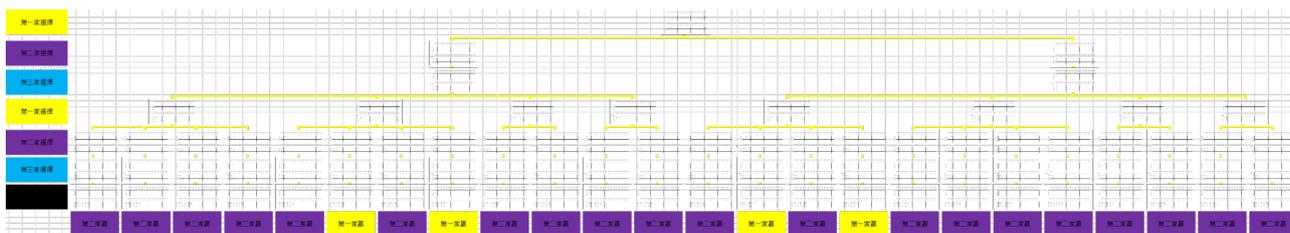
(四) 三人遊戲分析樹狀圖

根據上述的三大考量：

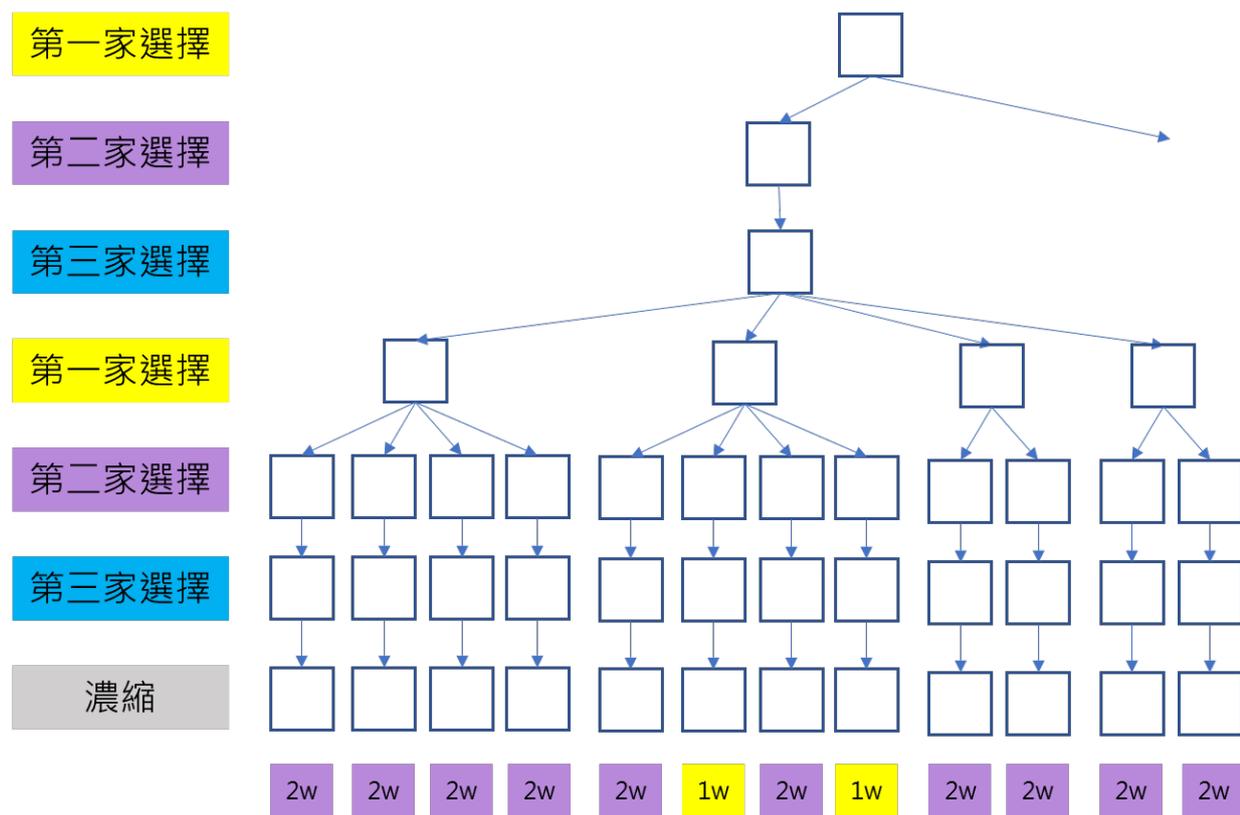
1. 合理化遊戲流程
2. 人工輔助流程表
3. 同分比較順序表

我們的分析就能根據上述標準進行下棋對戰研究，設定 3 位玩家都是使用下棋機器人輔助，搭配我們人工檢查三大考量，進行每一步的模擬，找出每一個樹狀圖所有分支的結果。

我們在 Excel 紀錄的原始格是如下：



由於資料實在太龐大的，所以我們簡化呈現成下表



以下說明我們如何看這個樹狀圖：

1. 大小棋對調後仍是相同的型態

第二位玩家一開始可以選擇的高分區分別是大棋與小棋，那會造成盤面正巧是大與小對調情況，因此我們的樹狀圖可以先切一半。

2. 當一連串玩家都只有單一選擇時，濃縮紀錄

如果有一整區塊的玩家都只有單一選擇，那我們就可以先濃縮紀錄，由最後一張勝負的棋步走法紀錄表就能回顧當時的狀況，所以可以濃縮紀錄，以灰色表示。

3. 原始紀錄表編號型態

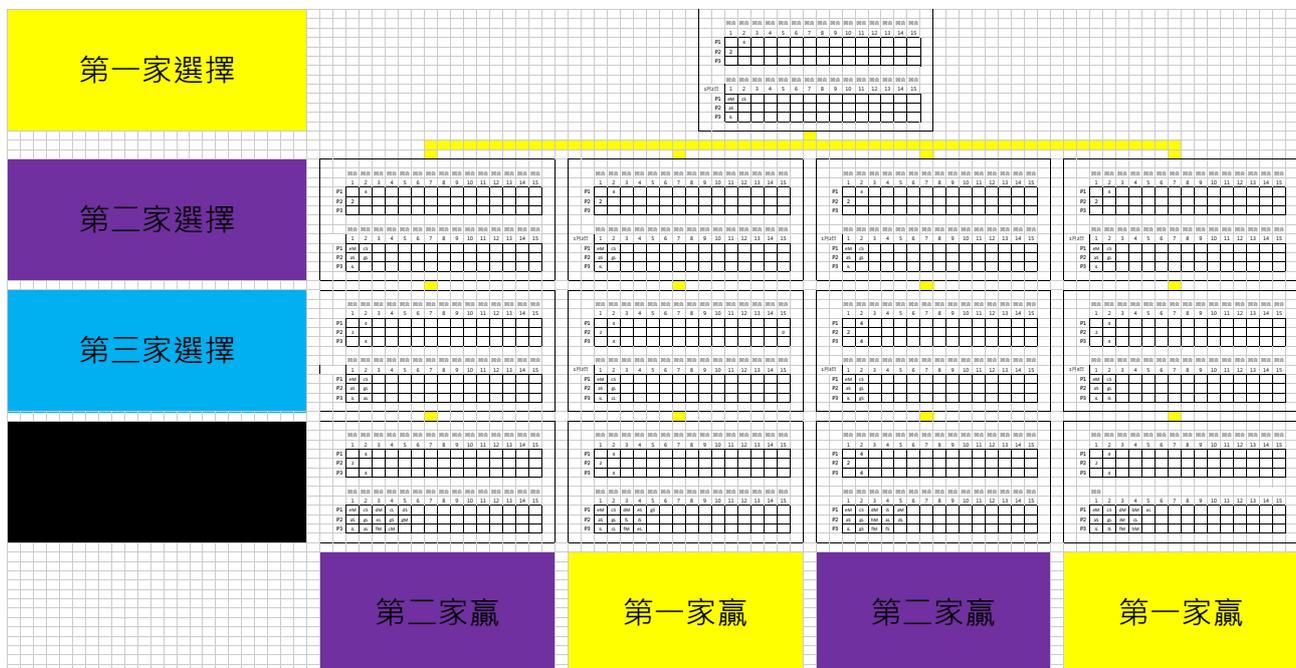
每一個方形代表一張記錄表，編號為{第幾回合 - 第幾位玩家 - 由左而右是這一系列的第幾個}，透過這樣編號可以在附件二找到對應棋步紀錄。

(五) 三人遊戲是否公平的分析結果

我們在一開始是假設遊戲是不公平的，因為只要是從井字棋延伸出來的遊戲，例如：奇蹟連連、奇雞連連……，以及井字棋都是對第一位玩家有利，是個不公平遊戲，所以說我們也認為說第一位玩家才是最有可能獲勝的

經由我們樹狀圖我們可以發現，第一位玩家並沒有絕對的優勢，我們所說的絕對的優勢是指，只要他下最高分的分支中的任何一條分支其他人不管怎麼去防守都無法不讓第一位玩家獲勝。

在樹狀圖的分析結果，會有第二家獲勝也會有第一家獲勝，因為我們是假定第一家有決定優勢，因此我們要判定的區塊會是最後第一家贏的狀況，可以取這一塊研究。



可以發現二號玩家是有機會避免第一家贏的，因此第一家沒有決定優勢，也就是其他玩家可以避免讓第一家獲勝。

因此，我們得到一個結論，Otrio 在三人玩時，先手玩家沒有絕對優勢，所以遊戲可能是公平的。

六、 探討四人玩 Otrio 的必勝方法

(一) 四人玩 Otrio 三大考量的微調。

1. 合理化遊戲流程

- A. 若該我不會馬上獲勝，必須努力延長回合
- B. 若下位玩家不會馬上獲勝，我必須先創造自己的機會

2. 人工輔助流程表

- A. 當有任 1 格的分數是 5x 或 8x 開頭時，下那一格直接贏得勝利
- B. 若「下家」有 1 格以上是 3x 或 6x 以上開頭，必須阻擋那下家分數高那格
- C. 若「下下家」有 2 格以上 3x 或 6x 開頭，必須阻擋下下家，但保有選擇權擋哪
- D. 若「下下下家」有 3 格以上 3x 或 6x 開頭，必須阻擋下下家，但保有選擇權擋哪

玩家順位	我	下家	下下家	下下下家
關鍵格出現				5x or 8x
關鍵格出現				5x or 8x
關鍵格出現				5x or 8x

這是因為如果是下下下家有 3 條以上的活路要連線，那就必須靠我、下家與下下家來阻擋他獲勝，那因為順位是我在前面，所以我有選擇權，跳到「同分比較順序表」進行判斷。但若下下下家 3x 或 6x 開頭的關鍵格有 4 格以上，那下下下家會贏得勝利，提早結束遊戲

- E. 若有 3 格 3x 或 6x 開頭，必須進行阻擋，但保有選擇權擋哪。

玩家順位	我	下家	下下家	下下下家
關鍵格出現			5x or 8x	5x or 8x
關鍵格出現				5x or 8x

下下家 1 條活路，下下下家 2 條活路，就必須要我、下家與下下家出來擋才有辦法，但我順位再前面，所以我有選擇權，跳到「同分比較順序表」進行判斷。

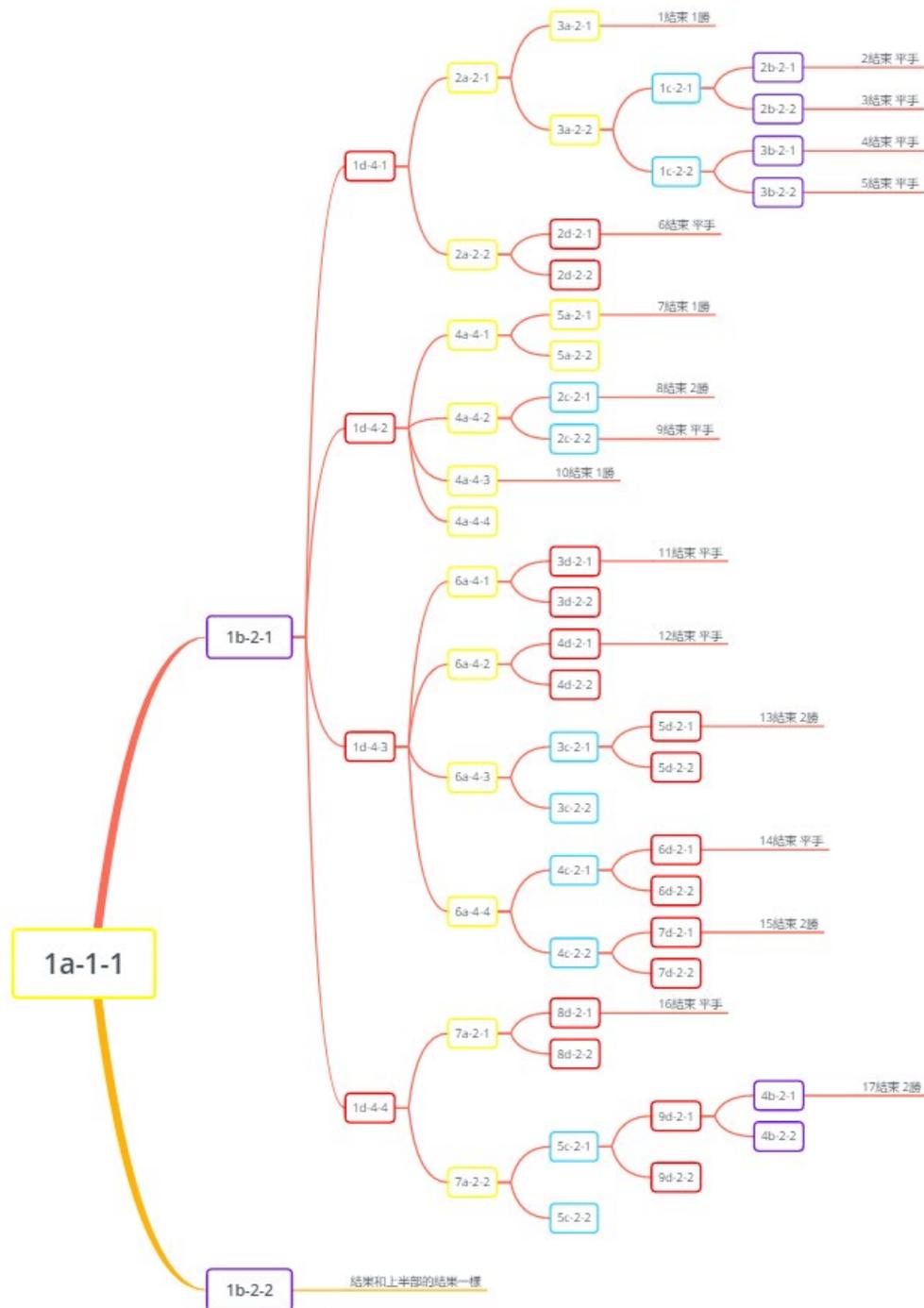
3. 同分比較順序表

- 1. 若必須阻擋對方時，選擇可以立即創造出自己最多活路的位置去下
- 2. 若能創造的活路一樣多時，那就以那些格子中對手的最高分位置去下
- 3. 若上述狀況都未發生，選最高分下，若有同分，進行叉路分析

新增了 2 個要考量的，可發現新增規則是有規律的，也可以拓展到五人以上的研究。

(四) 流程圖

我們在四人玩絕對優勢研究的樹狀分析圖如下：



(五) 四人遊戲是否公平的分析結果

根據我們的樹狀圖來看，在這過程當中，玩家四為了不要讓玩家一獲勝，所以會選擇玩家一無法獲勝的分支(1d-4-3、1d-4-4)，而玩家一又會避免去讓玩家二獲勝，所以玩家一會去選擇玩家二無法獲勝的分支(6a-4-1、6a-4-2、7a-2-1)，最後就會造成平手，所以四人遊戲對玩家一來講，沒有絕對優勢。

陸、 研究結果與討論

一、 探討遊戲公平與否的研究策略與方向

假若遊戲是公平與不公平會引發兩種全然不同的狀況，如果是公平，那我們必須建立全部可能的分支圖，說明沒有任何一條路徑有某位玩家必勝的；如果是不公平，我們只要建立部分分支圖，說明過程中其他玩家完全守不住某位玩家的攻勢，不管怎樣都是輸給他。

因此，我們研究假設遊戲是不公平，想嘗試找到一個必勝路徑就可以證明遊戲不公平。

二、 探討各種玩法最快有輸贏的理想狀況

我們分析了兩人三人與四人最快有輸贏的理想狀況，因為這個理想狀況可以協助我們知道如果輸贏在這之前發生，代表是不合理的狀態；透過這個分析，我們也能比較清楚知道決勝局面會發生在哪裡。

三、 探討初始勝率並設計自動對戰評分表

研究過程中必須假定玩家都是不犯錯的，因此如果是我們很努力地下棋，這也無法說服別人我們都是最佳選擇，因此我們思考到初始勝率，根據場上所有的連線的可能，討論不同棋子在不同位置有幾種連線可能，根據這個評分方式協助我們判斷下棋，那就有了依據。

四、 探討兩人玩 Otrio 的必勝方法

研究發現，兩人玩 OTRIO 是不公平的，先手有必勝優勢，後手玩家第一顆棋不管下在哪個位置，最終都是先手玩家獲勝。

五、 探討三人玩 Otrio 的必勝方法

我們的評分表可以自動根據場上狀況自行調整，但同分時，還是有一些合理順位必須考量，這個是我們使用 EXCEL 寫不出來的功能，所以我們擬定了同分比序做為玩家下棋的選擇。當我們實際進行三人遊戲模擬時，發現先手玩家沒有必勝優勢

六、 探討四人玩 Otrio 的必勝方法

我們在樹狀圖討論過程中，發現有許多選擇是可以省略不需要討論的，因為有些局面是大棋與小棋的顛倒局面，因此，我們只要證明出其中一邊，就能知道另一邊的結果，而當我們實際進行三人遊戲模擬時，發現先手玩家沒有必勝優勢

柒、 結論

一、 透過 Excel 設計 Otrio 下棋程式成功

透過 Excel 設計下棋程式可以讓我們方便記錄下棋過程(螢幕截圖)，也方便我們根據這個基本的架構設計評分表，因為可以根據場上下棋的數字進行判別。所以是有助於研究。

二、 靜態棋譜是根據連線可能評分製作

我們將場上全部淨空狀態做討論，討論大棋、中棋與小棋在每一個位置的連線可能，透過加總算出靜態的連線機會積分。這就是一個初始的下棋判斷。

三、 動態棋譜可根據場上對手與自己所剩的連線可能自動給予評分，協助下棋

因為靜態評分表不會隨著場上狀況進行改變，因此我們透過 EXCEL 寫了非常多的判別式，透過集合的邏輯概念，and、or、not...等，完成了判斷自己與對手的所剩的連線可能，以及阻擋機會，並且能在快連線時，加分高值，讓我們可以更優先的知道該下在那個位置。

四、 預設遊戲不公平，先手必勝的研究策略

因為遊戲若是公平，那必須將所有可能都討論過，那建立的樹狀圖非常龐大的，因此，我們預設遊戲是不公平的，只要找到一個路徑，讓某一位玩家擁有絕對優勢，在過程中，只要其他玩家不管怎麼選擇都還是輸給他的話，那就代表該玩家擁有絕對優勢。而我們也只需要建立出這一搓樹狀圖就可以了。

五、 遊戲在兩人時，先手選擇太多，所以必勝

遊戲在兩人時，是不公平的，因為先手玩家有絕對優勢，他的選擇會讓後者不管選哪一個位置都還是輸。我們研究發現，這是因為相較於傳統的井字棋，先手一開始擁有太多的棋子與空間選擇，因此很容易就可以製作出活路，可以是雙活路、三活路，甚至是四活路。因此兩人反而不公平，我們也建立了必勝路徑證明。

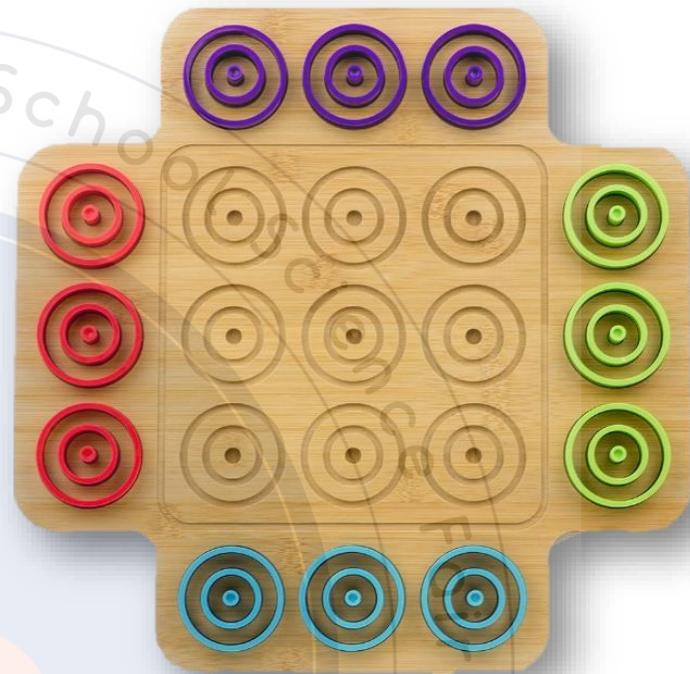
六、 遊戲在三人與四人時，先手沒有必勝優勢，所以遊戲在多人「可能」公平

我們建立了三人與四人的樹狀圖，發現其他玩家總有其他選擇可以避免先手玩家贏得遊戲，且很特別的是，在四人遊戲中，反而是第二家玩家在眾多分支圖中，擁有許多贏的機會。我們推論與場上活路有關，我們研究發現當場上活路為總人數時，擁有活路的後下玩家反而可以避免被其他人阻擋的機會，而擁有一些優勢，我們猜想可能跟這個有關。

【評語】 080403

1. 該作品從一個經典的遊戲出發，結合資訊科技的運用，有效節約了研究的過程，值得鼓勵。
2. 研究者探討 Otrio 桌遊遊戲的公平性即是否有必勝的策略，主題有趣。該遊戲由傳統井字遊戲擴充每格子可放三種旗子，增加連線的多樣性與遊戲參與人數的限制，然而該作品將 EXCEL 程式巧思應用，成功將該遊戲轉換到電腦中方便研究觀察，並透過裡面程式運算功能設計輔助下棋程式提升研究進度，最後程式不足處再由人為判斷完成結果。
3. 此作品以兩人、三人、四人等不同遊戲情境，依序進行討論，並區分玩家在是否有阻擋的策略下的贏家策略，思路明快清晰。
4. 本研究設計的「動態棋譜」—根據場上狀況自動評估得分，玩家可依據下棋，評估的標準是連線數量與阻擋機會，有效輔助下棋的過程，值得肯定。

作品簡報



探討多人玩的井字棋

Otrio是否有必勝方法

研究動機

井字棋是一個經典的遊戲，已被研究證明，在2個人都夠聰明的情況下一定會和局。為了擴充遊戲變化性，有人把井字棋改編成另2款桌遊，分別是**奇雞連連**、**棋蹟連連**。這兩款遊戲在全國科展第58屆：**棋盤上的奇蹟-奇「雞」連連**也有討論過，若遊戲回歸到原始設計，是多種棋進行時，都是先手必勝，也就是說擴充了遊戲玩法，但卻反而**不公平**。

所以有人把這些遊戲又繼續延伸出一種叫做**Otrio的桌遊**，是4人玩的井字棋。我們初步觀察到若第1位創造出雙活路也不一定會贏，反而在第2位的人可以不用防守，把防守工作留給第3位、第4位來防守，這時可達到一石二鳥：**第1位的雙活路會被破解**，**第3位和第4位也沒辦法製造出活路**。所以**可能是第2位是最有利**，有可能打破傳統對於第1位通常具有絕對優勢的想法。因此我們想研究，並找出**Otrio是否為公平的桌遊**？

為了有效率地研究出是否公平，我們以**評分表**建立一個下棋的**機器人(下棋輔助器)**，透過連線數量可能評估下棋選擇，如果他夠厲害可以順利取得**絕對優勢**的話(較有效率)，那遊戲就確定是不公平。因此，我們研究有一個重點是**分析連線可能並能動態調整評分而打造出下棋機器人，進行樹狀圖分析**。

研究目的

- 一 探討遊戲公平與否的研究策略與方向
- 二 探討各種玩法最快有輸贏的理想狀況
- 三 探討初始勝率並設計自動對戰評分表
- 四 探討兩人玩Otrio的必勝方法
- 五 探討三人玩Otrio的必勝方法
- 六 探討四人玩Otrio的必勝方法

Otrio多人井字棋規則

每位玩家有3種棋：**大棋**、**中棋**與**小棋**。棋盤九宮格基礎，但每一個位置都還區分3個大小位置，可放大棋、中棋與小棋。**玩家依序輪流下棋**，只能從場外將棋放入場內，場內的棋不能動，過程中只要有任何一個玩家連線成功，就獲勝；若玩到棋盤位置都被占滿，沒有任何連線就代表是個和局的狀態。

連線成功的定義有三種：

1. 大中小一直線



同一個玩家的大棋、中棋與小棋必須依序由大到小或由小到大出現在同一直線、橫線或斜線上，若符合這個條件，代表該玩家獲勝。

2. 大中小同一格



大棋、中棋與小棋在九宮格的任何一個位置內，如果都是同一個玩家的棋子，就代表該玩家獲勝。

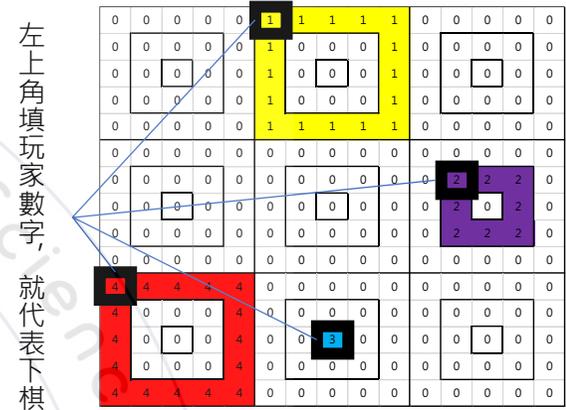
3. 同位階一直線



同一玩家在任一一直線、橫線或斜線上，有三個一樣尺寸的棋子，代表該玩家獲勝。

研究設備：Excel版本的虛擬井字棋

我們運用科技挑戰用Excel模擬下棋，能進行紀錄，也方便回溯。根據九宮格的概念將9個格子能放大棋、中棋與小棋三種狀況，分別設計出環狀的區塊。那**每一個環狀區塊的左上角**可以填數字1~4，代表不同玩家。**遊戲初始值是0**，代表沒有任何玩家下棋，而若有任何一個玩家點選擇要下哪個區塊，就在**左上角寫上自己的編號**，而我們已經寫好整個環狀的其他格子都等於左上角那一格，所以全部會變成一樣的數字，再使用「**條件式格式設定**」尋找格子是1、2、3或4，就分別塗上黃色、紫色、藍色與紅色代表4種不同玩家。如此一來就能在電腦上直接對戰，還可以擷取螢幕畫面紀錄棋步



一、探討遊戲公平與否的研究策略與方向

探討遊戲是否公平時，最直覺就是將所有玩家的選擇以樹狀圖分析所有可能，若玩家無論選擇哪一步，最終都將導致另一名玩家獲勝的話，那就可以說我們**窮舉了所有可能**，但是都守不住獲勝的玩家，因此遊戲**不公平**；但反過來說，若樹狀分析圖中，有一分支存在其中一個玩家獲勝，但過程中其他玩家可以**避免的**，讓遊戲最終成為**和局**，那我們就可以說遊戲是**公平**。

這2種思維會造成我們研究過程中付出的時間有很大的落差。

(一) 假設遊戲是不公平：比較容易找出來，只要**能掌握任何一種必勝走法**，且其它玩家在過程中都無法改變結局，代表**遊戲不公平**。理論上只要找出樹狀圖眾多分支的其中一「搓」樹狀圖，都導致一樣的結果。

(二) 假設遊戲是公平：那麼**必然不存在任何一種必勝走法**，而哪一條路徑是必勝走法，必須真實的窮舉出**所有可能才能確認沒有這條路**，以玩家每次有3種棋且有27種位置(隨著回合進行會每次減1)，若是將遊戲玩到格子都被填滿，那麼樹狀圖的分支將會是 $(3 \times 27) \times (3 \times 26) \times (3 \times 25) \times \dots (3 \times 1)$ 遞減依序乘下去，總共27個數字相乘，答案約 $8.30341E + 40$ ，這樣的研究數量實在太大的，研究過程將會非常耗時。

(三) 我們假設遊戲是不公平作為研究努力方向：基於以上兩點，**先朝向遊戲是不公平的可能去猜測**，並運用評分表決定下棋位置作為優化策略，理論上若有必勝走法，就會出現在這些選擇中，因此，如果找到一個路徑是有任何一玩家必勝的話，那麼就代表遊戲不公平，這部分是沒問題的。但若沒找到的話，只能說我們試了很大的努力(以相對優勢走法選擇)，遊戲沒找到必勝玩法，我們無法百分百確認遊戲是否公平，但有很高的機率是公平的，因為較好的選擇我們都試過了。

二、探討各種玩法最快有輸贏的理想狀況

(一)討論主題：探討2人玩時，最快有輸贏的回合與總步數(假設在創造活路的過程中沒有人阻擋的情況下)：

1. 假設都沒有阻擋：只需3個回合、兩人總共5步的時候會有人獲勝。
2. 假設活路後有阻擋：可以在第3回合時創造出雙活路，如過第2人有阻擋的話第1人還會有1條活路，所以第1人會在第4回合且兩人總共動7步時獲勝。

(二)討論主題：探討3人玩時，最快有輸贏的回合與總步數(假設在創造活路的過程中沒有人阻擋的情況下)：

1. 假設都沒有阻擋：只需3個回合、3人總共動7步的時候會有人獲勝。
2. 假設有1人沒有阻擋，並創造出自己的活路：最快要在第3個回合中創造出雙活路，因為有1人為了創造出自己的活路，所以沒有擋。然後第1人會在第4個回合、3人總共動1步時獲勝。因為這樣第1人就獲勝了，所以不會發生。
3. 假設活路後有阻擋：可以在第3回合時創造出3活路，如過第2人、第3人都阻擋的話第1人還會有1條活路，所以第1人會在第4回合且3人總共動7步時獲勝。

(三)討論主題：探討4人玩時，最快有輸贏的回合與總步數(假設在創造活路的過程中沒有人阻擋的情況下)：

1. 假設都沒有阻擋：只需3個回合、4人總共動9步的時候會有人獲勝。
2. 假設有2人沒有阻擋，並創造出自己的活路：可在第3回合時創造出雙活路，如過第2人、第3人都沒有阻擋的話只有第4人有阻擋的時候，第1人還會有1條活路，所以第1人會在第4回合且3人總共動13步時獲勝。
3. 假設有1人沒有阻擋，並創造出自己的活路：最快要在第4個回合中創造出3活路，因為第2人為了創造出自己的活路，所以沒有擋。所以第3人和第4人各阻擋了1條活路，第1人還會有1條活路，然後第1人會在第4個回合、4人總共動13步時獲勝。
4. 假設活路後有阻擋：因為無法只創造4活路，3顆棋最多可以製造出3活路但如果其他3人都阻擋的情況下，這樣的話不會獲勝，所以需要第4顆棋，第4顆棋最多可以創造出6活路3人都各阻擋1條活路的情況下第1人還會有3條活，所以第1人會在第5回合且4人總共動17步時獲勝。

三、探討初始勝率並設計自動對戰評分表

(一)靜態棋譜(下棋輔助器1.0)：

靜態棋譜根據每一種棋在每一種位置的初始連線可能。想法來自於先將傳統的井字棋進行簡單研究，想知道為何正中央的格子是最佳位置。發現透過連線的可能數來看，正中央格是4種連線的交點。透過這個想法，若把每一格連線的次數累加，那就可以成為這一格的價值，全部討論完，就是一個初始下棋位置的考量範本。

7 7 7 7 7	4 4 4 4 4	7 7 7 7 7
7 4 4 4 7	4 5 5 5 4	7 4 4 4 7
7 4 7 4 7	4 5 4 5 4	7 4 7 4 7
7 4 4 4 7	4 5 5 5 4	7 4 4 4 7
7 7 7 7 7	4 4 4 4 4	7 7 7 7 7
4 4 4 4 4	5 5 5 5 5	4 4 4 4 4
4 5 5 5 4	5 13 13 13 5	4 5 5 5 4
4 5 4 5 4	5 13 5 13 5	4 5 4 5 4
4 5 5 5 4	5 13 13 13 5	4 5 5 5 4
4 4 4 4 4	5 5 5 5 5	4 4 4 4 4
7 7 7 7 7	4 4 4 4 4	7 7 7 7 7
7 4 4 4 7	4 5 5 5 4	7 4 4 4 7
7 4 7 4 7	4 5 4 5 4	7 4 7 4 7
7 4 4 4 7	4 5 5 5 4	7 4 4 4 7
7 7 7 7 7	4 4 4 4 4	7 7 7 7 7

4人玩Otrio井字棋靜態評分表

3	2	3
2	4	2
3	2	3

傳統Tic-Tac-Toe井字棋靜態評分表

可以看出傳統井字棋是以正中央分數最高，總共有4次連線機會；而Otrio也是正中央e格，但是只有中棋M分數比較高，高達13次連線機會，L與S都是5次。這是因為成功連線型態中有一個是「大中小一直線」，所以中央位置(e格)放中棋M會多了8個方向可以完成大中小一直線，所以多出8次機會。

那根據以上簡單分析，傳統井字棋先手是下中央位置(e格)；因此Otrio第一步棋也應該下中棋在正中央的位置(e格)。

三、 探討初始勝率並設計自動對戰評分表

(二)動態棋譜(下棋輔助器2.0_自動扣分系統 vs 下棋輔助器3.0_自動加分系統)：

自動扣分系統是先累加待會要被靜態評分表的初始分數扣除的分數(以對方占據一種連線可能就+1)；只要連線可能被其他玩家佔據，就扣除那條線的連線可能，因此評分表分數會隨著回合越來越少。

自動加分系統是對手或自己已有2顆棋完成活路布局時，必須把關鍵位置加高分。亦有可能是自己快連線與對手快連線同時出現，這時參考靜態棋譜最高分13分為基礎，將自己快連線的關鍵格加上50分，對手快連線的關鍵格加上30分，並且把累加的分數再加入到原始評分表中。

以a格大棋L的原始分數7分來說，代表原本他有7種連線機會，因此寫7次判別式。再進一步以A1這格為例，並且討論第1種連線可能如何分別寫下扣分與加分的判別式：

扣分範例

$$= IF(AND(OR(V1 = 0, V1 = Q1), OR(AA1 = 0, AA1 = Q1)), 0, 1)。$$

想法是，如果V1如果是0代表還沒有人下，或Q1與AA1是填了與V1若相等的數字的話，代表是自己的機會，所以不扣分+0，反之+1(累積越多要扣掉的就越多)

加分範例

$$= IF(AND(V1 = Q1, AA1 = Q1), 50, IF(AND(V1 = AA1, OR(V1 = 2, V1 = 3, V1 = 4)), 30, 0))$$

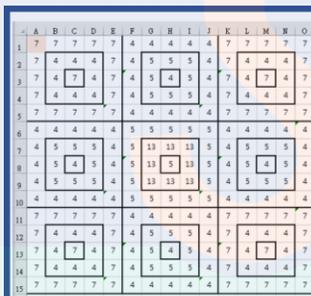
想法是，如果V1與AA1相等，且又跟AA1相等，代表自己有活路，+50，否則如果V1與AA1相等，但是2、3或4其中一個，代表其他玩家活路+30。

根據7種連線狀況寫出7個輔助格，再整併起來，就寫完1格了，以上是L棋在a格的討論。

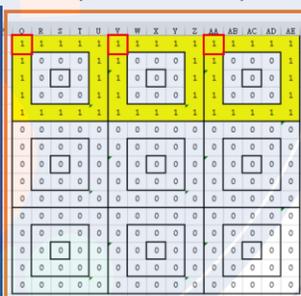
接著，要依據大中小棋在9個位置的27種狀況，分別根據它們的得分，寫出相等於得分數量的判別式；因此扣分與加分分別要寫**a格(7 + 4 + 7) + b格(4 + 5 + 4) + c格(7 + 4 + 7) + d格(4 + 5 + 4) + e格(5 + 13 + 5) + f格(4 + 5 + 4) + g格(7 + 4 + 7) + h格(4 + 5 + 4) + i格(7 + 4 + 7) = 147**個判別式。

因此，扣分與加分系統共要寫下**147 × 2 = 294**個判別式，就能完成**動態棋譜的自動扣分與加分系統**。

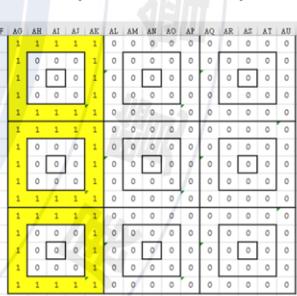
原始評分表，以A1的7分為例，代表7種連線可能



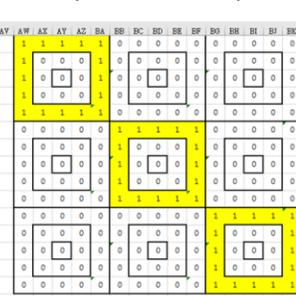
第1種連線可能 (同位階一直線)



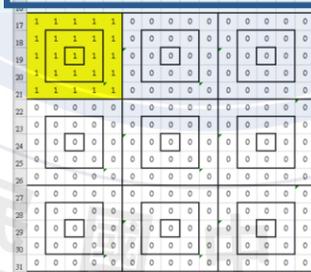
第2種連線可能 (同位階一直線)



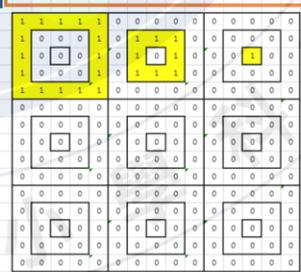
第3種連線可能 (同位階一直線)



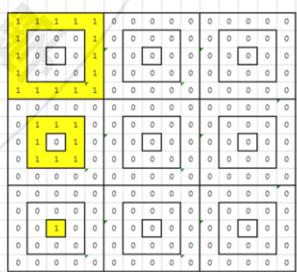
第4種連線可能 (大中小同一格)



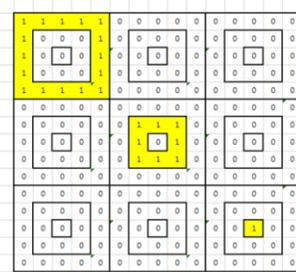
第5種連線可能 (大中小一直線)



第6種連線可能 (大中小一直線)

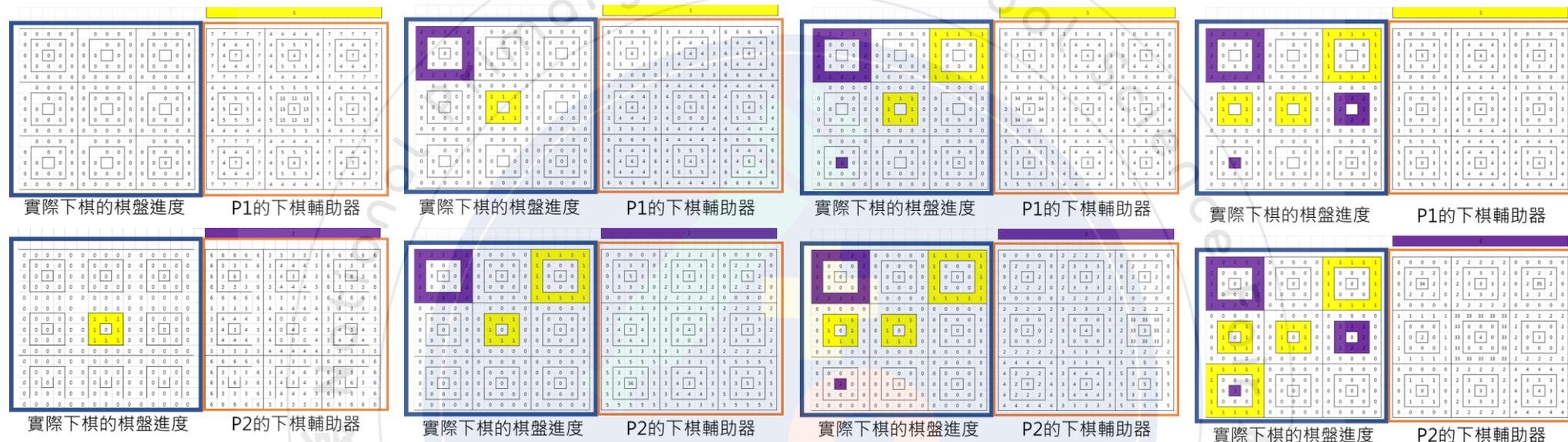


第7種連線可能 (大中小一直線)



四、 探討兩人玩Otrio的必勝方法

以下是我們透過下棋輔助器在Otrio兩人的研究。每一次下棋時，P1與P2玩家都會各自參考自己的下棋輔助器。並透過輔助器的高分提示進行下棋。



因此，完整的考量為：

P1第一步選擇eM=13分；P2第一步選擇aL=6分(此時有叉路)；P1第二步選擇cL=6分；P2第二步選擇gS=36分；P1第三步選擇dM=34分；P2第三步選擇fM=33分；P1第四步選擇gL=5分；P2的評分表出現aS=34、eL=33分、cS=35分，代表對方三活路，故輸掉比賽，且除了P2第一步選擇有叉路之外，之後P2完全處於被動防守直到遊戲結束。回頭檢視P2第一步時有8個選擇，回到那個叉路去討論，看是否能避免必輸的狀況。但是當時是一個對稱圖形，因此無論選擇哪一個位置，對於P2來說，只是盤面觀看的角度不同，無法改變戰局。

若當時P2第一步選擇aL：

若當時P2第一步選擇aS：

	回合 1	回合 2	回合 3	回合 4
P1	eM	cL	dM	gL
P2	aL	gS	fM	

	回合 1	回合 2	回合 3	回合 4
P1	13	6	34	5
P2	6	36	33	34 · 33 · 35

	回合 1	回合 2	回合 3	回合 4
P1	eM	cS	dM	gS
P2	aS	gL	fM	

	回合 1	回合 2	回合 3	回合 4
P1	13	6	34	5
P2	6	36	33	34 · 33 · 35

所以，我們可以下一個結論，Otrio在兩人玩時，先手必勝，遊戲不公平。

五、 探討三人玩Otrio的必勝方法(三人與四人規則表一併說明)

當遊戲超過2人以上，下法如**研究目的二**的討論分析那樣，當有人快連線時，依據不同順位，玩家可以根據會不會立即造成輸贏來選擇「擋」或「不擋」，也就是說若不是該玩家的下家有活路的話，那可以選擇留給下一家去阻擋另一個玩家的活路。

一、合理化遊戲流程

因為有這樣的變形，所以在3人以上討論時，我們擬定兩項必須遵守大前提，讓下棋的選擇更統一且合理化。我們以第一人稱代表即將下棋的玩家來說明比較不會搞混。

- 1.若該我不會馬上獲勝，必須努力延長回合：**若我本身沒有活路，而其他玩家至少有兩家已經有活路了，那我必須依順位優先選擇「擋」接下來有活路的玩家。
- 2.若下位玩家不會馬上獲勝，我必須先創造自己的機會：**若下家沒有活路，而下下家有活路的話，那必須選擇不去阻擋下下家，留給下家擋，並先創造自己的活路。

二、人工輔助流程表(黑色字體為3人適用，棕色字體為4人適用)

- 1.當有任1格的分數是5x或8x開頭時，下那一格直接贏得勝利：**這是因為我們將自己要贏的勝利的那一格設定成加50分，因為加50，我們就以5x開頭來說明，實際上有可能初始分數是一位數或二位數而讓加分後變成50幾分獲60幾分，但我們統一使用5x表示；至於8x開頭則是因為那個除了可以讓自己贏得勝利外，這一格也有可能是敵人要連線的30分，而敵人可能不只一個關鍵格在這，所以可能30會加不只一次，我們還是統一使用8x開頭，代表自己與敵人的關鍵格都在這而不論是5x或8x，都是玩家關鍵格，所以選擇最高分的位置下棋，直接贏得勝利，提早結束遊戲。
- 2.若「下家」有1格以上是3x或6x以上開頭，必須阻擋那下家分數高那格：**加分系統是將對手活路的關鍵格設定為+30分，但可能是下家要連線，下下家要連線，或是前一家要連線。但若是下家有3x開頭以上的關鍵格，代表只有我能擋，所以一定要擋，選分數最高的去擋，而6x開頭代表這一格同時是2位其他玩家以上的關鍵格，會加不只一次30分，但我們統一以6x開頭代表。
- 3.若「下下家」有2格以上3x或6x開頭，必須阻擋下下家，但保有選擇權擋哪：**這是因為如果是下下家有2條以上的活路要連線，那就必須靠我和下一家來阻擋他獲勝，那因為順位是我在前面，所以我有選擇權，跳到「同分比較順序表」進行判斷。但若下下家3x或6x開頭的關鍵格有3格以上，那下下家會贏得勝利，提早結束遊戲。
- 4.若「下下下家」有3格以上3x或6x開頭，必須阻擋下下家，但保有選擇權擋哪：**這是因為如果是下下下家有3條以上的活路要連線，那就必須靠我、下家與下下家來阻擋他獲勝，那因為順位是我在前面，所以我有選擇權，跳到「同分比較順序表」進行判斷。但若下下下家3x或6x開頭的關鍵格有4格以上，那下下下家會贏得勝利，提早結束遊戲。
- 5.若有3格3x或6x開頭，必須進行阻擋，但保有選擇權擋哪：**下下家1條活路，下下下家2條活路，就必須要我、下家與下下家出來擋才有辦法，但我順位再前面，所以我有選擇權，跳到「同分比較順序表」進行判斷

三、同分比較順序表

- 1.若必須阻擋對方時，選擇可以立即創造出自己最多活路的位置去下：**只能從阻擋對方的幾個關鍵格做選擇，所以選擇自己分數高的位置下，因為有許多的活路都是隱藏的，因此你要在這些選擇之中可及時創造出最多活路的為優先。
- 2.若能創造的活路一樣多時，那就以那些格子中對手的最高分位置去下：**如果能創造的活路一樣多，那就代表對於你來說，他們都是一樣的，所以你要去看別人的評分表，以可以阻擋他們高分的位置做選擇，除了可以創造自己的價值還能阻礙對手連線可能。
- 3.若上述狀況都未發生，選最高分下，若有同分，進行叉路分析：**因為上面的狀況若都沒有發生的話，代表其他要考量的條件都會是一樣的，因次剩下來的分數若是相等的，代表條件一樣，那這裡就會產生分支，而這樣的分支會是我們未來要回頭的節點，當研究玩一個完整的路徑有任一玩家獲勝之後，就要往上層去找到最近的節點，進行分叉研究，透果這樣反覆就能建立樹狀圖分析。

(根據4人新增的2個考量，可發現新增規則是有規律的，因此，五人以上的研究也可依此規律拓展。)

五、 探討三人玩Otrio的必勝方法

根據下棋輔助器，並且以人工輔助流程表與同分比較順序表，就可以依此規則建立樹狀圖；可以說每位玩家都是選擇對自己較有優勢的選擇，若還能有任一玩家能獲勝，且沒有辦法避免的話，那就是確立玩家具有絕對優勢；若任一玩家獲勝了，但回溯前面的分支時，其他玩家可避免的話，那就代表該玩家不具絕對優勢。

以下說明如何看樹狀圖：

1.大小棋對調後仍是相同型態

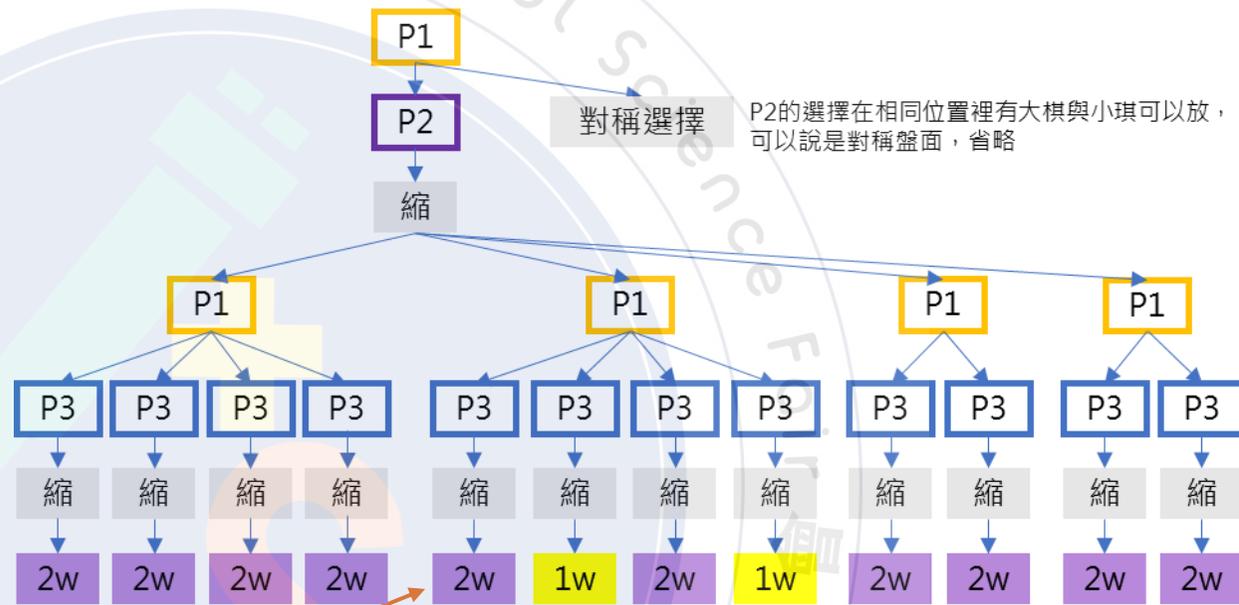
第二位玩家一開始可選擇的高分區分別是大棋與小棋，造成盤面正巧是大與小對調情況，因此樹狀圖可以先切一半。

2.當一連串玩家都只有單一選擇時濃縮紀錄

若一整區塊的玩家都只有單一選擇，就先濃縮紀錄，可由最後一張勝負的棋步走法紀錄表就能回顧當時的狀況，以灰色表示。

3.原始紀錄表編號型態

每個方形代表一張記錄表，編號為{第幾回合-第幾位玩家-由左而右為這列第幾個}



以表5-2-5說明三人玩Otrio的分析結果，紀錄表分為上下部，上半部記錄了若任何玩家有任何一條分支可以選擇的話，我們會將分支的選擇數量寫下來，若不寫就是最高分只有一個，若寫了2以上，就代表評分出來後，透過「人工輔助流程表」以及「同分比較順序表」之後，仍然有兩個以上的選擇，就進行叉路研究分析。如此一來，也任何一個分支產出結果後，就直接回到前面流程任何玩家有叉路的地方再進行發展研究。

		5-2-5														
		回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P1			4													
P2	2															
P3		4														
		回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	回合	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P1	eM	cS	dM	cL	dS											
P2	aS	gL	eL	gS	gM											
P3	iL	aL	fM	cM												

這個紀錄表顯示第二位玩家獲勝：

過程中，P1、P2與P3都有叉路的關鍵選擇，而且依序是P2、P1、P3有選擇，所以是第二位玩家將局面先切兩大半，但這種盤面是對稱的，是在同一個位置，大棋或小棋的選擇，所以選一個就可以了；接著第一位玩家有四種選擇，但這些決定會影響到自己有沒有機會贏，因為最後關鍵是第三位玩家的選擇將影響是第一還是第二位玩家獲勝，因此可以發現第一位玩家沒有絕對優勢。而且第二位玩家反而有很多情況下獲勝，與我們一開始思考遊戲可能的樣貌吻合。

研究結果與討論

一、探討遊戲公平與否的研究策略與方向

假若遊戲是公平與不公平會引發兩種全然不同的狀況，如果是公平，那我們必須建立全部可能的分支圖，說明沒有任何一條路徑有某位玩家必勝的；如果是不公平，我們只要建立部分分支圖，說明過程中其他玩家完全守不住某位玩家的攻勢，不管怎樣都是輸給他。

因此，我們研究假設遊戲是不公平的思維進行研究。運用評分表決定下棋位置作為優化策略，理論上若有必勝走法，就會出現在這些選擇中，因此，如果找到一個路徑是有任何一玩家必勝的話，那麼就代表遊戲不公平。但若沒找到的話，只能說我們試了很大的努力(以相對優勢走法選擇)，遊戲沒找到必勝玩法，我們無法百分百確認遊戲是否公平，但有很高的機率是公平的，因為較好的選擇我們都試過了。

二、探討各種玩法最快有輸贏的理想狀況

我們分析了兩人三人與四人最快有輸贏的理想狀況，因為這個理想狀況可以協助我們知道如果輸贏在這之前發生，代表是不合理的狀態；透過這個分析，我們也能比較清楚知道決勝局面可能會發生在哪裡。

三、探討初始勝率並設計自動對戰評分表

研究過程中必須假定玩家都是不犯錯的，因此如果是我們很努力地下棋，這也無法說服別人我們都是最佳選擇，因此我們思考到初始勝率，根據場上所有的連線的可能，討論不同棋子在不同位置有幾種連線可能，根據這個評分方式協助我們判斷下棋，那就有了選擇依據，再根據場上狀況進行加減分調整。

四、探討兩人玩Otrio的必勝方法

研究發現，兩人玩Otrio是不公平的，先手有必勝優勢，後手玩家第一顆棋不管下在哪個位置，最終都是先手玩家獲勝。

五、探討三人玩Otrio的必勝方法

我們的評分表可以自動根據場上狀況自行調整，但同分時，還是有一些合理順位必須考量，這個是我們使用EXCEL寫不出來的功能，所以我們擬定了「人工輔助流程表」以及「同分比較順序表」做為玩家下棋的選擇。當我們實際進行三人遊戲模擬時，發現先手玩家沒有必勝優勢，甚至是第二位玩家較具優勢，打破傳統。

六、探討四人玩Otrio的必勝方法

四人的研究中，發現先手玩家沒有絕對優勢，且遊戲大多會進行到場上沒任何玩家有機會連線而平手。若以所有玩家都選擇最佳化選擇來看，有兩大塊樹狀圖的結果都是顯示平手，且回顧紀錄表可以發現並不是先手玩家在同分時選擇了弱勢的機會，造成平手，反而是其他玩家的選擇，迫使P1只能往平手的可能前進。

研究結論

一、透過Excel設計Otrio下棋程式成功

透過Excel設計下棋程式可記錄下棋過程，並根據這架構設計評分表，可根據玩家選擇進行判別。所以是有助於研究。

二、靜態棋譜是根據連線可能評分製作

場上全部淨空做討論，大棋、中棋與小棋在每一位置連線可能，加總算出靜態連線機會積分。這就是一個初始的下棋判斷。

三、動態棋譜可根據場上對手與自己所剩的連線可能自動給予評分，協助下棋

因為靜態評分表不會隨著場上狀況進行改變，因此我們透過EXCEL寫了非常多的判別式，透過集合的邏輯概念，and、or、not...等，完成了判斷自己與對手的所剩的連線可能，以及阻擋機會，並且能在快連線時，加分高值，讓我們可以更優先的知道該下在那個位置。再以「人工輔助流程表」以及「同分比較順序表」將選擇更優化，便能將動態棋譜投入研究。

四、預設遊戲不公平，先手必勝的研究策略

遊戲若是公平，那必須將所有可能討論過，那建立的樹狀圖非常龐大；因此，我們預設遊戲是不公平。運用評分表決定下棋位置作為優化策略，理論上若有必勝走法，就會出現在這些選擇中，因此，如果找到一個路徑是有任何一玩家必勝的話，那麼就代表遊戲不公平。但若沒找到的話，只能說我們試了很大的努力(以相對優勢走法選擇)，遊戲沒找到必勝玩法，我們無法百分百確認遊戲是否公平，但有很高的機率是公平的，因為較好的選擇我們都試過了。

五、遊戲在兩人時，先手選擇太多，所以必勝

遊戲在兩人時，是不公平的，因為先手玩家有絕對優勢，他的選擇會讓後者不管選哪一個位置都還是輸。我們研究發現，這是因為相較於傳統的井字棋，先手一開始擁有太多的棋子與空間選擇，因此很容易就可以製作出活路，可以是雙活路、三活路，甚至是四活路。因此兩人反而不公平，我們也建立了必勝路徑證明。

六、遊戲在三人與四人時，先手沒有必勝優勢，所以遊戲在多人「可能」公平

三人與四人的樹狀圖，先手玩家不具絕對優勢，較特別的是，四人比三人遊戲有更多平手局面，三人反而是第二家玩家在眾多分支圖中，擁有許多贏的機會，推論與場上活路有關，我們研究發現當場上活路為總人數時，擁有活路的後下玩家反而可以避免被其他人阻擋的機會，而擁有一些優勢。而四人在玩家更多的情況下，可能相對空間少，進而和局。且決定平手的局面並非先手玩家的失誤，反而是後手玩家決定了有沒有可能平手的局面。因此OTRIO在四人時是可玩的。

參考文獻

[1]楊皓程等(2018)。棋盤上的奇蹟-奇「雞」連連。第58屆全國科展

[2]魏澹月等(2017)。井字代數樂。www.shs.edu.tw/works/essay/2017/11/2017110713082950.pdf

[3]周穎(2016)。打下好基礎_程式設計必修的數學思維與邏輯訓練。台北市：碁峰資訊。

[4]Christian Hesse(2016)。德國一流大學教你數學家的22個思考工具。台北市：大雁文化。