3-4 古典機率與期望值

林信安老師編寫

(甲)樣本空間與事件

◆ 隨機現象與隨機試驗：

世界上充滿著不確定性。從擲硬幣、丟骰子、玩撲克牌等簡單的機會遊戲，到複雜的社會現象；從嬰兒誕生，到世間萬物的繁衍生息；從天氣變化到大自然的千變萬化，...這其中充滿著隨機的現象。

自然現象與社會現象，大致上分成兩種，例如上拋的物體一定會落下，無論是什麼形狀的三角形，它的兩邊之和總是大於第三邊，這些現象用比較科學的語言來表達，那就是它們都服從特定的因果關係，從一定的條件出發，必定可以推出某一結果；但是在自然界與社會中還存有另一類現象，稱之為**隨機現象**，例如，在馬路交叉口，每天都要通過許多人和車輛，但是我們無法事先預測確切的人數及車輛數；擲一粒骰子，我們無法確定下一回會擲出幾點；買樂透彩券，我們也無法根據前幾期來預測下一期的得獎號碼，這些隨機現象天天都在發生。

雖然隨機現象並不是因果關係確定的現象，但是它有幾個特點：

隨機現象的結果至少有兩個，那一個結果會出現，人們事先並不知道。

隨機現象的例子：

(a)擲一枚硬幣，可能出現正面，也可能出現反面，但是事先並無法知情。

(b)明天天氣下雨與否，有時無法完全確定。

(c)MLB 或 NBA 明星賽的結果。

很多隨機現象可以大量重複，如擲一枚硬幣可以一直擲下去，可重複的隨機現象稱為**隨機試驗(random experiment)**，簡稱為**試驗**。也有很多隨機現象是無法重複的，例如一場籃球賽的輸贏，這兩類的隨機現象，都是機率的研究範圍，而高中的機率主要研究的是隨機試驗。

◆ 樣本空間與事件：

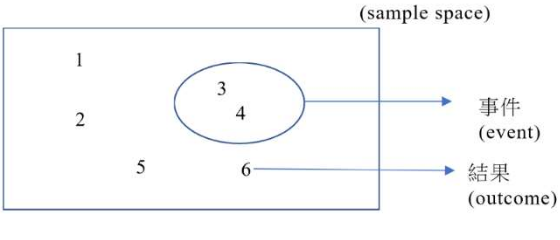
氣象報告常提到明天下雨的機率是 90%；兩球隊比賽，賽前很多人都會看好其中一隊，認為其中一隊會贏的機率是 6 成，這些都是生活中可能會遇到的問題，其中「明天下雨」、「某一隊贏球」都稱為**事件(event)**，這些事件事先都無法確定是否會發生，但通常我們都會根據以往的經驗來認定其發生的機率。

對於一個事件來說，它在一次試驗中，可能發生，也可能不發生，我們通常想評估某些事件發生的可能性有多大。事件 A 發生的可能性是可以度量的，就好像是一根木棒的長度、一塊土地的面積一樣。事件 A 發生的可能性大小稱為事件 A 的**機率**。我們觀察以下的例子：

(a)擲一粒骰子，所得點數大於 2。
(b)擲 3 個硬幣，至少有 2 個正面。
(c)在罰球線投籃，5 次之內投進。
(d)從一副撲克牌中，任意抽取兩張，它們的花色相同。
這些都是下列試驗的事件，依序為
(a)擲一粒骰子
(b)擲 3 個硬幣
(c)在罰球線投籃
(d)從一副撲克牌中，任意抽取兩張
「擲一粒骰子」這個試驗下，「點數大於 2」是一個事件，另外，「點數小於 6」、「點數是質數」、「點數是奇數」也都是事件，所以在同一個試驗下，可以有許多不同的事件，為了方便敘述起見，分別稱為事件 A、事件 B，…等等。
例如：
A：點數大於 2、B：點數小於 6、C：點數是質數、D：點數是奇數。
在數學上為了方便處理，我們將一個試驗下的各事件以集合表示，
例如：
擲一個骰子，「**點數為偶數**」的事件以**{2,4,6}**表示，而**{3,4,5,6}**表示「**點數大於 2**」的事件。
集合{1,2,3,4,5,6}所表示的事件，涵蓋了此試驗的所有可能，此集合稱為此試驗的
樣本空間(sample space)。
一般而言，樣本空間 S 的任一子集 (包含 S 與空集合) 稱為**事件**，S 的元素稱為**樣本點**，只含一個樣本點的事件稱為**基本事件**。

樣本空間與事件：
樣本空間常以 S 表示，S 的元素稱為**樣本點**，只含一個樣本點的事件稱為**基本事件**。 每一個事件 A(Event)都是樣本空間 S 的子集合，即 A⊂S，A 是一個事件。 **若試驗結果(outcome)屬於 A，則稱此事件 A 發生**。

例如，擲一粒骰子時，「點數和為偶數」以 E={3,4}表示，若擲出的結果為「4」，因為 4∈A，所以 **E 發生了**；若擲出的結果是「6」，6∉E，所以 E **沒發生**。



另一方面，當事件 A(擲出偶數點) 發生時，事件 B(擲出奇數點)一定不會發生，稱事件 A 與事件 B 互斥。即當 $A \cap B = \varnothing$ 時，事件 A 與 B 稱為**互斥事件**。

另外，事件 A 或 B 發生的事件 $A\cup B$ 稱為 A，B 的**和事件**；事件 A，B 同時發生的事件 $A\cap B$ 稱為 A，B 的**積事件**；事件 A 不發生的事件，即為 A 的**餘事件** A'。

[例題1] 袋中裝有編號 1, 2, 3, 4 號的球各一顆，分別按照下列方法從袋中取球並觀察球的號碼，試求以下各試驗的樣本空間。

(1)一次取一球，取兩次，球取後不放回。

(2)一次取一球，取兩次，球取後放回。

(3)一次取兩球。

[解法]：

設第一次球號為 x，第二次球號為 y，

(1)樣本空間以 (x, y) 為元素，因為球取後不放回，故 $x\neq y$，樣本空間

$S_1=\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$。

(2)樣本空間以 (x, y) 為元素，因為球取後放回，故 x 可能等於 y，樣本空間

$S_2=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1),(3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$。

(3)以 $\boxed{x, y}$ 表示兩次取得的球號，而且 $\boxed{x, y}$ 與 $\boxed{y, x}$ 視為相同的元素，

樣本空間 $S_3=\{\boxed{1, 2}，\boxed{1, 3}，\boxed{1, 4}，\boxed{2, 3}，\boxed{2, 4}，\boxed{3, 4}\}$。

[例題2] 擲一個骰子 2 次，觀察每次出現的點數，寫出此試驗的樣本空間。

設第一次擲出的點數為 x，第二次擲出的點數為 y，樣本空間以 (x, y) 為元素，其中 $x, y=1, 2, 3, 4, 5, 6$，故樣本空間

$S=\{(x, y)\mid x, y=1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(練習1) 箱中裝有編號 1～4 號的四張卡片，今分別依下列方法從箱中取出卡片並觀察其號碼，求以下各試驗中的樣本空間與樣本點的個數。

(1)取卡片二次，每次一張，卡片取出後不放回。

(2)同時取出兩張卡片，取出的卡片無次序之分。

Ans：(1)S={(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)}。

(2)S={$\boxed{1,2}$,$\boxed{1,3}$,$\boxed{1,4}$,$\boxed{2,3}$,$\boxed{2,4}$,$\boxed{3,4}$}

(練習2) (1) 丟一個硬幣 1 次，並觀察丟出的結果是正面或反面，試寫出樣本空間。

(2) 丟一個硬幣 2 次，並觀察每次丟出的是正面或反面，試寫出樣本空間。

Ans：(1) { 正，反 }

(2) { (正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反) }

[例題3] 連續擲一個硬幣三次，依次觀察出現正面或反面的情形。若 A 表示至少一次正面的事件，B 表示第三次是反面的事件，試以列舉法寫出：

(1)事件 A 與事件 B。

(2)事件 A，B 的積事件。

(3)不發生 A 的事件。

[解法]：

以＋，－分別表示硬幣擲出正面、反面，並以 $(+,+,-)$ 代表第一、第二與第三次分別出現正面、正面與反面的情形，其餘以此類推。樣本空間的元素可以用 (x, y, z) 表示，其中 x，y，z 可為＋或－。

(1)$A=\{(+,+,+),(+,+,-),(+,-,+),(-,+,+),(-,-,+),(-,+,-),$
$(+,-,-)\}$。

$B=\{(+,+,-),(+,-,-),(-,+,-),(-,-,-)\}$。

(2)事件 A 與事件 B 同時發生即為積事件

$A\cap B=\{(+,+,-),(+,-,-),(-,+,-)\}$。

(3)不發生 A 的事件即為 $A'=\{(-,-,-)\}$。(宇集為樣本空間)

(練習3) 擲甲、乙兩個骰子，觀察每個骰子出現的點數，令 A 表示出現點數和為 3 的事件，B 表示出現點數和為 5 的事件，請問 A，B 兩事件是否互斥？B 事件是否為事件 A 的餘事件？

Ans：(1) 事件 A，B 是互斥的　(2) B 事件不是事件 A 的餘事件

(練習4) 連續擲一個硬幣三次，依次觀察出現正面或反面的情形。若 C 表示至少二次正面的事件，D 表示第二次是反面的事件，試以列舉法表示：

(1) 事件 C，D 的和事件。

(2) 發生事件 C 但是不發生事件 D 的事件。

Ans：(1) $C\cup D=\{(+,+,+)、(+,+,-)、(+,-,+)、(+,+,-)、(+,-,-)、(-,-,+)、(-,-,-)\}$

(2) $C\cap D'=\{(+,+,+)、(+,+,-)、(+,+,-)\}$

(乙)古典機率的定義與性質

對於一個隨機試驗的事件來說，可能發生，也可能不發生，雖然無法確定它是否會發生，不過通常事件發生的可能性是可以度量的，就好像是一根木棒的長度、一塊土地的面積一樣。**機率**就是來衡量事件 A 發生的可能性。透過機率的度量我們可以評估事件發生或不發生的風險，進一步做因應。

◆ 古典機率的定義

西方的學者在十七世紀開始發展機率理論，當時是為了處理如骰子、輪盤、撲克牌等遊戲，當時的法國貴族米爾 (Chevalier de Méré, 1607～1684) 還曾寫給巴斯卡請教擲骰子

與分配賭金的問題，這些問題帶動了對機率的研究。1654 年巴斯卡與數學家費瑪 (Pierre de Fer*m*at, 1601～1665, 法國)通信討論這些問題，二人往返的書信開啟了探討機率理論的大門。

當我們丟擲銅板做決定，通常要求丟擲銅板的方式讓正反面出現的機會均等，當我們抽籤決定人選時，總要求籤筒中的東西大小質料相同，使得每支籤被抽中的機會均等。「**機會均等**」是古典機率重要的前提，我們會從這個前提出發來討論古典機率的定義與性質。

古典機率的定義： 設一試驗的樣本空間 S 有 n 個元素，若 S 中**每個元素出現的機會均等**，則 事件 A 發生的機率 P(A)為 **A 的元素個數與 S 元素個數的比值**。即 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

上面的定義是拉普拉斯 (Pierre-Simon. Laplace, 1749～1827, 法國)所提出，也稱為拉普拉斯古典機率。

舉例用古典機率的定義求事件的機率：

例一：

袋中分別標有號碼 1～10 的 10 顆球，假設每顆球被取中的機會均等，試求取出號碼是 3 的倍數之機率。

[解法]：

樣本空間 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，取出號碼是 3 的倍數之事件

$A=\{3, 6, 9\}$，故 A 發生的機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{10}$。

例二：

丟一個公正硬幣 (正反面出現的機會均等) 三次，三次中恰出現一次正面的機率。

[解法]：

以＋，－分別表示硬幣擲出正面、反面，並以 $(+, +, -)$ 代表第一、第二與第三次分別出現正面、正面與反面的情形，其餘以此類推。樣本空間 S 的元素以 (x, y, z) 表示，其中 x，y，z 可為＋或－，即

$S=\{(+, +, +), (+, +, -), (+, -, +), (-, +, +),$
$(-, -, +), (-, +, -), (+, -, -), (-, -, -)\}$；

三次中恰出現一次正面的事件 $A=\{(-, -, +), (-, +, -), (+, -, -)\}$，

故 A 發生的機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{8}$。

前面兩例提到的均勻骰子與公正硬幣都是指試驗的樣本空間中每個元素出現的機會均等。後面對擲骰子、丟硬幣與袋中取球等試驗未加特別註明時，皆假設為均勻公正。

例一：

袋中取球是常見的機率模型，從以下實例來探討袋中取球的機率：

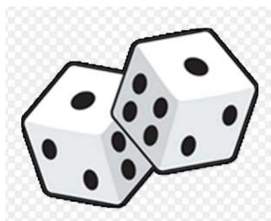
在一個不透明的袋中裝有 4 個白球，1 顆紅球，若每個球被取出的機會均等，從袋中取一球，取出紅球的機率等於多少呢？

觀察取出球的顏色，可知樣本空間 $S_1=\{白, 紅\}$，取得紅球的事件 $A=\{紅\}$，因此取出紅球的機率為 $\frac{1}{2}$。換句話說，觀察取出球的顏色，不是白球就是紅球，因此取出紅球的機率為 $\frac{1}{2}$，這樣合理嗎？

由於白球個數比紅球個數多，故樣本空間 S_1 中的元素發生的**機會並不均等**，因此這樣的算法並不符合古典機率的定義。

為了符合古典機率**樣本空間每個元素出現的機會均等**的原則，
可以將 4 個白球加以編號，如右圖所示，
樣本空間 $S_2=\{白_1, 白_2, 白_3, 白_4, 紅_1\}$，如此 S_2 中每個元素發生的機會均等，取得紅球的事件 $A=\{紅_1\}$，故取出紅球的機率 $P(A)=\frac{1}{5}$。

例二：
擲二粒相同的骰子，請問
(1)擲出 1 點、2 點的機率為何？(2)擲出 1 點、1 點的機率為何？



[解法]：
根據排列組合的觀點，二粒相同的骰子，有 21 種情形。
這 21 種情形為 1,1、1,2、1,3、1,4、1,5、1,6、2,2、2,3、2,4、2,5、2,6、3,3、3,4、3,5、3,6、4,4、4,5、4,6、5,5、5,6、6,6 共 21 種。
因此樣本空間 S 為這 21 種情形的集合，但是若根據這個樣本空間，我們可得事件 A={1 點、2 點}，B={1 點、1 點}的機率為 $P(A)=P(B)=\frac{1}{21}$，但是與前例一樣，樣本空間中每個元素出現的機會並不均等，因此必須要修正樣本空間，將 2 粒相同的骰子，視為不同的骰子，即 $S=\{(x,y)|x=1,2,3,4,5,6，y=1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{(1,2)、(2,1)\}$，$B=\{(1,1)\}$ $\Rightarrow P(A)=\frac{2}{36}$，$P(B)=\frac{1}{36}$。

根據上述的討論，當袋中有一些不同顏色的球，每個球被取中的機會均等，因此可以適度修改樣本空間 (類似 S_2 的形式) 將球視為不同，才能符合**每個球被取出的機會均等**的原則。

接下來的實例中，會修正樣本空間符合每個元素機會均等的原則，並求出事件的機率。

[例題4] 袋中有 5 個大小相同的球，其中 2 個紅球，3 個白球，從袋中取球並觀察球的顏色。

(1)一次取一球，取兩次，取後放回，求取到一紅球、一白球的機率。

(2)一次取一球，取兩次，取後不放回，求取到一紅球、一白球的機率。

(3)一次取兩球，求取到一紅球、一白球的機率。

[解法]：

把 2 個紅球，3 個白球加以編號為紅$_1$, 紅$_2$, 白$_1$, 白$_2$, 白$_3$，故 5 個球都視為不同。用 (紅$_1$, 白$_2$) 表示第一次取到 1 號紅球，第二次取到 2 號白球的情形，其餘情形以此類推。

(1)樣本空間 S_1 的元素可用 (x, y) 表示，其中 x，y 可為紅$_1$，紅$_2$，白$_1$，白$_2$，白$_3$，因為取後放回，所以 x，y 可以是相同編號的球故 $n(S_1)=5^2=25$。

設 A 為取到一紅球、一白球的事件，

$A=\{$(紅$_1$, 白$_1$), (紅$_1$, 白$_2$), (紅$_1$, 白$_3$), (紅$_2$, 白$_1$), (紅$_2$, 白$_2$), (紅$_2$, 白$_3$)
(白$_1$, 紅$_1$), (白$_2$, 紅$_1$), (白$_3$, 紅$_1$), (白$_1$, 紅$_2$), (白$_2$, 紅$_2$), (白$_3$, 紅$_2$)$\}$，

$n(A)=2\times3+3\times2=12$ (兩次取球的情形，第一次與第二次取球可以分成紅球、白球與白球、紅球兩種情形)，故 $P(A)=\dfrac{12}{25}$。

(2)樣本空間 S_2 的元素可用 (x, y) 表示，其中 x，y 可為紅$_1$，紅$_2$，白$_1$白$_2$，白$_3$，因為取後不放回，所以 x，y 是不同編號的球，故 $n(S_2)=P_2^5=20$。

設 B 為取到一紅球、一白球的事件，B 與 A 具有相同的元素，因此

$n(B)=12$，故 $P(B)=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$。

(3)樣本空間 S_3 的元素可用 $\boxed{x, y}$ 表示，其中 x，y 可為紅$_1$，紅$_2$，白$_1$，白$_2$白$_3$，且 x，y 是不同編號的球，$\boxed{x, y}$ 與 $\boxed{y, x}$ 視為相同的元素，故

$n(S_3)=C_2^5=10$。設取到一紅球、一白球的事件為 C，C 中的元素是由紅球與白球各取一個組成，$n(C)=C_1^2\times C_1^3=6$，故 $P(C)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，

即 $C=\{\boxed{紅_1, 白_1}，\boxed{紅_1, 白_2}，\boxed{紅_1, 白_3}，\boxed{紅_2, 白_1}，\boxed{紅_2, 白_2}，\boxed{紅_3, 白_3}\}$

從上例中得知三個試驗都是求取到一紅球、一白球的機率，但是不同的試驗答案不盡相同。計算古典機率時，還是必須優先考慮樣本空間中元素的型態，並遵循「**樣本空間每個元素發生的機會均等**」的原則。

[例題5] 擲兩個骰子，觀察每個骰子出現的點數，試求下列事件的機率：

(1) 兩個骰子點數相同。　　　(2) 兩個骰子點數和為 4。

Ans：(1)$\dfrac{1}{6}$　(2)$\dfrac{1}{12}$

[例題6] 同時擲三粒骰子，觀察所出現的點數，求下列事件的機率：
(1)三粒骰子的點數均不相同。(2)恰有兩粒骰子的點數相同。
Ans：(1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{5}{12}$

[例題7] 好看服飾店舉辦年終特賣，小安前去購買衣服送給女友，因生意很好只剩下十件衣服，其中
A 品牌的相同衣服剩下 4 件，每賣一件服飾店會賠 20 元；
B 品牌的相同衣服剩下 3 件，每賣一件服飾店會賠 5 元；
C 品牌的相同衣服剩下 3 件，每賣一件服飾店會賺 10 元；
(1)若任選 3 件衣服，則選法有幾種？
(2)任選 3 件衣服，試求服飾店不賺不賠的機率。
Ans：(1)10 (2) $\frac{7}{40}$

從想要調查的全體對象中抽取一些個體，若每個個體被抽中的機率相等，那麼如何計算被抽中的機率呢? 用實例來說明：

[例題8] 從某班 30 位學生中，抽籤選出 5 位同學接受問卷調查，假設每個人被抽中的機會均等，試求班上同學小民被抽中的機率。
Ans：$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

仿照上例的作法，從 n 個調查對象中抽取 k 個，若每個調查對象被抽中的機率相等，則每個調查對象被抽中的機率為 $\frac{k}{n}$ 。

擲二個或三個骰子，求點數和的問題：

整理如下。擲兩粒相同的骰子，其點數和與發生的機率表：

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率$\frac{n}{36}$(n 值)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

擲三粒相同的骰子，其點數和與發生的機率表：

點數和	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
機率$\frac{n}{216}$(n 值)	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

(練習5) 投擲 2 粒公正的骰子，點數和大於 7 的機率=？ Ans：$\frac{5}{12}$

(練習6) 一袋中有紅球 3 個，黃球 5 個，白球 2 個

(1)任取一球，取出紅球的機率=？ (2)任取二球為同色的機率=？Ans：(1)$\frac{3}{10}$ (2)$\frac{14}{45}$

(練習7) 同時擲三粒相同的骰子，觀察所出現的點數，求恰有一粒骰子出現 6 點的機率。

Ans：$\frac{5}{18}$

(練習8) 投擲 3 粒公正的骰子，試求下列兩小題：

(1)3 粒點數均相異的機率=？

(2)恰有 2 粒點數相同的機率=？Ans：(1)$\frac{5}{9}$ (2)$\frac{90}{216}$

(練習9) 袋中有 20 個球，編號分別為 1～20 號，從袋中一次取 3 個球，假設每個球被取中的機會均等，試求取出的球號碼乘積為奇數的機率。 Ans：$\frac{2}{19}$

(練習10) 從 N 個人中隨機抽取 n 個人，假設每個人被抽中的機會相等，

試求每個人被抽中的機率。 Ans：$\frac{C_{n-1}^{N-1}}{C_n^N}=\frac{n}{\mathrm{N}}$。

(練習11)　在遊戲中，阿玲拿到如右的數字卡。主持人隨機從 1 至 9 號球中同時取出三球，若這三球的號碼中任兩個都不在卡片上的同一行也不在卡片上的同一列時就得獎，則阿玲得獎的機率為________。(2014 指定甲) Ans：$\dfrac{1}{14}$

1	**2**	**3**
8	**9**	**4**
7	**6**	**5**

◆　古典機率的性質：

根據古典機率的定義，可以推得以下的性質：

設 S 為一試驗的樣本空間，

性質一：機率的範圍：對於任意事件 A，$0 \le P(A) \le 1$。

性質二：$P(S)=1$，$P(\varnothing)=0$。

性質三：若 A，B 為兩事件，則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

特別地，當 A，B 為互斥事件時，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

根據上述的性質，可以得出以下結果：

(1)和事件的機率：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$。

[證明]：

性質一與二，根據定義即可推得。接下來說明性質三，由取捨原理可以得知：

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$，

將上式同除以 $n(S)$，可得 $\dfrac{n(A\cup B)}{n(S)}=\dfrac{n(A)}{n(S)}+\dfrac{n(B)}{n(S)}-\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$，即

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

上述式子可以描述成：事件 A，B 和事件發生的機率等於事件 A，B 發生的機率和減去 A，B 積事件發生的機率。同理，根據三個集合的取捨原理，可知三事件 A，B 或 C 發生的機率可以表為

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$。

(2)餘事件的機率：$P(A')=1-P(A)$。

因為 $A\cup A'=S$ 且 $A\cap A'=\phi$，由性質二與性質三，可得 $P(A)+P(A')=1$，故 $P(A')=1-P(A)$。

即不發生某事件的機率等於 1 減去發生某事件的機率。

[例題9] 設 A,B 為樣本空間 S 中的二事件，P(A)=$\frac{1}{3}$ ，P(B)=$\frac{1}{4}$ ，P(A$\cup$B)=$\frac{2}{5}$ ，

試求(1)P(A$\cap$B)=？(2)P(A')=？(3)P($A'\cap$B)=？(4)P($A'\cup$B)=？

Ans：(1)$\frac{11}{60}$ (2)$\frac{2}{3}$ (3)$\frac{1}{15}$ (4)$\frac{17}{20}$

[例題10] 袋中有 7 顆紅球，3 顆白球，從袋中任取 4 球，並觀察球的顏色，試求至少取得 1 顆白球的機率。 Ans：$\frac{5}{6}$

[例題11] 針對某 50 人的班級調查喝飲料的習慣，發現其中習慣半糖（糖份減半）的有 37 人，而習慣去冰（不加冰塊）的有 28 人。現在若隨機抽問該班一位同學，他喝飲料的習慣是半糖且去冰的機率有可能是下列哪些選項？

(1) 0.28 (2) 0.46 (3) 0.56 (4) 0.66 (5) 0.74 (2015 指定乙)

Ans：(2)(3)

(練習12) 設 A, B 為樣本空間的兩個事件，且 P(A)=$\frac{1}{3}$,P(B)=$\frac{1}{2}$ 。

(1)求 P(A')。(2)已知 P(A$\cap$B)=$\frac{1}{6}$，求 P(A$\cup$B)。(3)已知 P(A$\cup$B)=$\frac{5}{6}$，求 P(A$\cap$B)。

Ans：(1)$\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3)0

(練習13)　設 A, B, C 為樣本空間的三個事件且兩兩互斥。已知 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{3}{10}$,

$P(C)=\frac{1}{30}$，求 $P(A\cup B\cup C)$。Ans：$\frac{5}{6}$

(練習14)　任意丟擲一粒質料均勻的骰子三次。設三次中至少出現一次 1 點的事件為 A，三件中至少出現一次 2 點的事件為 B。試求

(1)A 不發生的機率。

(2)A 發生的機率。

(3)A 與 B 都發生的機率。

(4)A 或 B 發生的機率。

Ans：(1)$\frac{125}{216}$ (2)$\frac{91}{216}$ (3)$\frac{5}{36}$ (4)$\frac{19}{27}$

(練習15)　已知 10 件產品中，有 4 件是瑕疵品。今從中任取三件，試求

(1)最多只取到一件瑕疵品的機率。　(2)三件中至少有一件瑕疵品的機率。

Ans：(1)$\frac{2}{3}$　(2)$\frac{5}{6}$

(練習16)　圍棋社有 4 位男生 2 位女生。若老師從這 6 人中隨機指派 3 人參加校際圍棋賽，則此 3 人中有男生也有女生的機率是多少？　Ans：$\frac{4}{5}$

(練習17)　甲、乙、丙、丁四人各從校內 6 個社團中任選一個參加，求四人中至少有兩人選擇相同社團的機率。 Ans：$\frac{13}{18}$

(丙)數學期望值

當我們面對不確定的事件時，機率有助於評估風險並下決定。而下決定是否僅僅根據事件發生的機率呢？

舉例來說，小安與小嫻擲一顆均勻骰子，當出現點數是 1 時，小嫻給小安 10 元，擲出其它點數時，小安給小嫻 1 元，小安應該答應玩這個遊戲嗎?

上述遊戲中，當小安思索是否該答應玩這個遊戲時，不僅要考慮出現 1 點的機率，還要考慮獲得報酬的大小，做決策時會以機率與報酬 (可能是金錢、時間、產量等等) 來做為依據，這就是數學期望值的概念。什麼是數學期望值呢? 先看一個例子：

建中某班舉行期末同樂會，活動準備了摸彩獎品一人一份共 40 份，主持人製作了 40 支籤，班上每人抽中獎品的機會均等。獎品的價值與數量如表所示：

獎品	A	B	C
價值 (元)	200	60	30
數量 (份)	5	25	10

試問每份獎品的平均價值是多少？

每份獎品的平均價值是 $\dfrac{200\times5+60\times25+30\times10}{40}=70$ (元)，上式可以改寫成

$200\times\dfrac{5}{40}+60\times\dfrac{25}{40}+30\times\dfrac{10}{40}$，從機率的觀點來說，$\dfrac{5}{40}$，$\dfrac{25}{40}$，$\dfrac{10}{40}$分別代表抽中 A，B，C 三種獎品的機率，所以

$$\text{平均價值 } 70=\underbrace{200\times\frac{5}{40}}_{A\text{獎品的價值}\times\text{抽中}A\text{獎品的機率}}+\underbrace{60\times\frac{25}{40}}_{B\text{獎品的價值}\times\text{抽中}B\text{獎品的機率}}+\underbrace{30\times\frac{10}{40}}_{C\text{獎品的價值}\times\text{抽中}C\text{獎品的機率}}$$

將抽中獎品的價值 200，60，30 (元)分別乘上相對應抽中的機率，算出來的結果就是此次活動得到獎品價值的數學期望值 (簡稱期望值)。

另一方面，期望值 70 元可以視為抽中獎品的價值以抽中的機率為權數的加權平均數，抽中的機率愈大，權數也會愈大。

上述的概念可以推廣到一般的試驗，我們對期望值作如下的定義：

> 數學期望值
> 設一個試驗的樣本空間為 S，若 $S=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，且 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 為兩兩互斥的事件。若事件 A_i 發生的機率為 p_i ($i=1, 2, \cdots, n$)，其中 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，而且發生事件 A_i 時可對應一個實數值 m_i，則對應值的**期望值**為 $E=m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_np_n$。

[例題12] 某公司年終舉辦抽獎活動，共有三種獎項分別為 5000 元、3000 元、1000 元的禮券。活動以投擲一顆均勻骰子來決定獎項。若擲出 6 點數，可得 5000 元的禮券；若擲出 5、4 點數，可以得到 3000 元的禮券；若擲出 1,2,3 點數，可以得到 1000 元的禮券，試求投擲一次骰子獲得獎項金額的期望值。

[解法]：

因為投擲一次骰子可能獲得的禮券金額可能為 5000 元、3000 元、1000 元，其機率分別為 $\dfrac{1}{6}$、$\dfrac{2}{6}$、$\dfrac{3}{6}$。故投擲一次骰子獲得獎項的期望值

$$\mathrm{E}=5000\times\frac{1}{6}+3000\times\frac{2}{6}+1000\times\frac{3}{6}=\frac{7000}{3}\ (\text{元})。$$

[例題13] 有一個遊戲其規則如下：

擲一枚均勻硬幣 2 次，若出現 2 個正面，即可得 200 元；若出現 1 個正面 1 個反面，即可得 80 元；若出現 2 個反面，則輸 400 元，

(1)阿山要根據此遊戲獲利的期望值來決定是否要玩，請問阿山該如何做決定?

(2)若要使這個遊戲獲利期望值為 0 元，出現 2 個反面時，應該輸多少元?

[解法]：

(1) 將遊戲獲利的可能值與其發生的機率，列表如下：

獲利可能值	200 元	80 元	-400 元
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

根據期望值的定義，獲利的期望值

$$E=200\times\frac{1}{4}+80\times\frac{1}{2}+(-400)\times\frac{1}{4}$$
$$=-10\ (元)。$$

(2)設出現 2 個反面時，應該輸 k 元，依題意

獲利的期望值 $E=200\times\frac{1}{4}+80\times\frac{1}{2}+(-k)\times\frac{1}{4}=0$，解得 $k=360$。

上例中的期望值為負 10 元，這個結果並不是指玩一次遊戲一定會輸 10 元，期望值通常代表大量結果的平均值。若遊戲重複多次玩下去，平均一次所輸的錢會很接近 10 元，因此對阿山是不利的。修改規則之後，當出現 2 個反面時，輸 360 元時期望值為 0 元，表示遊戲重複多次玩下去，阿山平均一次所輸的錢會很接近 0 元，對阿山來說不輸不贏，這樣就可以說這是一個「**公平遊戲**」。

一般來說，當一個試驗的遊戲規則是「**公平遊戲**」時，表示此試驗的遊戲規則的期望值為 0。

期望值是各種可能的報酬乘以得此報酬的機率之和，所謂報酬不一定指金錢也可以是其他數值。

[例題14] 某次數學測驗的單一選擇題，每題都有五個選項，答對一題得 4 分，答錯倒扣 1 分，若考生已經知道其中一個選項是錯誤的，其餘選項則是隨意猜答，試求此題得分之期望值為多少？Ans：$\frac{1}{4}$

[例題15] 一箱有瑕疵的省電燈泡共 10 個，其中有 2 個瑕疵品，每次從箱子中任取 3 個省電燈泡，假設每個燈泡被取中的機會相等，試問取出瑕疵省電燈泡個數的期望值。　Ans：$\frac{3}{5}$期望值

根據期望值可以做一些決策的參考：

[例題16] 公司想從甲、乙兩地擇一處建設新廠。根據未來一年經濟狀況（成長、持平、衰退）發生的機率，公司分別預估在甲、乙兩地建廠的利潤（百萬／年）如下表：

經濟狀況	成長	持平	衰退
機率	0.4	0.5	0.1
甲地利潤	40	15	–10
乙地利潤	55	10	–30

若以一年利潤期望值的大小為判斷準則，則公司應選擇在何地建廠較佳？
Ans：乙地

(練習18) 擲一粒公正骰子。已知擲出 1,2 或 3 點可得 10 元；擲出 4 或 5 點可得 20 元；擲出 6 點可得 50 元，求擲骰子一次所得金額的期望值。　Ans：20 元

(練習19) 袋中裝有相同大小的 200 元商品卡 3 張，100 元商品卡 2 張。自袋中任取 2 張，求所得金額的期望值。　Ans：320 元

(練習20) 根據統計資料得知，一位 50 歲的人在一年內存活的機率為 0.9998。保險公司針對 50 歲的人推出以下一年期的人壽保險：「投保人若在投保後一年內死亡，則可獲理賠金 200 萬元；否則不予理賠。」已知此一年期保險的保費為 2400 元，求保險公司對於每份保單的利潤期望值。　Ans：2000 元

(練習21) 袋中有大小相同的白球 4 顆及紅球 3 顆。今從袋中任取三球，求取出紅球個數的期望值。　Ans：$\frac{9}{7}$個

(練習22)　在丟硬幣的遊戲中，玩家同時丟 3 枚硬幣。當出現 1 個正面時可得 5 元，出現 2 個正面時可得 10 元，出現 3 個正面時可得 15 元；當全無正面時就須付給莊家 100 元。

(1)玩家玩這個遊戲一次的所得金額期望值是多少？

(2)若將遊戲規則更改為：全無正面時須付給莊家 60 元，其餘不變，則玩家玩一次的所得金額期望值是多少？

Ans：(1)−5 元　(2)0 元

習題

基本題

1. 是非題：

______ (1)袋中有 5 個黑球，3 個白球，從袋中取一個球，觀察其顏色，

樣本空間 $S=\{黑, 白\}$，取得白球的事件 A 為 $\{白\}$，故 $P(A)=\dfrac{1}{2}$ 。

______ (2)袋中有 5 個黑球，3 個白球，一次取一球，取兩次，不管放回或不放回，取得一黑球、一白球的機率都相等。

______ (3)袋中有 5 個黑球，3 個白球，以下兩個試驗中的事件機率相等。

試驗一：一次取一球，取兩次，取後不放回，依次取得黑球、白球。

試驗二：一次取兩球，取得一黑球、一白球。

______ (4)一個試驗中，令 A，B 代表互斥事件，則事件 A，B 至少有一事件會發生的機率等於 $P(A)+P(B)$。

______ (5)擲一顆均勻骰子出現 k 點就獲得 k 元，此試驗的期望值為 $\dfrac{7}{2}$ 元，所以擲 10 次均勻骰子會獲利 35 元。

2. 一對夫婦計劃生育兩個小孩，現依小孩出生的次序討論其可能的性別，分別寫出：
(1)樣本空間。
(2)兩個小孩中有女孩的事件。
(3)兩個小孩恰為一男一女的事件。

3. 擲兩個骰子，觀察每個骰子出現的點數，試求下列事件的機率：
(1)兩個骰子點數相同。(2) 兩個骰子點數和為 8。

4. 袋中有 6 個白球，若干個黑球。今從袋中一次取出 2 個球，已知此兩球同為一黑、一白球的機率為 $\dfrac{8}{15}$ ，試問黑球有多少個？

5. 某袋中有許多號碼球，抽出為 2 的倍數的機率是 0.5，抽出 2 或 3 的倍數的機率是 0.6，抽出 6 的倍數的機率是 0.3，求抽出 3 的倍數的機率為_________。

6. 某個城市的普查（全面調查）發現 60%的高中生有打工的經驗，也發現 70%的高中生有意願就讀大學。如果使用簡單隨機抽樣，由該城市的高中生中抽出一位同學。請選出正確的選項。

(1) 被抽出同學有意願就讀大學的機率為 0.7

(2) 被抽出同學有打工的經驗、且有意願就讀大學的機率至多為 0.6

(3) 被抽出同學有打工的經驗、且有意願就讀大學的機率至少為 0.35

(4) 被抽出同學有打工的經驗、但是無意願就讀大學的機率為 0.18。

(2013 指定乙)

7. 某種疾病有甲、乙、丙三種檢測方法。若受檢者檢測反應為陽性，以符號「＋」表示，反之則記為「－ 」。一個受檢者接受三種檢測方法呈現之結果共有 $A_1,\ldots,A_8$ 八種不同的可能情況， 例如事件 A_1 表示該受檢者以三種方法檢測反應皆為陽性，其餘類推（ 如下表）：

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
方法甲	＋	＋	＋	－	＋	－	－	－
方法乙	＋	＋	－	＋	－	＋	－	－
方法丙	＋	－	＋	＋	－	－	＋	－

以 $P(A_1),\ldots,P(A_8)$分別代表事件 $A_1,\ldots,A_8$ 發生之機率。請問下列哪些選項是正確的？

(1)$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$。

(2)以方法乙檢測結果為陽性的機率是 $P(A_1)+P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)$。

(3)以方法甲與方法乙檢測，結果一致的機率是 $P(A_1)+P(A_2)$。

(4)以方法甲、乙、丙檢測，結果一致的機率是 $P(A_1)$。 (2011 指定乙)

8. 袋中有 6 個大小相同的球，其中紅球 3 個，白球 3 個。從袋中依序取球三次，每次取一球，取球後不放回，求下列各事件的機率：

(1)三球為 2 紅球，1 白球。(2)三球中至少有 1 紅球 1 白球。

9. 袋中有 6 個大小相同的球，其中紅球 4 個，白球 2 個。從袋中同時取出三球，求下列各事件的機率：

(1)三球為 2 紅球，1 白球。(2)三球中至少有 1 紅球 1 白球。

10. 袋中有 9 個相同的球，分別標示 1, 2, ⋯, 9 號；若自袋中隨機取出 4 個球 (取出之球不再放回)，則取出之球上的標號和為偶數的機率為何？

11. 設袋子中有 40 個相同的球，分別標上 1, 2, 3, ⋯, 40 等 40 個號碼，甲、乙兩人依序自袋中任意取出一球，取後仍然放回袋中，比較取出球上數字的大小。設每個球被取出的機會均等，而且各人取球後仍放回袋中，試求甲取出之球上數字不小於乙取出之球上數字的機率。

12. 袋子有 6 個球，4 個球上面標 1 元，2 個球標 5 元，從袋中任取兩個球，即可得到兩個球所標錢數的總和，則此玩法所得錢數的期望值是多少？

13. 根據統計資料得知，一個 50 歲的人，在一年內存活的機率為 98.5%，今有一個 50 歲的人參加一年期保險額度為五十萬元的人壽保險，須繳保費一萬元，則保險公司獲利的期望值為多少元？

14. 水果店老闆對一名新聘人員施以一項測驗來決定他的月薪。老闆準備外形相近的黃肉與綠肉哈密瓜各 4 顆，要求此人從中選出 4 顆黃肉哈密瓜。若 4 顆都選對，則月薪 35000 元；若選對 3 顆，則月薪 28000 元；否則月薪 21000 元。已知此人對這兩種哈密瓜沒有鑑別能力，完全靠運氣選取，求此人月薪的期望值。

15. 將 1~20 的自然數填入 5×4 的空格中，如右圖，今從中任取兩個數，試求此二數不在同一列也不在同一行的機率。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

16. 高三甲班共有 20 位男生、15 位女生，需推派 3 位同學參加某項全校性活動。班會中大家決定用抽籤的方式決定參加人選。若每個人中籤的機率相等，則推派的三位同學中有男也有女的機率為________。
(2011 學科能力測驗)

17. 不透明袋中有三顆白球及三顆紅球。從袋中每次取出一球依序置於桌面，每次每顆球被取出的機率相同。全部取出後，前三顆球中有相鄰兩球同為白球的機率為________。(2016 指定乙)

18. 一隻青蛙位於坐標平面上的原點，每步隨機朝上下左右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為__________。(2017 學科能力測驗)

19. 擲一均勻骰子 10 次，求恰好出現 4 次 6 點的機率是多少？

20. 甲乙丙丁戊 5 人各出一張名片，將 5 張名片放入一袋內，今每人取出一張，試求：
(1)恰有 2 人拿到自己的名片之機率。
(2)每個人都拿到自己的名片之機率。
(3)每個人都沒有拿到自己的名片。

21. 袋子中有 20 球，分別編有 1，2，3，....20 號的球各一個，任取 3 球，求下列各種情形之機率：
(1)3 球之號碼和為 3 之倍數。 (2)3 球之號碼成等差數列。
(3)3 球中任 2 球之號碼均不連續。

22. 由 6 位男士與 9 位女士中任選 5 人組成一個委員會，若每人被選出的機會相同，試求下列兩小題：
(1)由三男二女組成委員會的機率是_________。
(2)委員會委員都是同性別的機率是多少_________。

進階題

23. 從一副撲克牌任取 5 張，求下列各種情形之機率：
(1)同花大順(Royal Flush)　(2)葫蘆(Full House)
(3)兩對(Two Pairs)　(4)鐵枝(AAAAQ)

24. 自 1,2,3,…,10 中任取相異 3 數，則
(1)此三數成等差之機率=？　(2)此三數成等比之機率=？

25. 將 $1\sim n^2(n\geq 3)$的自然數填入 $n\times n$ 的空格中，今從中任取兩個數，試求此二數不在同一列也不在同一行的機率。

26. 設集合 M={1,2,3,4,5..,10}中，任取三個數字，求下列事件發生的機率：
(1)出現三個連續數字　(2)恰出現二個連續數字　(3)不出現連續數字

27. 袋子中有 3 紅球，5 個白球，每次取一球，直到取完球為止，試求白球先被取完的機率。

28. 投擲一顆骰子 5 次，出現點數以 x,y,z,u,v 表示，試求出下列事件發生的機率：
(1) x,y,z,u,v 不全相異。　(2)$(x-y)(y-z)(z-u)(u-v)=0$

29. 擲一公正骰子兩次其點數為 a,b，試求 $x^2+ax+b=0$ 有兩實根α,β，且$\alpha^2+\beta^2<11$ 的機率為何？

30. 把 r 個相同的球隨機放入 n 個箱子，假設每個箱子都可以一次放 r 個球，試求每個箱子至多有一個球的機率。$(n\geq r)$

答案

1. ×××O×

2. (1)S={(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)}　(2){ (男,女),(女,男),(女,女)}　(3)$\frac{1}{2}$

3. (1) $\frac{1}{6}$　(2) $\frac{5}{36}$

4. 4 個

5. 0.4

6. (1)(2)

7. (1)(2)
   [解法]：
   (1)$\because A_1 \cap A_2=\phi$，$\therefore P(A_1 \cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$。
   (2)如表格，方法乙為陽性，而方法甲與方法丙的結果可為(+,+)、(+,–)、(–,+)、(–,–)
   故這些情形為事件 A_1、A_2、A_4、A_6，而他們彼此互斥，
   故方法乙檢測結果為陽性的機率是 $P(A_1)+P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)$。
   (3) 以方法甲與方法乙檢測，結果一致的事件為 A_1、A_2、A_7、A_8，故(3)錯誤。
   (4) 以方法甲、乙、丙檢測，結果一致的事件為 A_1、A_8，故(4)錯誤。

8. (1)$\frac{9}{20}$　(2)$\frac{9}{10}$

9. (1)$\frac{3}{5}$　(2)$\frac{4}{5}$

10. $\frac{1}{6}$
    1~9 號中有 5 個號法是奇數，4 個號碼是偶數
    4 個球的標號和為偶數可以分成 4 偶、2 偶 2 奇、4 奇三種情形，分別求機率之和。

11. $\frac{41}{80}$

12. $\frac{14}{3}$元

13. 2500 元

14. 22800 元

15. $\frac{12}{19}$

16. $\dfrac{90}{119}$

17. $\dfrac{7}{20}$

[解法]：反面計算前三顆球中沒有相鄰兩球同為白球的機率

前三次的取球狀況：

白紅白：3×2×3×3！=18×3！

紅白紅、紅紅白、白紅紅：3×(3×2×3)×3！=54×3！

紅紅紅：3×2×1×3！=6×3！

三顆球中沒有相鄰兩球同為白球的機率為$\dfrac{(18+54+6)\times 3!}{6!}=\dfrac{13}{20}$

故所求機率為 $1-\dfrac{13}{20}=\dfrac{7}{20}$ 。

18. $\dfrac{9}{64}$

19. $\dfrac{C_4^{10}\cdot 5^6}{6^{10}}$

20. (1)$\dfrac{1}{6}$ (2)$\dfrac{1}{120}$ (3)$\dfrac{11}{30}$

21. (1) $\dfrac{32}{95}$ (2) $\dfrac{3}{38}$ (3) $\dfrac{68}{95}$

22. (1)$\dfrac{240}{1001}$($\dfrac{C_3^6\cdot C_2^9}{C_5^{15}}$) (2)$\dfrac{4}{91}$

23. (1)$\dfrac{C_1^4\times C_5^5}{C_5^{52}}=\dfrac{1}{649740}$(2) $\dfrac{C_2^4\times C_3^4\times C_1^{13}\times C_1^{12}}{C_5^{52}}=\dfrac{6}{4165}$

(3) $\dfrac{C_2^4\times C_2^4\times C_1^4\times C_2^{13}\times C_1^{11}}{C_5^{52}}=\dfrac{198}{4165}$ (4)$\dfrac{C_1^4\times C_1^{13}\times C_1^{12}}{C_5^{52}}$

24. (1)$\dfrac{1}{6}$ (2)$\dfrac{1}{30}$

25. $\dfrac{n-1}{n+1}$

26. (1)$\dfrac{1}{15}$ (2)$\dfrac{7}{15}$ (3)$\dfrac{7}{15}$

27. $\dfrac{3}{8}$

提示：白球先被取完的事件可以視為紅球放在最後一次取的事件

28. (1)$\dfrac{49}{54}$　(2)$\dfrac{671}{1296}$

29. $\dfrac{5}{36}$

提示：

$x^2+ax+b=0$ 有實根 $\Leftrightarrow a^2-4b\geq 0$

$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$　$\alpha^2+\beta^2<11$　$\Leftrightarrow (-a)^2-2b<11$

30. $\dfrac{C^n{}_r\cdot r!}{n^r}$