

## 第四單元 古典機率與期望值

### 一、樣本空間與事件

生活總充滿著不確定性，從猜硬幣、買樂透到今天是否下雨，彷彿是老天爺一次次地讓人們感受隨機的存在。若嘗試著分析這些隨機現象，從最簡單的開始試驗，歸納出一些資訊並開始量化，進而比較這些可能性，甚至人們可以依據可能性的大小，做出合適的選擇。

對於每個隨機試驗，我們收集所有可能結果所形成的集合，稱之為樣本空間。例如投擲一粒六面骰子，所有出現的可能數字為1到6；猜測同學的生日月分，會從1到12個月之中猜某一個，諸如此類。

接下來更進一步的討論某條件下所發生的結果，收集這些結果所形成的集合，稱之為事件。例如投擲六面骰子中，出現偶數點的事件為 $\{2,4,6\}$ ，但出現質數點的事件為 $\{2,3,5\}$ 。

#### 主題 1：樣本空間與事件

1. 樣本空間：一項試驗中所有可能發生的結果所成的集合。

2. 事件：樣本空間的任一子集(包括空集合)。

(1)  $S$ ：全事件。

(2)  $\phi$ ：空事件。

(3)  $A'$ ：事件  $A$  以外的事件，又稱  $A$  的餘事件。

(4)  $A \cup B$ ： $A$  與  $B$  至少有一個發生的事件，稱  $A$  與  $B$  的和事件。

(5)  $A \cap B$ ： $A$  與  $B$  均同時發生的事件，稱  $A$  與  $B$  的積事件。

(6) 當兩事件  $A$  與  $B$  不可能同時發生，即  $A \cap B = \phi$ ，稱  $A$  與  $B$  為互斥事件。

#### 例題1

投擲一枚10元硬幣兩次，依正面與反面的順序，試寫出其樣本空間。

解答：{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)}

### 隨堂練習

投擲一枚10元硬幣三次，依正面與反面的順序，試寫出其樣本空間。

答案：{(正,正,正), (正,正,反), (正,反,正), (反,正,正), (正,反,反), (反,正,反), (反,反,正), (反,反,反)}

### 例題2

從座號1到5的同學中選出兩人，試寫出所選出同學座號的樣本空間。

解答：{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)}

### 隨堂練習

(1)求從編號1到3的卡片中，每次選一張，可以重覆選，共選兩次，試寫出其樣本空間。

(2)投擲一粒四面骰子，其點數為1到4點，共擲兩次，觀察先後出現點數，試寫出其樣本空間。

答案：(1){(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}

(2){(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),  
(4,4)}

### 例題3

從編號1到12的卡片中，任意取出一張，若 $P$ 表示為3的倍數之事件， $Q$ 表示為4的倍數之事件， $R$ 表示為編號大於5的事件。試求：(1) $R'$ 。(2) $P \cup Q$ 。(3) $P \cap R'$ 。

解答：(1) $R'$ 表示小於或等於5的事件，得 $R' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

(2) $P = \{3, 6, 9, 12\}$ ， $Q = \{4, 8, 12\}$ ，推得 $P \cup Q = \{3, 4, 6, 8, 9, 12\}$ 。

(3) $P \cap R' = \{3\}$ 。

## 隨堂練習

投擲一粒六面骰子一次，若  $P$  表示出現點數為偶數的事件， $Q$  表示出現點數為質數的事件， $R$  表示出現點數為小於 4 的事件，試求：(1)  $R'$ 。(2)  $P \cup Q$ 。(3)  $P' \cap R$ 。

答案：(1)  $R' = \{4, 5, 6\}$  (2)  $P \cup Q = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  (3)  $P' \cap R = \{1, 3\}$

## 例題 4

若袋子內有五顆球，編號分別為 1 到 5。每次取一球後放回，共取兩次。若  $A$  表示取得編號為偶數的事件， $B$  表示為取得編號和為 5 的事件，試問  $A$  與  $B$  兩事件是否為互斥事件？

解答： $A$  事件表示取得兩次編號均為偶數，可能結果所成集合為  $\{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$ 。

$B$  事件表示取得兩次編號和為 5，可能結果所成集合為  $\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ 。

故  $A \cap B = \phi$ ，所以為互斥事件。

## 隨堂練習

擲兩粒骰子一次，觀察其點數。若  $A$  表示點數和為 4 的事件， $B$  表示點數積為 6 的事件。試問  $A$  與  $B$  兩事件是否為互斥事件？

答案：是互斥事件

## 二、古典機率

高中階段我們探討的機率，是以法國數學家拉普拉斯所提出的古典機率為主軸。古典機率強調每個情況出現的機會均等，而這些情況所出現的機率總和為 1。例如我們相信硬幣是勻稱的，正、反面出現的機會為一半一半；又如投擲六面骰子，出現點數為 1 到 6，其出現的機會應該要是公平的。

以下的學習過程中，若題目未特別說明硬幣或骰子等物品的狀況，我們都假設這些物品是公正的。

## 主題 2：古典機率及其性質

1. 古典機率：設樣本空間  $S$  有  $n$  個元素，且每個元素出現的機會均等，事件  $A$  有  $k$  個元

素，則事件  $A$  發生的機率定義為  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{k}{n}$ 。

2. 機率性質： $\phi$  表示空事件， $S$  表示全事件， $A$  與  $B$  均為事件。

(1)  $P(\phi) = 0$ ， $P(S) = 1$ 。

(2)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 。

(3)  $P(A') = 1 - P(A)$ 。

### 例題 5

投擲一公正骰子一次，試求各小題的機率：

(1) 擲出點數為 6。

(2) 擲出點數為偶數。

(3) 擲出點數大於 4。

解答：(1) 點數為 6 的事件 =  $\{6\}$ ，機率為  $\frac{1}{6}$ 。

(2) 點數為偶數的事件 =  $\{2, 4, 6\}$ ，機率為  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

(3) 點數大於 4 的事件 =  $\{5, 6\}$ ，機率為  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

### 隨堂練習

從 1~25 的數字中，任選一個數字，試求各小題的機率：

(1) 選出的數字恰為質數。

(2) 選出的數字恰為 5 倍數。

(3) 選出的數字恰為 3 倍數。

答案：(1)  $\frac{9}{25}$  (2)  $\frac{1}{5}$  (3)  $\frac{8}{25}$

## 例題 6

袋中有大小相同的紅球 4 顆與白球 3 顆，試求下列情況的機率：

- (1) 任取 1 球，取出為紅球。
- (2) 每次取 1 球，取後不放回，任取二次，第一次取出為紅球，第二次取出為白球。
- (3) 一次取出兩球為 1 紅球及 1 白球。

解答：(1) 樣本空間為 7 球取 1 球 =  $C_1^7$ ，4 紅球取 1 球 =  $C_1^4$ ，機率為  $\frac{C_1^4}{C_1^7} = \frac{4}{7}$ 。

(2) 第一次取出紅球機率  $\frac{4}{7}$ ，第二次取出白球機率  $\frac{3}{6}$ ，機率為  $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$ 。

(3) 樣本空間為 7 球取 2 球 =  $C_2^7$ ，取出 1 紅球與 1 白球 =  $C_1^4 \cdot C_1^3$ ，機率為  $\frac{C_1^4 \cdot C_1^3}{C_2^7} = \frac{4}{7}$ 。

## 隨堂練習

擲一公正的骰子三次，試求各小題的機率：

- (1) 第一次出現點數為 6。
- (2) 三次皆出現相同點數。

答案：(1)  $\frac{1 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$  (2)  $\frac{C_1^6 \times 1 \times 1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{36}$

## 例題 7

擲一公正的骰子兩次，試求各小題機率：

- (1) 兩次點數均大於 3。
- (2) 第一次的點數大於第二次的點數。
- (3) 至少一次出現點數為 6。

解答：(1) 樣本空間元素個數為  $6 \times 6 = 36$ ，點數大於 3 的事件 =  $\{4, 5, 6\}$ ，機率為

$$\frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4}。$$

(2) 選出兩個不同點數，數字大的為第一次，另一個為第二次，機率為

$$\frac{C_2^6 \times 1 \times 1}{6 \times 6} = \frac{5}{12}。$$

(3)至少一次出現點數為6 = 全事件 - 兩次沒有6點，機率为  $1 - \frac{5 \times 5}{6 \times 6} = \frac{11}{36}$ 。

### 隨堂練習

袋中有8顆大小相同的球，其中紅球5顆，白球2顆，黃球1顆。今自袋中任取3球，試求以下各小題的機率为：

(1)3球均為同色。

(2)三種顏色各1球。

(3)恰有2球顏色相同。

答案：(1)  $\frac{5}{28}$  (2)  $\frac{5}{28}$  (3)  $\frac{9}{14}$

### 例題8

設  $A$ 、 $B$  為樣本空間  $S$  中的二事件，且  $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ ，求下列各小題的值：(1)  $P(A \cup B)$ 。(2)  $P(A \cap B')$ 。

解答：(1)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{11}{15}$ 。

(2)  $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$ 。

### 隨堂練習

設  $A$ 、 $B$  為樣本空間  $S$  中的二事件，且  $P(A) = \frac{3}{4}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ ，試求各下列小題的值：(1)  $P(A \cup B)$ 。(2)  $P(A' \cap B)$ 。

答案：(1)  $\frac{53}{60}$  (2)  $\frac{2}{15}$

## 例題9

自6位男生、4位女生中選出一個5人委員會，試求以下各小題的機率：

(1)男、女生至少各2人。

(2)男生最多2人。

(3)女生至少1人。

解答：(1)男生3人女生2人的機率+男生2人女生3人的機率 =  $\frac{C_3^6 \cdot C_2^4 + C_2^6 \cdot C_3^4}{C_5^{10}} = \frac{5}{7}$ 。

(2)男生1人女生4人的機率+男生2人女生3人的機率 =  $\frac{C_1^6 \cdot C_4^4 + C_2^6 \cdot C_3^4}{C_5^{10}} = \frac{11}{42}$ 。

(3)全事件 - 沒有女生的機率 =  $1 - \frac{C_5^6}{C_5^{10}} = \frac{41}{42}$ 。

## 隨堂練習

將A, B, C, D, ...等八名學生平均分到甲、乙、丙、丁這四個班，試求A與B二人不同班的機率。

答案： $\frac{6}{7}$

## 三、期望值

在生活中，只以這件事發生的機率來做為選擇的依據有時是不足夠的，仍必須加上這件事所帶來的好處(或壞處)影響，亦即若能預測取得(或喪失)的好處有多少，就能夠讓我們的選擇更加合適。同時考慮機率的大小與所取得的好處，就形成了期望值的概念。

## 主題3：期望值

1.若一隨機試驗有 $k$ 種不同的結果，各種結果的報酬分別是 $m_1, m_2, \dots, m_k$ ，分別的機率為

$p_1, p_2, \dots, p_k$ 且期望值為 $E$ 。則 $E = m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots + m_k p_k$ 。

2.若一隨機試驗所取得的好處是公平的，即會有正報酬與負報酬且該試驗的期望值為0。

例題10

袋子裡有3顆球，其中兩球標記5元，另一球標記10元。若從袋中一次任取2球，即可得球上標記的金額之和，試求取球一次取得金額的期望值。

解答：取得10元的機率 =  $\frac{C_2^2}{C_2^3} = \frac{1}{3}$ ，取得15元的機率 =  $\frac{C_1^2 \times C_1^1}{C_2^3} = \frac{2}{3}$ ，

$$\text{期望值} = 10 \times \frac{1}{3} + 15 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} (\text{元})。$$

隨堂練習

擲一公正的骰子，若依擲出的點數給予該點數的金額，則擲骰子一次取得金額的期望值為多少？

答案： $\frac{7}{2}$  (元)

例題 11

擲一公正的骰子，若擲出1,2或3點可得10元，擲出4或5點可得20元，擲出6點須損失50元，試求擲骰子一次所得金額的期望值。

解答： $\frac{3}{6} \times 10 + \frac{2}{6} \times 20 + \frac{1}{6} \times (-50) = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$  (元)。

隨堂練習

本次考試為單一選擇題，每題各有五個選項，每題答對可得5分，答錯倒扣1.5分，試求學生隨機亂猜一題所得的分數期望值。

答案： $-\frac{1}{5}$  分

例題 12

擲一公正骰子兩次，若出現點數和為 $k$ 時，可得 $10k$ 元，試求此隨機試驗所取得金額的期望值。



解答：

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
金額	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120

$$\begin{aligned}
 \text{期望值} &= 20 \times \frac{1}{36} + 30 \times \frac{2}{36} + 40 \times \frac{3}{36} + 50 \times \frac{4}{36} + 60 \times \frac{5}{36} + 70 \times \frac{6}{36} + 80 \times \frac{5}{36} + 90 \times \frac{4}{36} \\
 &\quad + 100 \times \frac{3}{36} + 110 \times \frac{2}{36} + 120 \times \frac{1}{36} \\
 &= \frac{10}{36} (2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) = \frac{640}{9} (\text{元})
 \end{aligned}$$

## 隨堂練習

袋中有編號1號至10號的卡片各一張，今任取一張，若取出 $k$ 號，則可得 $k^2$ 元，試求取一次卡片所得金額的期望值。

答案： $\frac{77}{2}$  元

## 習題

1. 擲一均勻的硬幣 8 次，求恰在第 8 次時出現第 3 次正面的機率。

$$\text{答案：} \frac{21}{128}$$

2. 投擲一公正骰子 3 次，試求下列個小題的機率：(1) 點數越來越大。(2) 點數均不相同。

$$\text{答案：(1)} \frac{5}{54} \quad \text{(2)} \frac{5}{9}$$

3. 班上同學共有 10 名男生，5 名女生，推派 3 名參加畢冊製作，有男生也有女生的機率。

$$\text{答案：} \frac{5}{7}$$

4. 袋子中裝有編號 1~4 的卡片，若隨機從袋中取卡片，試求以下各方法之樣本空間：

(1) 取一次，只取出一張。

(2) 取一次，同時取出兩張。

(3) 取二次，每次一張，取出後不放回。

$$\text{答案：(1)} \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{(2)} \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

$$\text{(3)} \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

5. 擲一公正骰子一次，若  $P$  表示點數為 2 的倍數之事件， $Q$  表示點數為 3 的倍數之事件，

$R$  表示為點數大於 4 的事件，試求：(1)  $P \cup Q$ 。(2)  $Q \cap R'$ 。

$$\text{答案：(1)} P \cup Q = \{2, 3, 4, 6\} \quad \text{(2)} Q \cap R' = \{3\}$$

6. 擲一枚硬幣三次，若出現一次正面得 5 元，一次反面賠 2 元。試求擲完後取得金額的期望值。

答案： $\frac{9}{2}$ 元

7.擲一公正的骰子三次，若擲出點數愈來愈大，則可得獎金100元。試求擲完後獲得獎金的期望值。

答案： $\frac{500}{54}$ 元

8.袋中有相同大小的金色與銀色代幣，其中金色代幣有3枚，銀色代幣有7枚，已知每枚金色代幣可換取100元，每枚銀色代幣可換取10元，今自袋中任取2枚，試求所得金額的期望值。

答案： $\frac{222}{3}$ 元