第三章排列組合與機率

3-1 基本計數原理

林信安老師編寫

(甲)集合的概念與運算

◆ 集合的基本概念與表示法

一、集合與元素

在日常生活或數學中常把一些具有明確意義的對象整體用來觀察與研究。例如：「方程式 $x^2-x-12=0$ 的解」、「投擲一粒骰子出現的點數」、「數線上所有點」都具有很明確的意義，而將這些明確指定的對象看成一個整體就稱為**集合**。組成集合的對象，稱為這個集合的**元素**，通常以大寫英文字母表示集合，小寫英文字母表示元素。

一個集合元素的個數可以是有限多個，例如："方程式 $x^2-x-12=0$ 的解"、"投擲一粒骰子出現的點數"；也可以是無限多個，例如："數線上所有點"。

若 a 為集合 S 的元素，則以符號 $\boldsymbol{a\in S}$ (讀作 a 屬於 S) 表示；若 a 不為集合 S 的元素，則以符號 $\boldsymbol{a\notin S}$ (讀作 a 不屬於 S) 表示。

二、集合表示法

(1)列舉法：

將集合中的元素列出來，並寫在大括號內，這種表示集合的方法稱為列舉法。

以 A 表方程式 $x^2-x-12=0$ 的解所成的集合，即 $A=\{-3，4\}$，可知 $4\in A$，$3\notin A$。

以 B 表投擲一粒骰子出現的點數所成的集合，即 $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，則 $1\in B$，$7\notin B$。

以 C 表示所有正整數所成的集合，即 $C=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$，可知 $5\in C$，$-5\notin C$。

(2)描述法：

當集合的元素很多 (甚至有無限多個元素)，一一表列不是很方便時，可以用元素的共同屬性來描述集合。

例如：1～100 的所有偶數所成的集合可表為 $\{2n \mid 1\leq n\leq 50, n$ 為整數$\}$。

例如：不等式 $x^2-x-2<0$ 的解集合可以表為$\{x \mid -1<x<2\}$。

上述的表示法是在大括號內先寫出元素的一般形式，再畫一條豎線，並在豎線右側描述元素的屬性，這種表示集合的方法稱為描述法。

[例題1] (1)利用列舉法表示 24 所有正因數所成的集合。
(2)利用描述法表示 1 到 50 的自然數中，5 的倍數所成的集合。
Ans：(1) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ (2) $\{5k \mid 1\leq k\leq 10, k$ 為整數$\}$

(練習1)　用列舉法表示集合$\{x\in R|x^2-4x+3=0\}$。Ans：$\{3，1\}$

(練習2)　用描述法表示「被 7 除餘 2 的所有自然數」所成的集合。
Ans：$\{n|n=7k+2$，k 為非負整數$\}$

(練習3)　試分別用列舉法與描述法表示下列集合：
從 1 到 50 的自然數中，被 5 除餘 3 的數所成的集合。
Ans：{ 3，8，13，18，23，28，33，38，43，48 }
$\{5k+3 \mid 0\le k\le 9$，k 為整數$\}$

◆　集合間的關係

一、子集的概念

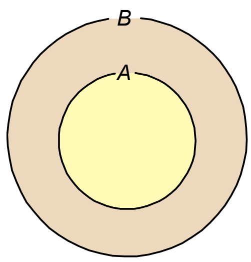
設 S 為建國高中高一某班學生所成的集合，若關注該班數學測驗的結果，以 A 表示成績不及格的同學所成的集合：
當某次考試有人成績不及格時，代表 A 中至少有一個元素，那麼 A 的元素一定是 S 的元素，此時稱 A 為 S 的一個**子集**。
當某次考試全班都及格了，此時 A 中沒有任何元素，為了討論方便，還是將 A 視為集合，這種不含任何元素的集合稱為**空集合**，以符號$\varnothing$或{ }表示。

> 定義：
> 如果集合 A 內任一個元素都屬於集合 B，我們就稱 A 是 B 的子集(子集合)，記做 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$(讀作 A 包含於 B 或 B 包含 A)。

規定空集合為任何集合的子集。
例如：$\{1,2\}\subset\{1,2,3,4,5,6\}$，$\varnothing\subset\{1,2,3,4,5,6\}$
數學上常以 $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 分別表示“所有自然數”、“所有整數”、“所有有理數”、“所有實數”所成的集合，它們之間有以下的包含關係：

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

所以「5 是自然數」就可以寫成「$5\in\mathbb{N}$」;「$\sqrt{2}$是實數」就可以寫成「$\sqrt{2}\in\mathbb{R}$」
右圖中，兩個區域分別表示集合 A，B 具有 $A\subseteq B$ 的關係。這種表示集合之間關係的直觀圖，稱為文氏圖 (Venn diagram)，它是英國邏輯學家文恩 (John Venn, 1834～1923) 首先引用的。



二、集合相等

另一方面，集合的元素是不考慮先後順序、重複次數。例如：$A=\{3, 4, 4, 2, 2\}$ 與 $B=\{2, 3, 3, 4\}$ 這兩個集合，組成它們的元素完全相同，那麼集合 A 與集合 B 為相同的集合，即 $\{3, 4, 4, 2, 2\}=\{2, 3, 3, 4\}=\{2, 3, 4\}$。

事實上，集合 A 與集合 B 的元素完全相同時，稱此兩集合相等，記作 $A=B$。根據子集的定義，當 $A=B$ 時，可以得知 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

當集合 A 的元素個數是有限多個時，用符號 $n(A)$ 代表集合 A 中相異元素的個數。例如：若集合 $A=\{0, 2, 4, 6\}$，則 $n(A)=4$。

第一冊中曾介紹了區間的符號，這些符號的本質是實數系的子集：

$[a,b]=\{x\in\mathrm{R}|a\le x\le b\}$、$(a,b)=\{x\in\mathrm{R}|a<x<b\}$、$(a,b]=\{x\in\mathrm{R}|a<x\le b\}$、$[a,b)=\{x\in\mathrm{R}|a\le x<b\}$

$(-\infty,a)=\{x|x<a\}$、$[a,\infty)=\{x|x\ge a\}$

注意上述的符號均表集合，不需要再加{}之符號。

[例題2] 設 $A=\{1,2,3\}$，請找出 A 的所有子集合，並問 A 的子集合的個數。

Ans：ϕ、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{1,2,3\}$；8

(練習4)　用符號$\in$$\notin$去填下列空格：

(1)$-\sqrt{3}$ (　) Q　(2)-5(　)Z　(3)0.35(　)N　Ans：$\notin$，$\in$，$\notin$

(練習5)　設集合 $S=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，請在下列空格中填入$\in,\notin,\not\subset,\subset,\supset$

則(1)α(　)S　，φ(　)S　(2)$\{\alpha\}$(　)S　，$\{\alpha,\beta\}$(　)S　$\{\alpha,1,\delta\}$(　)S

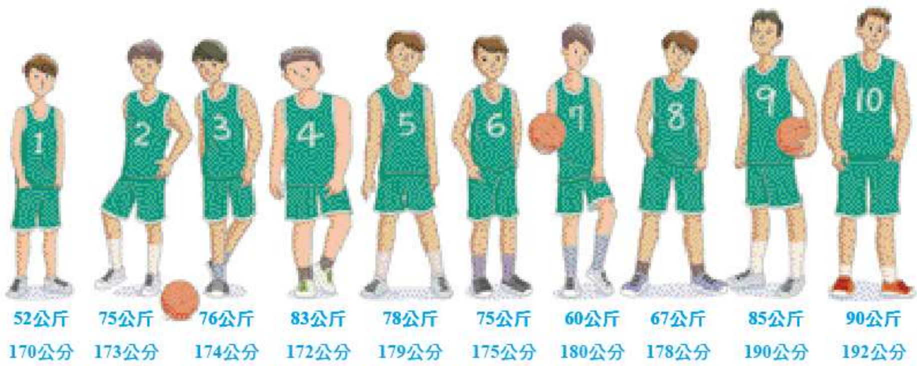
(練習6)　請列出集合 $S=\{1，2\}$ 的所有子集。

Ans：ϕ、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{1,2\}$

◆　集合的運算

一、集合的交集與聯集

<u>南一高中</u> 10 位高一學生身高體重的資料，如下圖所示，他們想要申請進入籃球隊。



根據學生身高體重的資料，甲、乙兩個教練分別有不同的篩選條件：

(1)甲教練的條件：“體重超過 75 公斤或身高超過 177 公分”；

(2)乙教練的條件：“體重超過 75 公斤且身高超過 177 公分”。

令 A 表示體重超過 75 公斤的學生編號所成的集合，即 $A=\{3, 4, 5, 9, 10\}$；

B 表示身高超過 177 公分的學生編號所成的集合，即 B＝{5, 7, 8, 9, 10}。

甲、乙兩個教練，對於篩選條件的看法不同。

符合甲教練或乙教練條件的編號之集合{3, 4, 5, 7, 8, 9, 10}為 A，B 中所有元素所成的集合，稱為 A 與 B 的**聯集**。

符合甲教練及乙教練條件的編號之集合{5, 9, 10}為 A，B 中共同的元素所成的集合，稱為 A 與 B 的**交集**。

另外，籃球隊想推薦體重超過 75 公斤但身高沒超過 177 公分的學生去參加校際拔河比賽。推薦參加拔河比賽的編號的集合{3, 4}，則是在 A 中但不在 B 中的元素所成的集合，稱為集合 B 在集合 A 的**差集**。

一般而言，給定集合 A、B 可將 A 與 B 的元素合併起來討論，或是探討它們共同的元素，甚至還可以研究在 A 中但不在 B 中的元素，這就是兩個集合間的聯集、交集與差集。

定義：

由集合 A 與集合 B 所有元素聯合起來組成的集合，稱為 A 與 B 的**聯集**，記作 $A\cup B$，

即 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。

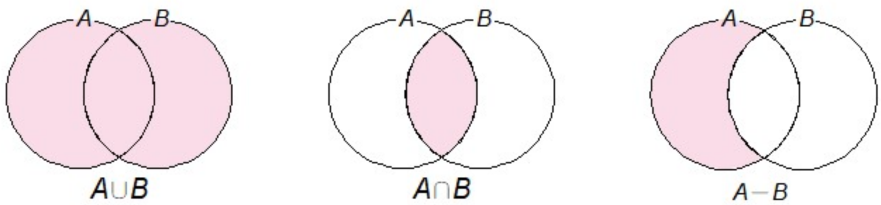
由集合 A 與集合 B 的共同元素組成的集合，稱為 A 與 B 的**交集**，記作 $A\cap B$，

即 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$。

在集合 A 中，扣除同在 B 中的元素組成的集合，稱為集合 B 在集合 A 的**差集**，簡稱為 A 減 B 的**差集**，記作 $A-B$，即 $A-B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$。

特別地，當 A，B 沒有共同元素時，$A\cap B=\varnothing$。例如：$A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，則 $A\cap B=\varnothing$。

在下列文氏圖中陰影部分分別為 $A\cup B$，$A\cap B$ 與 $A-B$ 三個集合。



例如：$A=\{1,2,3,4,5\}$、$B=\{-4,3,4,7,8\}$，$A\cup B=\{-4,1,2,3,4,5,7,8\}$。

例如：$A=\{1,2,3,4,5\}$、$B=\{-4,3,4,7,8\}$，$A\cap B=\{3,4\}$。

例如：設 $A=\{1,2,3,4,5\}$、$B=\{2,4,7,8,9\}$，則 $A-B=\{1,3,5\}$，$B-A=\{7,8,9\}$

[例題3] 設 $A=\{x|-3\le x<1\}$，$B=\{x|-2<x\le 2\}$，試求下列各集合：

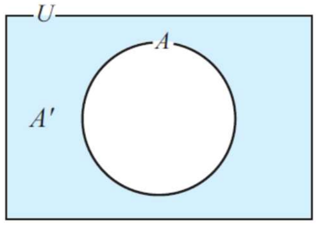
$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$、$B-A$。

Ans：

$A\cup B=\{x|-3\le x\le 2\}$、$A\cap B=\{x|-2<x<1\}$、$A-B=\{x|-3\le x\le -2\}$、$B-A=\{x|1\le x\le 2\}$

二、宇集與補集

探討投擲一顆骰子某些點數發生的機率時，出現點數的集合都是集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的子集。



一般而言，當探討某些問題時，所涉及的集合往往都是某個集合 U 的子集，集合 U 稱為**宇集**。當 A 是宇集 U 的子集時，在宇集 U 中但是不屬於 A 的元素所成的集合稱為 A 的**餘集** (**或補集**)，以符號 A' 表示 (如圖中，藍色區域)，即 $A'=\{x \mid x \in U, x \notin A\}$。例如：討論投擲一顆骰子出現點數之機率時，令奇數點所成的集合為 $A=\{1, 3, 5\}$，則偶數點所成的集合即為 $A'=\{2, 4, 6\}$。

[例題4] $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{2,3,4,7\}$，$B'=\{3,6,8\}$，

試求下列各集合：A'，B，$A\cup B$，$A\cap B$， $A-B$。

Ans：$\{1,5,6,8\}$，$\{1,2,4,5,7\}$，$\{1,2,3,4,5,7\}$，$\{2,4,7\}$，$\{3\}$

(練習7) 令宇集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，$A=\{1, 2, 3, 5\}$，$B=\{2, 4, 5, 7\}$，用列舉法表示下列集合。(1) A'，B'。 (2) $(A\cap B)'$，$(A\cup B)'$。

Ans：(1)$A'=\{4,6,7,8,910\}$、$B'=\{1,3,6,8,9,10\}$ (2)$\{1,3,4,6,7,8,9,10\}$、$\{6,8,9,10\}$

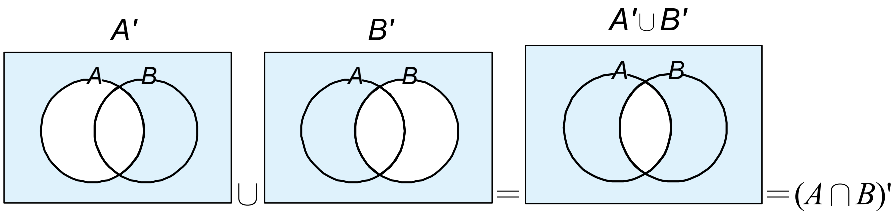
根據練習 7，可以得知 $\mathbf{(A\cap B)'=A'\cup B'}$ 與 $\mathbf{(A\cup B)'=A'\cap B'}$ 這兩個結果。

一般而言，選定了宇集，對於任意集合 A，B，這兩個結果都是正確的，這兩個結果稱為集合的笛摩根定律。練習 7 中的兩個集合 A，B 是滿足集合的笛摩根定律的特例。

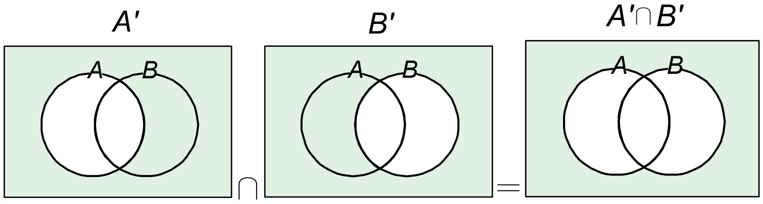
以下用文氏圖來說明**集合的笛摩根定律**：

設 U 為宇集，A 與 B 是 U 的子集，由文氏圖可以得知：(圖中以顏色代表集合)

(1) A 與 B 交集的餘集等於 A 的餘集與 B 的餘集的聯集，即 $(A\cap B)'=A'\cup B'$。



(2) A 與 B 聯集的餘集等於 A 的餘集與 B 的餘集的交集，即 $(A\cup B)'=A'\cap B'$。



$=(A\cup B)'$

(練習8) 設 $A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x|1<x<3\}$，求 $A\cap B$ 與 $A\cup B$。
Ans：$A\cap B=\{x|1<x<2\}$，$A\cup B=\{x|-2<x<3\}$。

(練習9) 設 $A=\{(x,y)|x+2y=2$，x,y 為實數$\}$，$B=\{(x,y)|x-4y=6,x,y$ 為實數$\}$

試求 $A\cap B=$？ Ans：$\{(\frac{10}{3},\frac{-2}{3})\}$

(練習10) 設 $A=\{-2,a-2,3\}$，$B=\{1,a^2-a-3,-5\}$，若 $A\cap B=\{3\}$，則 $a=$？Ans：$a=-2$

(練習11) 已知 $A=\{x\in Z|\ |x+2|<3\}$，$B=\{x\in Z|x^2\geq 4\}$，試求 $A-B=$？Ans：$\{-1,0\}$

(乙)簡單邏輯

◆ 命題

數學上討論的語句都是可以判斷真偽的，凡是可以判斷真偽的語句稱為命題。
例如：

「3 是 12 的因數」，此命題為真。「面上三角形的內角和為 360°」，此命題為偽。

設 p 是一個命題，否定 p 而成的新命題，稱為 p 的**否定命題**，記作$\sim p$
(讀作非 p)。當命題 p 為“真”時，則否定命題$\sim p$ 為“偽”；當命題 p 為“偽”時，

則否定命題$\sim p$ 為“真”。例如：

題號	命題 p	否定命題$\sim p$
(1)	$\triangle ABC$ 是銳角三角形	$\triangle ABC$ 不是銳角三角形
(2)	實數 $x\geq 3$	實數 $x<3$
(3)	所有的質數都是奇數	可以找到不是奇數的質數
(4)	在區間〔0, 1〕中可以找到無理數	在區間〔0, 1〕中無法找到無理數

(練習12)　若 p 表示下列各命題，試分別寫出$\sim p$：

題號	命題 p	否定命題$\sim p$
(1)	實數 $x \leq 10$	
(2)	所有的矩形都是正方形	
(3)	有些正整數不是質數	

Ans：(1)實數 $x>10$　(2)存在一個矩形不是正方形　(3)所有正整數是質數

◆ 「 或 ”、“ 且 」組成的命題

數學上常會將兩個或兩個以上的命題，使用“或”、“且”來組成一個新的命題。

例如：

(1) 不等式 $x^2-x-6>0$ 的解為“$x<-2$”或“$x>3$”。

(2) 不等式 $x^2+2x-8<0$ 的解為$-4<x<2$ 指的是“$x>-4$”且“$x<2$”。

我們可以根據命題 p 與 q 的真偽來判定命題“p 且 q”與“p 或 q”的真偽。當命題 p 與 q 都是真時，則“p 且 q”才是“真”，否則就是“偽”。當命題 p 與 q 中，至少有一個是“真”，則“p 或 q”為“真”，否則為“偽”。

(練習13)　設命題甲：菱形都是正方形，命題乙：正三角形都是菱形，
命題丙：7>2，試判別下列命題的真偽：
(1)甲　(2)乙　(3)甲且乙　(4)乙且丙　(5)甲或丙。
Ans：(1)偽　(2)真　(3)偽　(4)真　(5)真

(練習14)　試判斷下列命題的真偽：

(1) 「2 是唯一的偶質數」且「25 是完全平方數」。

(2) 「10 被 3 除餘 1」且「10 是完全平方數」。

(3) 「10 被 3 除餘 2」或「10 是完全平方數」。

(4) 「正方形四個邊等長」或「平行四邊形四個內角相等」。

Ans：(1)真　(2)偽　(3)偽　(4)真

設 p，q 為兩個命題，“p 或 q”，“p 且 q”的否定命題如何理解呢?

以下面的實例來說明：

前一小節曾提到申請加入籃球隊甲乙兩個教練分別有不同的篩選條件：

(1) 甲教練條件：“體重超過 75 公斤或身高超過 177 公分”。

(2) 乙教練條件：“體重超過 75 公斤且身高超過 177 公分”。

以命題 p，q 分別表示體重超過 75 公斤，身高超過 177 公分的篩選條件，以 A，B 分別表示體重超過 75 公斤，身高超過 177 公分的學生編號所成的集合。我們可將命題與集合以下表來做對照：

	命題	符合條件學生編號所成的集合
甲教練的篩選條件	p 或 q	$A\cup B$
乙教練的篩選條件	p 且 q	$A\cap B$

根據集合的笛摩根定律 $(A\cup B)'=A'\cap B'$，$(A\cap B)'=A'\cup B'$，則可以得到以下結果：
不符合甲教練申請條件的人，其體重與身高均不符合條件；
不符合乙教練申請條件的人，其體重與身高至少有一項不符合條件。
上述的說法可以表示為

(1) 命題“p 或 q”的否定命題為“$(\sim p)$ 且 $(\sim q)$”。

(2) 命題“p 且 q”的否定命題為“$(\sim p)$ 或 $(\sim q)$”。

故上述的結果也稱為**邏輯的笛摩根定律**。

邏輯的笛摩根定律
設 p，q 為兩個命題，
(1)“p 或 q”的否定命題為“$(\sim p)$ 且 $(\sim q)$”。
(2)“p 且 q”的否定命題為“$(\sim p)$ 或 $(\sim q)$”。

(練習15) 請在表格中，填入適當的命題：

命題	命題的否定
“$x\neq 3$”或“$y=2$”	
$-2<x<5$，即“$-2<x$”且“$x<5$”	

Ans：(1)$x=3$ 且 $y\neq 2$ (2)$x\leq -2$ 或 $x\geq 5$

(練習16)　試寫出下列各敘述的否定敘述。

(1) 小明第一次段考數學及格且英文及格。

(2) $x>3$ 或 $x<-1$。

(3)$x=3$ 或 $x=5$

(4)$1<x<6$

Ans：(1)小明第一次段考數學不及格或英文不及格

(2)$-1\le x\le 3$　(3)$x\ne 3$ 且 $x\ne 5$　(4)$x\ge 6$ 或 $x\le 1$

(練習17)　學校規定上學期成績須同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

一、國文成績或英文成績 75 分(含)以上；

二、數學成績及格。

已知小安上學期國文 70 分而且他不符合參選模範生的資格。

請問下列哪一個選項的推論是正確的？

(1)小文的英文成績未達 75 分

(2)小文的數學成績不及格

(3)小文的英文成績 75 分(含)以上但數學成績不及格

(4)小文的英文成績未達 75 分且數學成績不及格

(5)小文的英文成績未達 75 分或數學成績不及格。

Ans：(5)

◆　「若 …，則 …」的命題

除了用“或”、“且”來組成命題外，還可看到形如“若命題 p (前提)，則命題 q (結論)”這種形式的命題。例如：

(1)　若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形 (前提)，則 $\overline{AB}=\overline{CD}$ (結論)此命題為真命題。

(2)　若 $|x|>3$ (前提)，則 $x>3$ (結論)。因為取 $x=-4$，滿足前提而不滿足結論，所以上述的命題是偽命題。

上述過程中，舉出了一個滿足前提而不滿足結論的例子，稱為**“舉反例”**。

舉出反例就可以說明「若命題 p (前提)，則命題 q (結論)」此形式的命題是偽命題。

第一冊中曾用反證法證明 $\sqrt{2}$ 不為有理數，反證法的原理是從「假設結論不成立」出發，經過一系列的推理，最後導出矛盾的結果，從而論證「假設結論不成立」是錯誤的，因此「結論成立」。

故反證法可以證明「若命題 p (前提)，則命題 q (結論)」這種形式的命題是真命題。

[例題5] 試判斷下列命題的真偽：

(1) 若 $x>0$ 且 $y>0$，則 $xy>0$。

(2) 若 $xy>0$，則 $x>0$ 且 $y>0$。

上例中，若命題 p 與 q 分別代表命題“$x>0$ 且 $y>0$”與“$xy>0$”，此時“若 p，則 q”為真命題，則稱“p 是 q 的**充分條件**”或“q 是 p 的**必要條件**”以符號“$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$”表示。反過來，我們得知命題“若 q，則 p”是偽命題，因此“若 p，則 q”為真命題並不保證“若 q，則 p”是真命題。

但是有些命題的推論關係，會滿足“若 p，則 q”與“若 q，則 p”均是真命題，舉例來說，以下兩個命題都是真命題：

(1) 若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形 (命題 p)，則四邊形 $ABCD$ 對邊相等 (命題 q)。

(2) 若四邊形 $ABCD$ 對邊相等 (命題 q)，則四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形 (命題 p)。

換句話說，命題 p 既是命題 q 的充分條件又是必要條件。

一般來說，若命題 p 既是命題 q 的充分條件 ($p \Rightarrow q$) 又是必要條件 ($q \Rightarrow p$)則稱命題 p 是命題 q 的**充分必要條件**，簡稱為**充要條件**，可用符號“$\boldsymbol{p \Longleftrightarrow q}$”表示。

(練習18) 試判斷下列命題的真偽：

(1) 若四邊形 $ABCD$ 四個邊都相等，則四邊形 $ABCD$ 為矩形。

(2) 若 $|x|>5$，則 $x>5$。

(3) 若 $x>5$，則 $|x|>5$。

Ans：(1)偽 (2)偽 (3)真

(練習19) 設(A)充分 (B)必要 (C)充要(D)非充分且非必要，將(A)(B)(C)(D)填入下列空格

(1)「$x=1$」為「$x^2-3x+2=0$」的________條件。

(2)「$-1\le x\le 4$」為「$x>-3$」的_________條件。

(3)「$ab<0$」為「a , b 之中有一者為負」的______條件。

(4)「$a\ne b$」為「$a^2\ne b^2$」的______________條件。

(5)「$a=b$」為 $a^2=b^2$ 的_____________條件。

(6)「 $|a|=|b|$ 」為 $a=b$ 的______________條件。

(7)「$a=b=0$」為「$a^2+b^2=0$」的_____________條件。

(8)「$x>2$」為「 $|x|<2$」的________________條件。

Ans：(1)A(2)A(3)A(4)B(5)A(6)B(7)C(8)D

(丙)基本計數原理

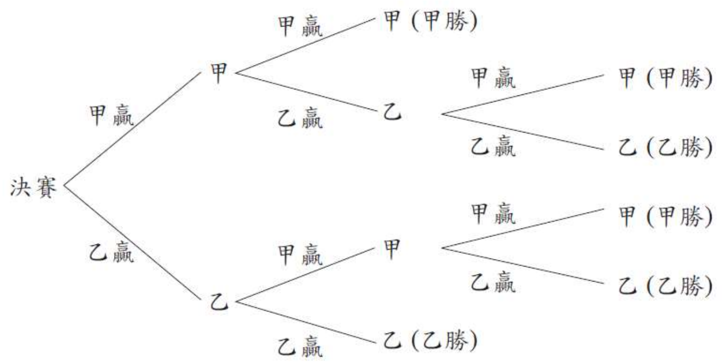
接下來討論幾個基本的計數原理，這些原理都可以幫助我們有規律且有系統的計數。

◆ 樹狀圖與窮舉法

國中所介紹的樹狀圖，有助於在簡單的狀況下，列出所有情形。

用以下的例題來說明：

[例題6] 校際羽球賽中，甲、乙兩人進入決賽，在三局中先贏得二局者就獲勝，試問共有多少種比賽情形可以分出勝負? (每場比賽無和局)



共有 6 種比賽情形。

上例中，用樹狀圖將比賽勝負情形都列出來，這樣的計數法，稱為窮舉法。

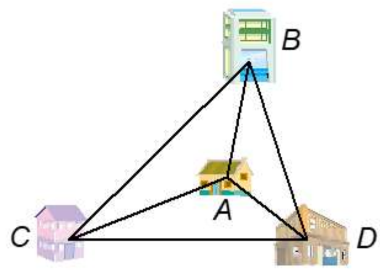
樹狀圖是一種樹枝形狀的圖形，用來列舉一連串事件發生時所有可能情況的一種工具。

樹狀圖是用窮舉法解題時的一種工具，通常樹狀圖的作法是由左而右逐層分類，分步，使複雜情況明顯化。

樹狀圖在計數問題處理的過程中，可以呈現直觀的、具體的模型，使得分類、分層的工作容易進行，且可以避免重疊與遺漏的現象。

(練習20) 小安有三位友人，他們的住家位置分別為 B，C，D 如右圖所示，小安準備從住家 A 出發，到 B，C，D 三位友人家裡拜訪，最後回到 A，而且走過的路不再重複，試問小安拜訪友人過程中有幾種走法?

Ans：6

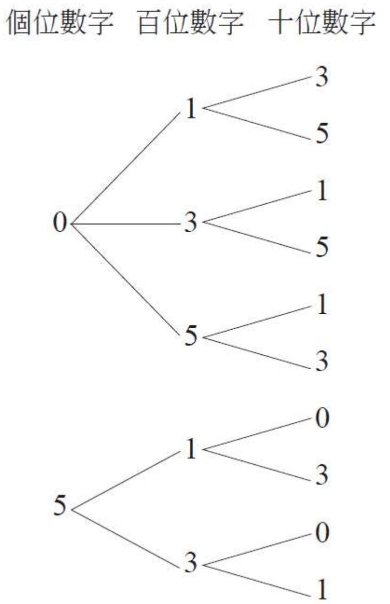


◆ 加法與乘法原理

當計數的情形複雜時，只靠一個樹狀圖不一定可以羅列出所有的情形，如果分類情形很有規律，還是可以用樹狀圖來分析問題，並且配合**加法原理**與**乘法原理**來計算總數。

舉例說明：

設三位數是由 0，1，3，5 這四個數所組成，每個數字都不重複試問這樣的三位數中 5 的倍數有幾個?



因為 5 的倍數其個位數字是 0 或 5，因此畫樹狀圖時，可以分成兩個部分，如右圖，

(1) 第一個情形個位數字為 0 時：

百位數字有 3 個分支 1，3，5，

每個百位數字都有 2 個子分支 (十位數字)。

故個位數字為 0 的三位數共有

$3\times2=6$ (個)。(乘法原理)

(2) 第二個情形個位數字為 5 時：

百位數字有 2 個分支 (因為百位數不為 0)，

每個百位數字都有 2 個子分支 (十位數字)。

故個位數字為 5 的三位數共有

$2\times2=4$ (個)。(乘法原理)

因此滿足條件的三位數共有 $6+4=10$ (個)。(加法原理)

即 $\overbrace{\underbrace{3\times2}_{\text{乘法原理}}+\underbrace{2\times2}_{\text{乘法原理}}}^{\text{加法原理}}=10$

上例計算過程中，使用了兩個基本的計數原理：**乘法原理**與**加法原理**。

加法原理：

設完成一件事可以有 k 個情形以供選擇，每種情形並不重複，若第一個情形有 n_1 種方法可供選擇，第二個情形有 n_2 種方法可供選擇，⋯，第 k 個情形有 n_k 種方法可供選擇，則完成這件事的方法數共有 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ (種)。

(練習21) 右圖是某高中合作社早餐部的菜單，小安早餐想要從烤土司類、厚片類或蛋餅類中選一個當早餐，請問他的早餐有幾種選擇？ Ans：19

烤吐司類		厚片類		蛋餅類	
花生吐司	15	鮪魚厚片	20	原味蛋餅	20
草莓吐司	15	香蒜厚片	20	九層塔蛋餅	30
巧克力吐司	15	藍莓厚片	20	蔬菜蛋餅	30
奶酥吐司	15	奶油厚片	20	玉米蛋餅	30
培根吐司	20	花生厚片	20	鮪魚蛋餅	30
火腿蛋吐司	20			起司蛋餅	30
				火腿蛋餅	30
				培根蛋餅	30

乘法原理

設完成一件事共需經過 k 個步驟才能完成，若第一個步驟有 m_1 種方法可供選擇，第二個步驟有 m_2 種方法可供選擇，⋯，第 k 個步驟有 m_k 種方法可供選擇，則完成這件事的方法數共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ (種)。

(練習22)　右圖是連鎖餐廳套餐的菜單，每份套餐是由前菜、沙拉、主餐與湯品各選一種組成的，菜單中前菜、沙拉、主餐與湯品各有 2 種、4 種、5 種、3 種可以選擇。請問客人會有幾種點套餐的方式？　Ans：$2\times4\times5\times3=120$ (種) 方式

(練習23)　台灣高鐵從<u>南港</u>到<u>左營</u>共有 10 個車站，高鐵車票每張均要標示起站與終站的站名 (A 站至 B 站與 B 站至 A 站視為不同的車票)，請問高鐵公司會列印出幾種不同起始站到終點站的車票？　Ans：90 種

在計數的過程中，如何將事物作適當分類與規畫步驟是很重要的，因此加法原理與乘法原理常常是一起使用的。舉幾個例子使用乘法原理或加法原理來計數：

[例題7] 若把從 1 到 1000 的整數列出來，試問其中不含有數字 3 的有多少種？又至少含有一個數字 3 的有多少種？

[解說]：

(A)首先我們將 1 到 1000 的數，分成一位數、二位數、三位數、四位數然後在這些分類中算出不含有數字 3 的數有多少個

(1°)一位數：1,2,4,5,6,7,8,9⇒8 個

(2°)二位數：十位數字有 8 個數可以用，個位數字有 9 個數字可以用，因此用乘法原理可知有 8×9 個數字。

(3°)三位數：百位數字有 8 個數可以用，十位數字有 9 個數字可以用，個位數字有 9 個數字可以用，因此用乘法原理可知有 $8\times9\times9$ 個數字。

(4°)四位數：只有 1000 一個數字

根據以上的分類，由加法原理知共有 $8+8\times9+8\times9^2+1=729$ 個不含有數字 3 的數。

(B)1~1000 中至少含有一個數字 3 的數字個數

$=1000-(1\sim1000$ 中不含有數字 3 的數的個數$)=1000-729=271$。

[例題8] 試回答下列各問題：

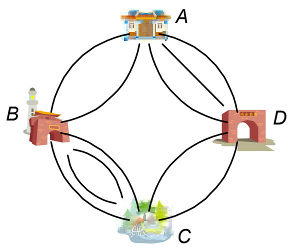
(1)2520 的正因數共有多少個？

(2)2520 的奇數的正因數共有多少個？

(3)2520 的完全平方數的正因數共有多少個？

Ans：(1)48 個　(2)12 個　(3)4 個

(練習24)　設 A，B，C，D 為四個旅遊景點，它們之間的分布及連接的道路，如右圖所示。由於時間的關係，小安想要規劃一個旅遊路線，從 A 景點出發，每個景點不重複經過，不一定要走完每個景點，最後到達 C 景點，請問他可以規劃出多少種路線？
Ans：14 種



(練習25)　設三位數是由 1, 2, 3, 4, 5 這五個數字所組成，每個數字都不重複，試問這樣的三位數中有幾個偶數？Ans：24

(練習26)　設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之係數 $a,b,c\in\{3,4,5\}$ 請問共有多少個不同的二次函數？
Ans：3^3

(練習27)　請問 720 的正因數個數有多少個？Ans：30 個

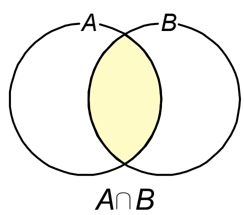
(練習28)　用 0,1,2,3,4,5 排成一個四位數，
(1)若數字可重複，請問可作成幾個四位數。
(2)若數字不可重複，請問可作成幾個四位數。
Ans：(1)5×6^3　(2)300

◆ 取捨原理

如果完成一件事分類的情形沒有重複，可以利用加法原理來計數。但是當分類的情形發生重複的現象，又該如何來計數呢？
若我們完成一件事的類別有重複的部分，就不能將方法數直接相加，此時就要用到所謂的「**取捨原理**」。取捨原理是計數中很常用的方法，先舉例來說明：
求 1~20 的自然數中 2 或 3 的倍數有多少個？
[解法]：
設 A、B 分別代表 1~20 中 2 與 3 的倍數，我們要計算 $A\cup B$ 的元素個數
$\because A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$、$B=\{3,6,9,12,15,18\}$，而 $A\cap B=\{6,12,18\}$
因此 $A\cup B$ 的元素個數=10+6−3=13。上述的方法就是所謂的取捨原理。

　右圖的文氏圖中，$n(A)+n(B)$ 比 $n(A\cup B)$多算了一次 $n(A\cap B)$，所以可得

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B),$$



上式稱為二個集合的**取捨原理** (或稱**排容原理**)。

　特別地，當 A 與 B 兩集合的交集為空集合時 (此時 $n(A\cap B)=0$)，則

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)。$$

[例題9] 某班 40 位同學中，根據調查早餐喜歡吃三明治有 16 人，喜歡吃饅頭夾蛋有 12 人，兩種都喜歡有 5 人，請問全班同學中：

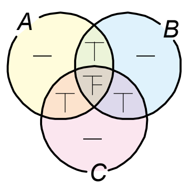
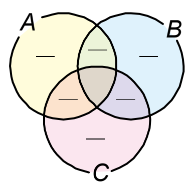
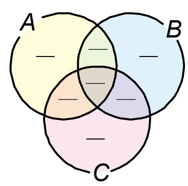
(1)三明治與饅頭夾蛋至少喜歡一種有多少人?

(2)兩種餐點都不喜歡有多少人?

Ans：(1)23 人　(2)17 人

仿照兩個集合聯集與交集的定義，可以定義三個集合的聯集與交集。A，B，C 三個集合中所有元素聯合起來組成的集合，稱為 A，B，C 的聯集，記作 $A\cup B\cup C$；而 A，B，C 三個集合中共同元素組成的集合，稱為 A，B，C 的交集，記作 $A\cap B\cap C$。

接下來探討 $A\cup B\cup C$ 的元素個數問題：下圖中 3 個文氏圖涵蓋的範圍就是 $A\cup B\cup C$，它被分割成 7 個彼此不相交的子集。計算 $n(A\cup B\cup C)$ 時，每個子集的計數須各算一次，當我們計算 $n(A)+n(B)+n(C)$ 時，有些子集的計數計算一次，有些兩次，有些三次，分別以“一”、“丅”、“下”表示，過程中須扣除重疊的部分。

		
$n(A)+n(B)+n(C)$	$n(A)+n(B)+n(C)$ $-n(A\cap B)-n(B\cap C)$ $-n(C\cap A)$	$n(A)+n(B)+n(C)$ $-n(A\cap B)-n(B\cap C)$ $-n(C\cap A)$ $+n(A\cap B\cap C)$

根據上表，可以得知

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)。$$

上式稱為三個集合的**取捨原理** (或稱**排容原理**)。

二個或三個集合的取捨原理：
設 A，B，C 為三個有限集合，
(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。
(2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$。

[例題10] 合唱團的學生中，會演奏小提琴、鋼琴、吉他的人數分別為 8 人，15 人與 20 人。會演奏小提琴、鋼琴兩種樂器的有 3 人；會演奏鋼琴、吉他兩種樂器的有 6 人；會演奏吉他、小提琴兩種樂器的有 4 人，三種樂器都會演奏有 2 人。請問：合唱團學生中至少會演奏小提琴、鋼琴、吉他有多少人？Ans：32 人

[例題11] 某一班共有 45 人，問卷調查有手機與平板電腦的人數。從統計資料顯示此班有 35 人有手機，而有 24 人有平板電腦。設：
A 為同時有手機與平板電腦的人數
B 為有手機， 但沒有平板電腦的人數
C 為沒有手機， 但有平板電腦的人數
D 為沒有手機， 也沒有平板電腦的人數
請選出恆成立的不等式選項。
(1) A＞B (2) A＞C (3) B＞C (4) B＞D (5) C＞ D (2015 學科能力測驗)
Ans：(2)(3)(4)

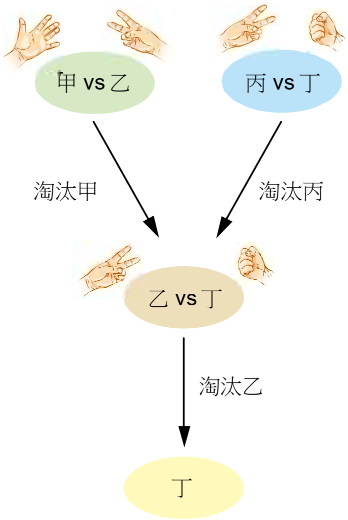
(練習29) 某班 40 位同學中，喜歡管樂者有 16 人，喜歡弦樂者有 12 人，兩種樂器都喜歡者有 5 人，請問全班同學中：
(1) 兩種樂器至少喜歡一種者有多少人？
(2) 兩種樂器都不喜歡者有多少人？ Ans：(1)23 人 (2)17 人

(練習30) 1 到 500 的自然數。
(1) 2，3 或 5 的倍數共有多少個？
(2) 不是 2，3，5 中任一數的倍數共有多少個？
Ans：(1)366 個 (2)134 個

◆ 一一對應原理

除了前面介紹的乘法、加法與取捨原理，還有一種基本的計數法則就是一一對應原理。舉例說明：有 4 個人玩“剪刀、石頭、布”的猜拳遊戲。每一局比賽由其中兩人配對猜拳，直到分出勝負為止，猜輸的人即遭淘汰，猜贏的人繼續配對猜拳。試問總共要猜拳幾局，才能產生最後的勝利者?

以甲、乙、丙、丁代表 4 人。如右圖，可以看出，每一局會與被淘汰的一個人相對應。因此數猜拳的局數就等於淘汰的人數。故產生最後一位勝利者，就須淘汰 3 人，因此總共要猜拳 $4-1=3$ (局)。



從集合的觀點來看，A 為猜拳的兩人配對情形所成的集合，B 為淘汰的人所成的集合，因為兩個集合間有一一對應，所以兩個集合的元素個數相等。

一般來說，上述的想法也是正確的，稱為**一一對應原理**。

[例題12] 有 30 個人玩“剪刀、石頭、布”的猜拳遊戲。每一局比賽由其中兩人配對猜拳，直到分出勝負為止，猜輸的人即遭淘汰，猜贏的人繼續配對猜拳。試問總共要猜拳幾局，才能產生最後的勝利者？

分析：我們利用一一對應原理解題。

解：每猜拳一局，就會淘汰一人。

今欲產生最後一位勝利者，就須淘汰 29 人，

因此總共要猜拳 $30-1=29$ (局)。

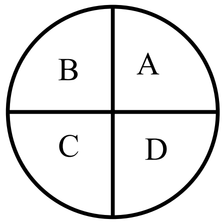
(練習31) 利用一一對應原理探討從甲、乙、丙、丁之中選出 2 個人，共有多少種選法呢? 如右表，例如黑球排到甲底下，就是選中甲，如此就會使選出的人與 2 個黑球 2 個白球的排法產生一一對應的關係，請完成上表中空白的部分。

選出的人		2 個白球 2 個黑球的排法			
		甲	乙	丙	丁
甲、乙	⟷	●	●	○	○
甲、丙	⟷	●	○	●	○
甲、丁	⟷				
乙、丙	⟷				
	⟷	○	●	○	●
	⟷	○	○	●	●

再舉一些實例，來應用前面所提到的計數原理

[例題13] 將 15 用三個自然數之和來表示，方法有幾種？Ans：19
(15=1+1+13 與 15=1+13+1 視為同一種，即不考慮順序)

[例題14] 如圖，用 5 個不同的顏色去塗 A、B、C、D 四個區域，將每個區域塗上一種顏色，相鄰區域不得同色，則有幾種方法？ Ans：260

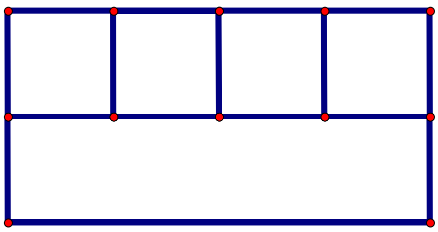


(練習32) 設有 25 個人參加網球單淘汰賽，每一場由其中兩位選手配對比賽，賽輸的人即遭淘汰，並且每一場比賽都一定有一位得勝，不允許有和局。試問總共要比賽幾場，才能產生冠軍？ Ans：24 人

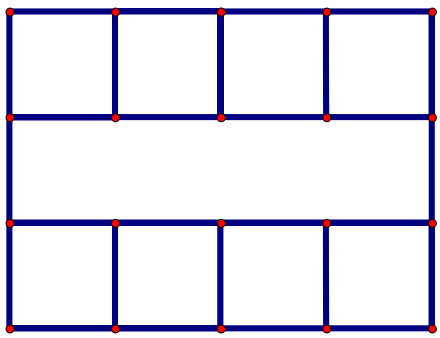
(練習33) 如右圖，五個方格要用 5 種顏色來著色，若相鄰部分不可以同色，且最左邊與最右邊也不可以同色，則共有________種著色的方法。
Ans：1020

(練習34) 從 4 種顏色塗下列兩圖，使同色不相鄰之塗法共有多少種？

(1)



(2)



Ans：(1)96 (2)2304

習題

基本題

1. 用列舉法寫出下面的集合：

   (1)A={x|x^2−9x+20=0}　(2)B={$\frac{m}{n}$|m,n∈N 且 m+n=5}

2. 設 A＝{ 1，3，5 }，B＝{ 2，3 }，試求下列各集合：
   A∩B，A∪B，A－B，B－A。

3. 某公司對於 8 位求職者進行了語文與邏輯測驗，測驗結果如下表：

求職者編號	1	2	3	4	5	6	7	8
語文測驗分數	52	36	54	83	61	75	46	67
邏輯測驗分數	68	81	45	66	79	87	65	74

   令 A，B 分別表示語文與邏輯測驗分數大於 70 的求職者編號所成的集合，
   (1)請用列舉法表示 $A\cup B$。
   (2)請用列舉法表示 $A\cap B$。
   (3)哪位求職者最有可能獲得錄取，請說出你的理由。

4. 已知宇集為實數 $\mathbb{R}$, $A=\left\{x\middle|1\le x\le 3,\ x\in\mathbb{R}\right\}$, $B=\left\{x\middle|2\le x\le 4,\ x\in\mathbb{R}\right\}$，

   求(1) $A\cap B$。　(2) $A\cup B$。　(3) $A-B$。　(4) A'。
   並以區間符號表示。

5. 設 A={x,y,z}，B={x+1,2,3}，若 A=B，則有序數對(x,y,z)共有幾組？

6. 設 S={1,2,3,4,5}，試求下列兩小題：
   (1)S 的子集合個數。(2)含三個元素的子集合有幾個。

7. 設 A={x|x^2−ax−4=0}，B={x|x^2+ax+b=0}，若 A∩B={−1}，則數對(a,b)=？

8. 設 S={ϕ，1，{1,2}，3}，則下列那些是正確的？
   (A) ϕ∈S (B)ϕ⊂S (C)2∈S (D){1,2}∈S (E){1,2,3}⊂S。

9. 對四邊形 ABCD 而言，
   (1)ABCD 為平行四邊形是對角線互相平分之_____條件。
   (2)ABCD 為矩形是對角線互相平分之__________條件。
   (3)ABCD 為菱形是對角線互相垂直之__________條件。
   (4)對角線互相垂直平分是正方形之___________條件。

10. 是非題：正確請填入 O，錯誤請填×

(　　)「25 為質數且$\dfrac{5}{3}$為有理數」是真命題。

(　　)「若 a 為實數且 $a^2=9$，則 $a=3$」是真命題。

(　　)「ΔABC 為正三角形」是「ΔABC 中內角$\angle$A=60°」的充分條件。

(　　) 若高一某班的學生中喜歡打籃球、踢足球的學生分別有 23 人、8 人，那麼兩種運動都喜歡的人最多有 8 個。

11. 甲先生、乙先生、丙先生、丁先生四位男士以及 A 小姐、B 小姐、C 小姐、D 小姐四位女士想要混搭兩部計程車，每車載有四名乘客。已知：

(一)甲先生與 A 小姐同車 (二)乙先生與 B 小姐同車 (三)C 小姐與 D 小姐不同車

請選出正確的選項。

(1) A 小姐與 D 小姐必不同車

(2) 甲先生與 B 小姐必不同車

(3) 乙先生與丙先生必同車

(4) 如果乙先生與丁先生同車，則丙先生與 B 小姐必同車

(5) 如果 D 小姐與乙先生同車，則 C 小姐與 A 小姐必同車 (2015 指定乙)

12. 丟一顆骰子三次，依序將擲出的數字放在三位數的百位數、十位數、個位數，試求下列各小題：

(1)會形成多少個三位數？

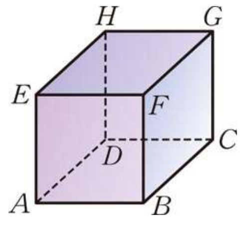
(2)每個位數的數字均不同的三位數有多少個？

(3)會形成偶數的三位數有多少個？

13. 考慮有理數$\dfrac{n}{m}$，其中 m,n 為正整數且 $1\le mn\le 8$。則這樣的數值(例如$\dfrac{1}{2}$與$\dfrac{2}{4}$同值，只算一個)共有幾個？

(1)14 個 (2) 15 個(3) 16 個(4) 17 個 (5) 18 個。 (2015 指定乙)

14. 一隻螞蟻沿著右圖正六面體的稜線爬行，由 A 點爬到 G 點，則最短的路程共有多少種爬法？



15. 7200 的正因數中，試問：

(1) 6 的倍數有多少個？

(2) 2 的倍數，但不是 3 的倍數有多少個？

(3)完全平方數有多少個？

16. 全班 40 人作測驗，測驗題分 A, B, C 三題，結果答對 A 題者有 15 人，答對 B 題者有 19 人，答對 C 題者有 20 人，其中 A, B 兩題都答對者有 10 人；B, C 兩題都答對者有 12 人；C, A 兩題都答對者有 8 人；三題都答對者有 3 人。請問：

(1)全班同學中，至少答對一題者有多少人？

(2)全班同學中，三題都答錯者有多少人？

17. $|x|+|y|\le 3$ 的圖形中有幾個整數坐標點？

18. 三邊長均為正整數且最大邊長為 11 的三角形共有多少個？

19. 某一班共有 40 人，問卷調查有手機與平板電腦的人數。從統計資料顯示此班有 35 人有手機，而有 14 人有平板電腦，兩者都有的人共有 x 人，試問 x 可能為下列哪些值?

(A) 8　　(B) 9　　(C) 10　　(D) 14　　(E) 15

進階題

20. 令宇集合 U 表示從 1 到 10 的所有正整數所成的集合，A 與 B 為其子集合，若 $A'\cap B'=\{1,9,10\}$，$A\cap B=\{3\}$，$A'\cap B=\{2,5,8\}$，則集合 A=？集合 B=？

21. 某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也及格。現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格有 y 人。請選出正確的選項。

(1)$x+y=39$

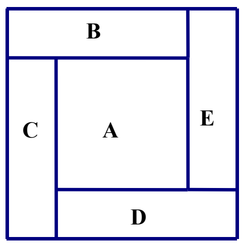
(2)$y\le 11$

(3)三科中至少有一科不及格的學生有 $39-x+y$ 人

(4)三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人

(5)三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人　(2017 學科能力測驗)

22. 設集合 $A=\{x|x>3$ 或 $x<-1\}$，$B=\{x|\ |x-a|\le b\}$，若 $A\cup B=R$，$A\cap B=\{x|3<x\le 4\}$，試求 a,b 之值。



23. 用五種不同的顏色塗右圖中五個空白區域，相鄰的區域塗不同的顏色，則有幾種塗法？

24. 某商店出售 10 種不同的公仔。今甲、乙、丙三人都各自收集公仔。試選出正確選項。

(1)若甲、乙兩人各自收集 6 款公仔，則他們合起來一定會收集到這 10 款不同的公仔。

(2)若甲、乙兩人各自收集 7 款公仔，則至少有 4 款公仔是兩人所擁有

(3)若甲、乙、丙三人各自收集 6 款公仔，則至少有 1 款公仔是三人所擁有

(4)若甲、乙、丙三人各自收集 7 款公仔，則至少有 2 款公仔是三人所擁有

(5)若甲、乙、丙三人各自收集 8 款公仔，則至少有 4 款公仔是三人所擁有

(2019 指定乙)

答案

1. (1){5,4}　(2)$\{\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}\}$

2. A∩B={3}、A∪B={1,2,3,5}、A−B={1,5}、B−A={2}

3. (1){2,4,5,6,8}　(2){6}　(3)6 號最可能錄取，因為兩個條件都符合

4. (1)$[2,3]$。　(2)$[1,4]$。　(3)$[1,2)$。　(4)$(-\infty,1)\cup(3,\infty)$。

5. 5

6. (1)32　(2)10

7. (3,2)

8. (A)(B)(D)

9. (1)充要　(2)充分　(3)充分　(4)必要

10. ×、×、O、O

11. (2)(5)
    [解法]：
    ∵若甲 A 與乙 B 同一車的話，C、D 就會同一車，這樣不合。
    ∴ 甲 A 與乙 B 不同一車
    因此可以將甲 A、乙 B 與丙 C、丁 D 或丙 D、丁 C 分別配合搭乘兩部計程車
    (1) A 小姐與 D 小姐可能同車：甲 A+丁 D、乙 B+丙 C
    (2) 甲先生與 B 小姐必不同車正確。
    (3) 乙先生與丙先生可能不同車：甲 A+丙 C、乙 B+丁 D
    (4) 如果乙先生與丁先生同車，則丙先生與 B 小姐必同車不正確，
    例如甲 A+丙 C、乙 B+丁 D
    (5) 如果 D 小姐與乙先生同車，則 C 小姐與 A 小姐必同車正確。故選(2)(5)。

12. (1) 216 個三位數。(2) 120 個。(3) 108 個。

13. (4)

[解法]：

$m=1$：$1\le n\le 8\Rightarrow\dfrac{n}{m}=n=1,2,3,4,5,6,7,8$

$m=2$：$1\le 2n\le 8\Rightarrow\dfrac{n}{2}=\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{3}{2}$，$m=3$：$1\le 3n\le 8\Rightarrow\dfrac{n}{3}=\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{2}{3}$

$m=4$：$1\le 4n\le 8\Rightarrow\dfrac{n}{4}=\dfrac{1}{4}$，$m=5$：$1\le 5n\le 8\Rightarrow\dfrac{n}{5}=\dfrac{1}{5}$，$m=6$：$1\le 6n\le 8\Rightarrow\dfrac{n}{6}=\dfrac{1}{6}$

$m=7$：$1\le 7n\le 8\Rightarrow\dfrac{n}{7}=\dfrac{1}{7}$，$m=8$：$1\le 8n\le 8\Rightarrow\dfrac{n}{8}=\dfrac{1}{8}$，共有 17 個

14. 6 種

15. (1)30 個　(2)15 個　(3)12 個

16. (1)27 人　(2)13 人

17. 25 [分成 $x=0$，$|x|=1$，$|x|=2,|x|=3$ 分別去討論(x,y)均為整數的點有幾個]

18. 36　[提示：可設三邊長為 $a=11\ge b\ge c$，因為 $2b\ge b+c>a=11\Rightarrow 11\ge b\ge 5.5$ 因此可討論 $b=6,7\ldots,11$，符合條件的(a,b,c)各有 $1,3,\ldots.,11$，因此共有 $1+3+5+\ldots+11=36$ 個]

19. (B)(C)(D)

設兩者都有為 x 人

$0\le x\le 14$，另一方面至少有手機或電腦的人為 $35+14-x=49-x$

故 $49-x\le 40$，$x\ge 9$，因此 $9\le x\le 14$。

20. A={3,4,6,7}、B={2,3,5,8}

21. (2)(5)

設 A、B、C 分別代表國文、英文、數學及格的人所成的集合

$n(A)=45$、$n(B)=39$、$n(C)=34$，$n(B\cap C)=x$，$n(C\cap B')=y,n(A\cap B)=39$

$\because$ 且英文及格的學生國文也及格，$\therefore$ $B\subset A$

故 $n(A\cap B\cap C)=n(B\cap C)=x$

(1)$C=(C\cap B)\cup(C\cap B')$且$(C\cap B)\cap(C\cap B')=\phi$，故 $x+y=34$。

(2)$y=n(C\cap B')=n(C)-n(B\cap C)=34-x\le n(B')=50-39=11\Rightarrow y\le 11$

另一方面 $34-x\le 11\Rightarrow x\ge 23$

$n(B\cap C)=n(A\cap B\cap C)=x\le n(C)=34$

故 $23\le x\le 34$。

(3)(4)(5) $\because$ $n(A\cup B\cup C)=45+39+34-x-39-n(C\cap A)+x=79-n(C\cap A)$

$\therefore$ $n(A'\cup B'\cup C')=50-n(A\cap B\cap C)=50-x\ne 39-x+y$

$\because 23\le x\le 34$，$\therefore$ $16\le n(A'\cup B'\cup C')=50-x\le 27$(等號都會成立)

22. $a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{5}{2}$

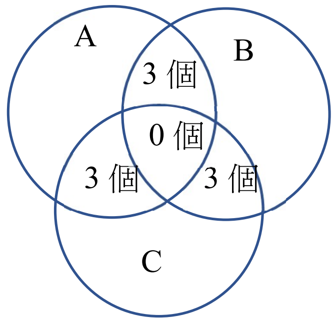
23. 420

[提示：塗顏色的順序可為 A,B,C,D,E 你可以利用樹狀圖，去討論塗法。或是考慮塗法的順序 A,B,D,C,E 當 B,D 同色$\Rightarrow 5\times4\times3^2$ 當 B,D 異色$\Rightarrow 5\times4\times3\times2\times2$]

24. (2)(5)

[解法]：

設 10 種不同的公仔分別編號 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10，甲、乙、丙的公仔所對應的號碼所成之集合分別為 A、B、C



(1) 若甲乙都買到 1,2,3,4,5,6 號公仔，合起來不會收集到這 10 款不同的公仔。錯誤

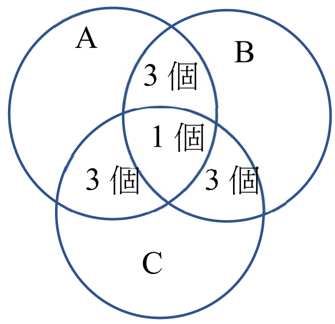
(2) $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=14-n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$，而 $7\le n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\le 10$

$\Rightarrow 4\le n(甲\cap乙)\le 7$。　正確

(3)(4)(5)

設 $n(\mathrm{A})=n(\mathrm{B})=n(\mathrm{C})=x\ge 7$，

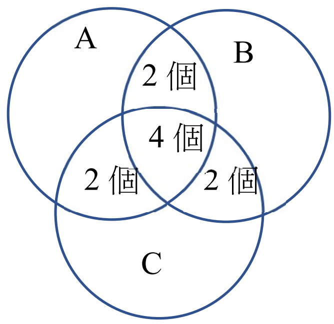
$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=2x-n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$，



因為 $x\le n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\le 10$，所以 $2x-10\le n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le x$，同理 $2x-10\le n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\le x$ 且 $2x-10\le n(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})\le x$

(3)$x=6$ 時，$2\le n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 6$，$2\le n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\le 6$，$2\le n(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})\le 6$，因此可以舉出 $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=0$ 的反例如下：

A={1,2,3,4,5,6}、B={1,2,3,7,8,9}、C={4,5,6,7,8,9}，其中 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\phi$



(4)$x=7$ 時，$4\le n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 7$，$4\le n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\le 7$，$4\le n(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})\le 7$，因此可以舉出 $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=1$ 的反例如下：

A={1,2,3,4,5,6,7}、B={1,2,3,4,,8,9,10}、C={4,5,6,7,8,9,10}，其中 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\{4\}$

(5)$x=8$ 時，$6\le n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le 8$，$6\le n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\le 8$，$6\le n(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})\le 8$

若 $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\le 3$，此時 $3\le n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}')$，$3\le n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}'\cap\mathrm{C})$，$3\le n(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$

因為只有 10 款公仔，顯然不成立。故 $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\ge 4$。

舉一個 $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=4$ 的例子：

A={1,2,3,4,5,6,7,8}、B={1,2,3,4,5,6,9,10}、C={3,4,5,6,7,8,9,10}，故選(2)(5)。