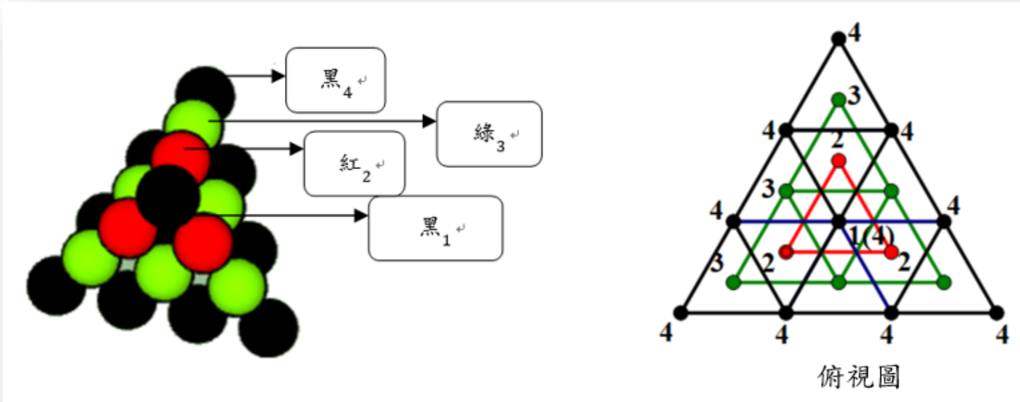
花蓮縣第 62 屆國民中小學科學展覽會
作品說明書



科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：我要翻轉金字塔

關 鍵 詞：三角形翻轉、最少顆數

編　　號：

摘要

本研究是個簡單有趣的圖形遊戲，運用硬幣排成三角形，透過移動最少數量的硬幣，讓三角形翻轉，研究過程中透過國中所學代數，嘗試導出數學公式，並加以驗證最少的硬幣數量是否正確以及和國小研究結果是否吻合。接著繼續研究相鄰兩層間公差不為1時的情況，最後給出所有可能的情況與推導出一般式，最後繼續推廣到立體三角錐球體堆疊的討論，算出非常簡潔的最少移動個數方程式，是本研究的亮點之處。

壹、研究動機

國小時，我被老師問到了一個數學題目，用硬幣排出正三角形並嘗試移動硬幣，看如何以最少的數量，讓三角形翻轉，在國小經過我們的研究後，發現一套代入的公式並參加了第60屆數學科展，由於那時候被評審問到要如何證明我們小學的算式是正確的，而我們透過實驗來找出規律，所以還無法證明。上了國中之後，我想利用所學到的知識，重新將我們國小所做的研究加以驗證，並嘗試改變變因讓每一層之間的公差數不同，並挑戰真的立體金字塔翻轉，於是開始了我們的研究。

貳、研究目的

一、驗證正三角形硬幣堆疊翻轉為倒三角形時需移動硬幣的最少數量。

二、公差為2、3、4…時等腰三角形硬幣翻轉需移動硬幣的最少數量。

三、研究正三角錐體垂直翻轉時需移動圓球的最少顆數。

參、 研究設備與器材

方格紙、筆、電腦、錐體模型。

肆、研究過程與方法

一、三角形數翻轉問題的定義與引理

(一)平面三角形的排法與翻轉定義

1. 正三角形：用硬幣排出n層正三角形，每一層間的硬幣等距，試著移動最少硬幣數讓三角形倒過來(下圖右)，我們將移動的最少顆數記為$f(n,d)$，n 為層數，d 為上下層間的公差個數，如下圖 1 中 n 有 5 層，上下層間公差為 1，移動最少顆數為 5，記為 $f(5,1)=5$。

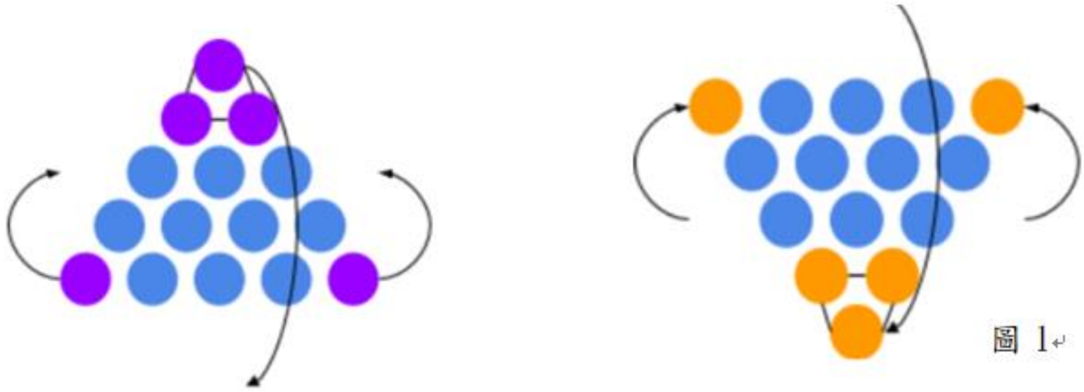


圖 1

2. 等腰三角形：用硬幣排出n層正三角形，每一層間的硬幣等距，如下圖中 n 有 4 層，上下層間硬幣個數公差為 2，如下圖 2 中 n 有 4 層，上下層間公差為 2，移動最少顆數記為記為$f(4,2)$=5，其他公差為 3、4、……排法相同。

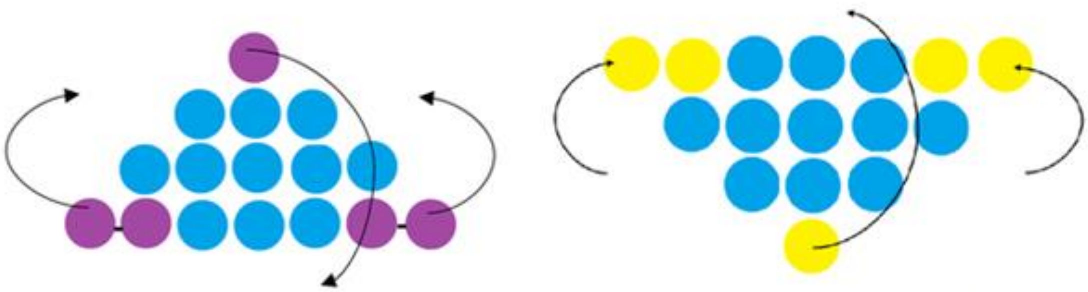
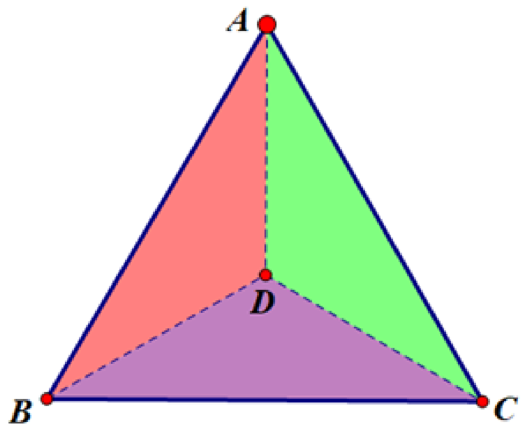


圖 2

(二)立體正三角錐球體排法與翻轉定義

如圖 3，將圓球堆疊成正三角錐 ABCD，以 A 為旋轉中心點，將錐體旋轉 180 度，所得倒立三角錐，如果圖中正三角錐有 n 層，移動某些球後可變成倒立圖形，移動最少顆數記為$F(n)$。



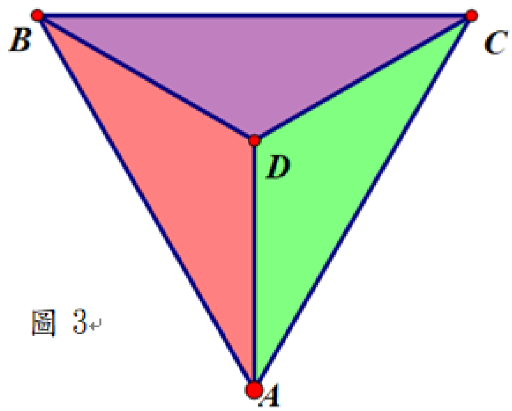
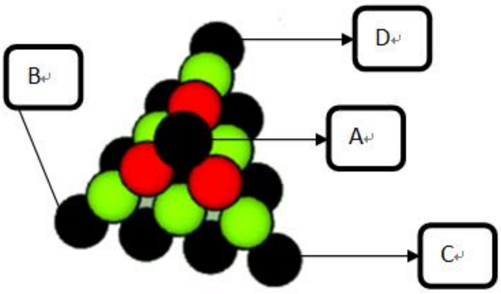


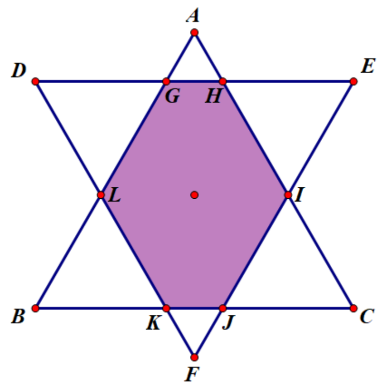
圖 3



二、相關引理

移動最少顆數讓正三角形倒轉的問題中，我們想到如果要移動最少顆，代表正三角形倒轉後要保留的顆數要最多顆，因此我們先以面積的兩個引理來探討問題。

$\boxed{\text{引理一}}$. 正△ABC邊長為a，倒轉後為正△DEF，若兩正三角形以線對稱方式重疊，中間重疊六邊形 GHIJKL 面積有最大值時，則$\overline{DG}=\overline{GH}=\overline{HE}=\frac{a}{3}$，此時六邊形 GHIJKL 為正六邊形。



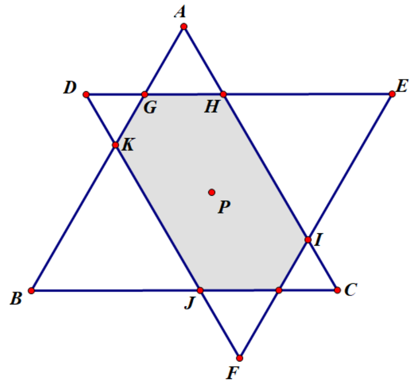
[證明]

設正△AGH邊長為 x，則空白部分面積為

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left[2x^2+4\left(\frac{a-x}{2}\right)^2\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}[3x^2-2ax+a^2]$$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[3(x-\frac{a}{3})^2+\frac{2a^2}{3}\right]$，當$x=\frac{a}{3}$時有最小值，此時中間重疊六邊形 GHIJKL 面積最大，且$\overline{DG}=\overline{GH}=\overline{HE}=\frac{a}{3}$。

引理二 正△ABC邊長為a，倒轉後為正△DEF，若兩正三角形以點對稱方式重疊(對稱中心為P)，中間重疊六邊形GHIJKL面積有最大值時，則$\overline{DG}=\overline{GH}=\overline{HE}=\frac{a}{3}$，此時六邊形GHIJKL為正六邊形。



[證明]設$\overline{DG}=x$，$\overline{GH}=y$，$\overline{HE}=z$

$x+y+z=a$，且x、y、$z>0$，由柯西不等式

$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(x+y+z)^2=a^2$

等號成立時

$\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\\x+y+z=a\end{cases}\Rightarrow x=y=z=\frac{a}{3}$ ，得證。

由以上兩個引理讓我們知道若想要找到最少顆數移動方法，則所框取中間的對稱六邊形(因為不一定剛好整數)範圍就必須要最大，我們想要找到其中所藏的規則，於是開始我們的研究。

二、探究 d=1 平面正三角形堆疊翻轉的問題，尋找其規律性：

(一)我在第 60 屆國小花蓮縣科展所做的研究結果

國小時，我與我的團隊觀察每一組三角形的圖形，並推論出第一個關係式：
(A+1)÷3=B…C，再透過觀察規則得到移動最少個數公式為：

$\frac{3B(B-1)}{2}+B(C+1)$，其中 A=層數，B 為除 3 的商，C 為餘數。

(二)利用國中所學嘗試驗證

首先將三角形數做以下分割，

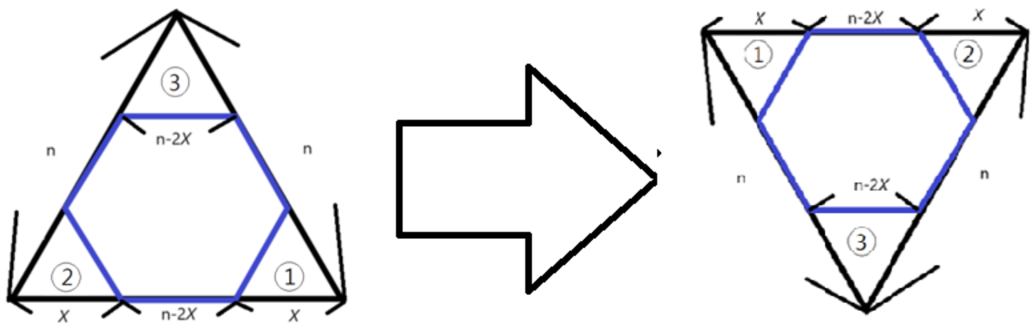


圖 5

1. 從移動方式中我們發現，最少移動顆數時三角形數兩底所移動個數方式相同，因此假設移動的兩三角形①和②的最下層顆數有x顆，因此定義移動總個數函數方程為

$f(x)=3x^2+2(1-n)x+\frac{n(n-1)}{2}$。

[證明]

圖形①②中個數為$\frac{x(x+1)}{2}$，圖形③個數$\frac{[1+(n-2x-1)](n-2x-1)}{2}=\frac{(n-2x)(n-2x-1)}{2}$，

$\Rightarrow f(x)=x(x+1)+\frac{(n-2x-1)(n-2x-1+1)}{2}=x^2+x+\frac{n^2-4nx+4x^2-n+2x}{2}$

$=3x^2+2(1-n)x+\frac{n(n-1)}{2}$，得證。

2. 由二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$在$x=\frac{-b}{2a}$時會產生極值可知，$x=\frac{n-1}{3}$時會有最少個數，但必須找出最靠近最小值的整數點，我們得到了結論:

(1) n 除以 3 餘 0 時，$x=\frac{n}{3}$代入$f(x)$，

$$f\left(\frac{n}{3}\right)=3\times(\frac{n}{3})^2+2\times(1-n)\times\frac{n}{3}+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{n^2}{3}+\frac{2n(1-n)}{3}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n}{6}=\frac{n(n+1)}{6}$$

(2) n 除以 3 餘 1 時，$x=\frac{n-1}{3}$代入$f(x)$，

$$f\left(\frac{n-1}{3}\right)=3\times(\frac{n-1}{3})^2+2\times(1-n)\times\frac{(n-1)}{3}+\frac{n(n-1)}{2}$$

$=\frac{(n-1)^2}{3}+\frac{2(1-n)(n-1)}{3}+\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{n^2-2n+1}{3}-\frac{2n^2-4n+2}{3}+\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{2n^2-4n+2-4n^2+8n-4+3n^2-3n}{6}=\frac{n^2+n-2}{6}=\frac{(n+2)(n-1)}{6}$

(3) n 除以 3 餘 2 時，$x=\frac{n-2}{3}$代入$f(x)$，

$f\left(\frac{n+1}{3}\right)=3\times(\frac{n-2}{3})^2+2\times(1-n)\times\frac{(n-2)}{3}+\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{(n-2)^2}{3}+\frac{2(1-n)(n-2)}{3}+\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{n^2-4n+4}{3}-\frac{2n^2-6n+4}{3}+\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{2n^2-8n+8-4n^2+12n-8+3n^2-3n}{6}=\frac{n^2-n}{6}=\frac{n(n-1)}{6}$

3. 我們得到了三種答案，由下表 1 可知，與我們國小觀察規則所得到的公式算式互相對照驗證完全相同。

	國中所得算式	國小研究結果算式$\frac{3B(B-1)}{2}+B(C+1)$
除以 3 餘數為 0 的狀況	$\frac{n(n+1)}{6}$	$\frac{3}{2}\times\frac{n}{3}\times\left(\frac{n}{3}-1\right)+\frac{n}{3}(1+1)=\frac{n^2+n}{6}$
除以 3 餘數為 1 的狀況	$\frac{(n+2)(n-1)}{6}$	$\frac{3}{2}\times\frac{n-1}{3}\times\left(\frac{n-1}{3}-1\right)+\frac{n-1}{3}(2+1)$ $=\frac{n^2+n-2}{6}$
除以 3 餘數為 2 的狀況	$\frac{n(n+1)}{6}$	$\frac{3}{2}\times\frac{n+1}{3}\times\left(\frac{n+1}{3}-1\right)+\frac{n+1}{3}(0+1)$ $=\frac{n^2+n}{6}$

表 1

三、探究公差變因$d \neq 1$之三角形堆疊翻轉問題，尋找其規律性：

(一)公差$d = 2$的三角形堆疊翻轉問題

研究過程中發現，公差$d = 2$時想移動最少顆數讓圖形顛倒，中間保留的圖形會有六邊形與八邊形兩種方式出現，如下圖 6、圖 7 所示：

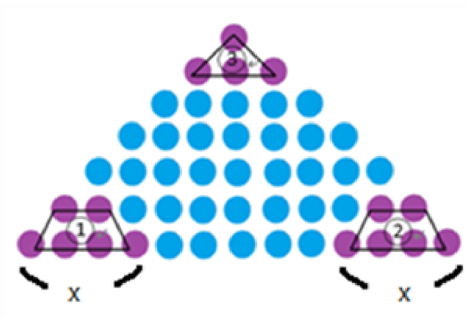


圖 6

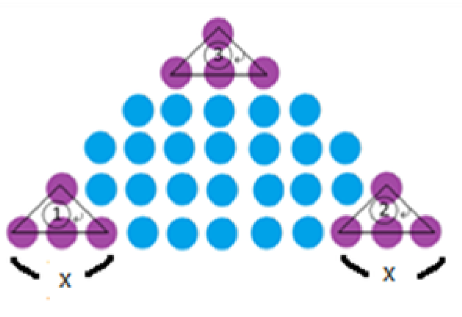


圖 7

而這兩種情況的發生規則如下：當 n 除以 3 的餘數為 0 時，中間保留的圖形是八邊形；當 n 除以 3 的餘數為 1、2 時，中間保留的圖形是六邊形，討論如下：

1. 當 n 除以 3 的餘數為 0 時

如圖 7，設底下移動兩個相同三角形區塊①和②最下層顆數皆有x顆，則可得移動總顆數函數$f(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + (n-x-1)^2$。

[證明]

三角形區塊①和②的層數有$\frac{x-1}{2} + 1 = \frac{x+1}{2}$層，

區塊③最下層顆數$= (2n-1) - 2x - 2 = 2n - 2x - 3$顆，

$\Rightarrow$層數$= \frac{(2n-2x-3)-1}{2} + 1 = n - x - 1$層，

$\Rightarrow f(x) = \frac{(1+x)(\frac{1+x}{2})}{2} \times 2 + \frac{[1+(2n-2x-3)](n-x-1)}{2}$

$=\frac{(x+1)^2}{2}+(n-x-1)^2$

$=\frac{x^2+2x+1}{2}+x^2+2x-2nx+n^2-2n+1$

$=\frac{x^2+2x+1+2(x^2+2x-2nx+n^2-2n+1)}{2}$

$$=\frac{3x^2+6x-4nx+2n^2-4n+3}{2}$$

$=\frac{3}{2}x^2+(3-2n)x+(n-1)^2+\frac{1}{2}$

接下來我們用$\mathrm{x}=\frac{2n-3}{3}$代入，得$f(x)$最小值：

$f(n，2)=f(\frac{2n-3}{3})=\frac{3}{2}\times\frac{(2n-3)^2}{9}-(2n-3)\times\frac{(2n-3)}{3}+(n-1)^2+\frac{1}{2}$

$=\frac{4n^2-12n+9}{6}-\frac{4n^2-12n+9}{3}+n^2-2n+\frac{3}{2}$

$=\frac{4n^2-12n+9-8n^2+24n-18+6n^2-12n+9}{6}$

$$=\frac{2n^2}{6}=\frac{n^2}{3}$$

2. 當 n 除以 3 的餘數為 1 或 2 時

如圖 6，同理可推得 $f(x)=\frac{x(x+2)}{2}+(n-x-1)^2$

$=\frac{x^2+2x}{2}+(x^2+2x-2nx+n^2-2n+1)$

$=\frac{x^2+2x+2\left(x^2+2x-2nx+n^2-2n+1\right)}{2}$

$=\frac{3x^2+6x-4nx+2n^2-4n+2}{2}$

$=\frac{3}{2}x^2+(3-2\mathrm{n})x+(n-1)^2$

因為函數最小值必須是整數，所以我們分成以下兩種情況討論：

(1)當 n 除以 3 的餘數是 1 時

$x=\frac{2n-2}{3}$時$f(x)$有最小值且為整數，得以下式子：

$f(n，2)=f\left(\frac{2n-2}{3}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{4(n-1)^2}{9}+(3-2n)\times\frac{2n-2}{3}+(n-1)^2$

$=\frac{2n^2-4n+2}{3}-\frac{4n^2-10n+6}{3}+\frac{3n^2-6n+3}{3}$

$=\frac{n^2-1}{3}=\frac{(n+1)(n-1)}{3}$

(2)當 n 除以 3 的餘數是 2 時

$x=\frac{2n-4}{3}$時$f(x)$有最小值且為整數，得以下式子：

$f(n，2)=f\left(\frac{2n-4}{3}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{4(n-2)^2}{9}-(2n-3)\times\frac{2n-4}{3}+(n-1)^2$

$=\frac{2n^2-8n+8}{3}-\frac{4n^2-14n+12}{3}+n^2-2n+1$

$=\frac{2n^2-8n+8-4n^2+14n-12+3n^2-6n+3}{3}=\frac{n^2-1}{3}=\frac{(n+1)(n-1)}{3}$

3. 小結

	$\mathrm{n}\equiv 0(mod3)$	$\mathrm{n}\equiv 1(mod3)$
$f(n,2)$	$\frac{n^2}{3}$	$\frac{(n+1)(n-1)}{3}$

表 2

(二)公差$\mathrm{d}=3$的三角形堆疊翻轉問題

研究過程中發現，公差$\mathrm{d}=3$時，移動最少顆數讓圖形顛倒中間保留的圖形會有兩種情況：

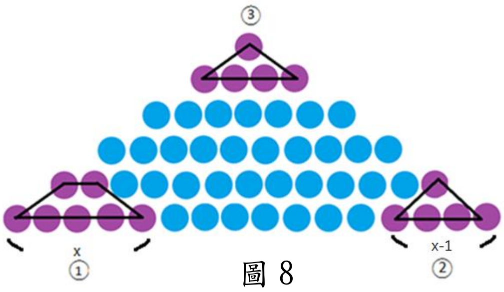


圖 8

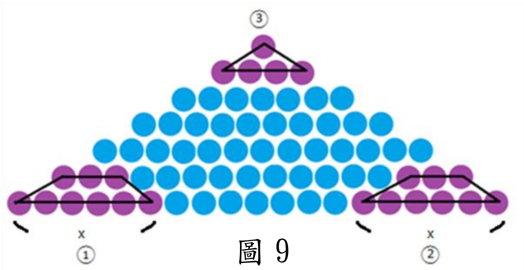


圖 9

1. 若$n\equiv 0(mod3)$時，如圖 8 中間保留的圖形不再是對稱六邊形(例如在 3 層時會是平行四邊形，其他層時八邊形)，其中一邊①的圖形為梯形，另一邊②的圖形是三角形，設②三角形最下層顆數有x顆，接下來我們列出移動總顆數方程式。

$\because$②有$\frac{x-1}{3}+1=\frac{x+2}{3}$層，$\therefore$②顆數有$\frac{(1+x)(x+2)}{6}$顆

又①的層數與②相同，$\therefore$①最底層顆數有$2+\left(\frac{x+2}{3}-1\right)3=x+1$顆

$\therefore$①總顆數有$\frac{[2+(x+1)](x+2)}{6}=\frac{(x+2)(x+3)}{6}$顆

$\Rightarrow f(x)=\frac{(x+2)(x+3)}{6}+\frac{(1+x)(x+2)}{6}+\frac{[1+(3n-2x-6)](3n-2x-4)}{6}$

$=\frac{2x^2+8x+8+4x^2+18x-12nx+9n^2-27n+20}{6}$

$=\frac{6x^2+26x-12nx+9n^2-27n+28}{6}=x^2+\frac{(13-6n)}{3}x+\frac{9n^2-27n+28}{6}$

x取$\frac{6n-13}{6}$時$f(x)$有最小值，但$f(x)$必須是整數$\Rightarrow$ x取$n-2$ 代入

$\Rightarrow f(n,3)=\frac{6n^2-24n+24-12n^2+50n-52+9n^2-27n+28}{6}$

$=\frac{3n^2-n}{6}=\frac{n(3n-1)}{6}$，得證。

2. 若$n\equiv 1\vee 2(mod3)$時，則中間保留的圖形會有對稱六邊形出現，如圖 9 中，①、②角落圖形皆為梯形，設①、②最下層顆數皆有x顆，同理可得移動總顆數方程：

$f(x)=\frac{x(x+3)}{3}+\frac{(3n-2x-3)(3n-2x-4)}{6}$

$=\frac{2x^2+6x+4x^2+14x-12nx+9n^2-21n+12}{6}$

$=\frac{6x^2+20x-12nx+9n^2-21n+12}{6}$

$=x^2+\frac{(10-6n)}{3}x+\frac{3n^2-7n+4}{2}$

x 取$\frac{6n-10}{6}$代入時會有最小值，但是不會是整數，所以我們列出兩個式子:

如果 n 除以 3 的餘數是 1 時，x 取$\frac{6n-6}{6}=n-1$(不取$\frac{6n-12}{6}$的原因是我們在畫圖時發現若把以 n 代入(n−2)時，發現跟原本實驗出來的 x 不相等，所以就用(n−1)來代入)。

同理將最接近$f(x)$最小值的整數值代入後整理結果如下：

$f(x)=(n-1)^2-\frac{(6n-10)(n-1)}{3}+\frac{3n^2-7n+4}{2}$

$=\frac{6n^2-12n+6-12n^2+32n-20+9n^2-21n+12}{6}$

$=\frac{3n^2-n-2}{6}=\frac{(n-1)(3n+2)}{6}$

如果 n 除以 3 的餘數是 2 時，x 取$\frac{6n-12}{6}=n-2$

同理將最接近$g(x)$最小值的整數值代入後整理結果如下：

小結：

	$n\equiv 0(mod3)$	$n\equiv 1(mod3)$	$n\equiv 2(mod3)$
x 值	x=n−2	x=n−1	x=n−2
$f(n,3)$	$\frac{n(3n-1)}{6}$	$\frac{(n-1)(3n+2)}{6}$	$\frac{(3n-4)(n+1)}{6}$

表 3

接下來我們繼續觀察並找出等差 4、5 的情況。

(三)公差$d=4$的三角形數翻轉問題

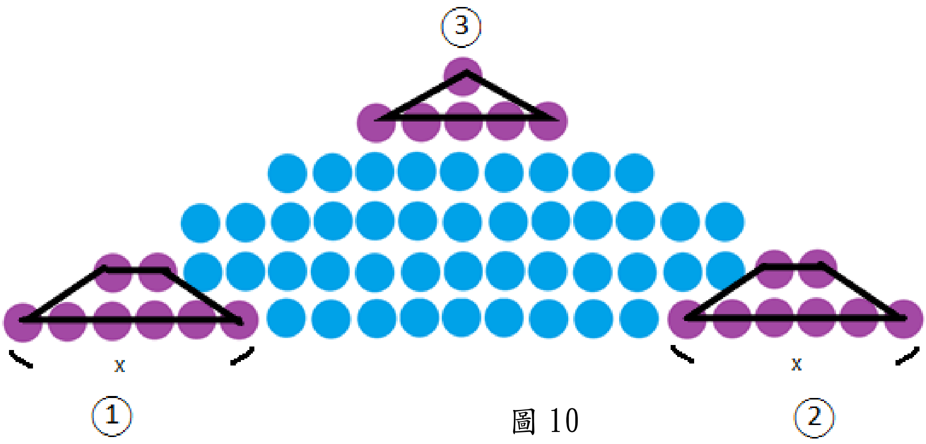


圖 10

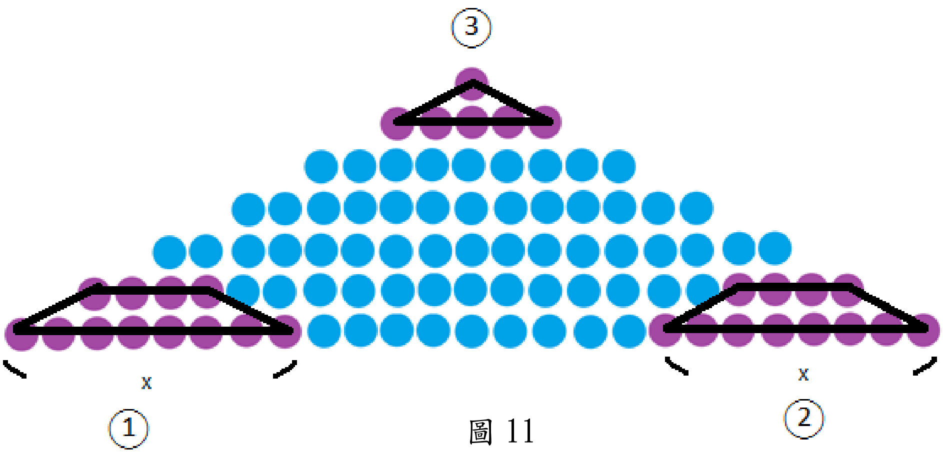


圖 11

1. 若$n\equiv 0(mod3)$時，中間保留的圖形是八邊形，①、②的上底為 2。設①、②下底為 x，則列出下列式子

$$f(x)=\frac{(\frac{4n-2x-7+3}{4})(4n-2x-6)}{2}+\frac{x+2}{4}(x+2)$$

$$=\frac{(4n-2x-4)(4n-2x-6)}{8}+\frac{(x+2)(x+2)}{4}$$

$$=\frac{4x^2+20x-16nx+16n^2-40n+24}{8}+\frac{(x+2)(x+2)}{4}$$

$$=\frac{4x^2+20x-16nx+16n^2-40n+24+2x^2+8x+8}{8}$$

$$=\frac{6x^2+28x-16nx-16n^2-40n+32}{8}$$

$$=\frac{3}{4}x^2+\frac{(7-4\mathrm{n})}{2}x+2n^2-5n+4$$

由上式可得知，在$x=\frac{4n-7}{3}$時會有最小值，但是在 n 除以 3 的餘數為零時，此數不會是整數，因此我們找了離此數最近的整數點$\frac{4n-6}{3}$，因此我們列出下列式子:

$$\mathrm{f}(\frac{4n-6}{3})=\frac{3}{4}\times\frac{4(2n-3)^2}{9}+\frac{(7-4n)}{2}\times\frac{2(2n-3)}{3}+\frac{6n^2-15n+12}{3}$$

$$=\frac{4n^2-12n+9}{3}-\frac{8n^2-26n+21}{3}+\frac{6n^2-15n+12}{3}$$

$$=\frac{4n^2-12n+9-8n^2+26n-21+6n^2-15n+12}{3}$$

$$=\frac{2n^2-n}{3}$$

$$=\frac{n(2n-1)}{3}$$

2. 當 n 除以 3 的餘數為 1、2，①、②的形狀會是上底為 4 的梯形。設①、②的下底為 x，得算式:

$$\mathrm{f(x)}=\frac{\frac{(4n-2x-4)}{4}(4n-2x-6)}{2}+\frac{x}{4}(x+4)$$

$$=\frac{(4n-2x-4)(4n-2x-6)}{8}+\frac{x(x+4)}{4}$$

$$=\frac{4x^2+20x-16nx+16n^2-40n+24}{8}+\frac{x^2+4x}{4}$$

$$=\frac{6x^2+28x-16nx+16n^2-40n+24}{8}$$

$$=\frac{3}{4}x^2+\frac{(7-4n)}{2}x+2n^2-5n+3$$

由上式可得知當$x=\frac{(4n-7)}{3}$時會有最小值，但是不一定是整數，所以我們分別列出兩種情況的式子:

3. 當 n 除以 3 的餘數是 1 時，離最小值最近的整數點是$x=\frac{4n-7}{3}$，不過當 n=4 時，x 會等於 3，但是我們找不到 x 會等於 3 的合理情況，所以我們使$x=\frac{4n-4}{3}$，得最小移動顆數：

$$f(\frac{4n-4}{3})=\frac{3}{4}\times\frac{16(n-1)^2}{9}-\frac{(4n-7)}{2}\times\frac{4n-4}{3}+2n^2-5n+3$$

$$=\frac{4(n-1)^2}{3}-\frac{(2n-2)(4n-7)}{3}+2n^2-5n+3$$

$$=\frac{4n^2-8n+4-8n^2+22n-14+6n^2-15+9}{3}$$

$$=\frac{2n^2-n-1}{3}=\frac{(2n+1)(n-1)}{3}$$

4. 當 n 除以 3 的餘數是 2 時，離最小值最近的整數點是$x=\frac{4n-8}{3}$，所以我們以$x=\frac{4n-8}{3}$代入式子，得最小移動顆數:

$$f\left(\frac{4n-8}{3}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{16(n-2)^2}{9}-\frac{(4n-7)}{2}\times\frac{4(n-2)}{3}+2n^2-5n+3$$

$$=\frac{4(n-2)^2}{3}-\frac{(2n-4)(4n-7)}{3}+\frac{6n^2-15n+9}{3}$$

$$=\frac{4n^2-16n+16-8n^2+30n-28+6n^2-15n+9}{3}$$

$$=\frac{2n^2-n-3}{3}$$

$$=\frac{(2n-3)(n+1)}{3}$$

5. 小結

	$n\equiv 0(\mathrm{mod}3)$	$n\equiv 1(\mathrm{mod}3)$	$n\equiv 2(\mathrm{mod}3)$
x 值	$\frac{4n-6}{3}$	$\frac{4n-4}{3}$	$\frac{4n-8}{3}$
f(n, 4)	$\frac{n(2n-1)}{3}$	$\frac{(2n+1)(n-1)}{3}$	$\frac{(2n-3)(n+1)}{3}$

表 5

(四)公差 $d=5$ 的三角形數翻轉問題

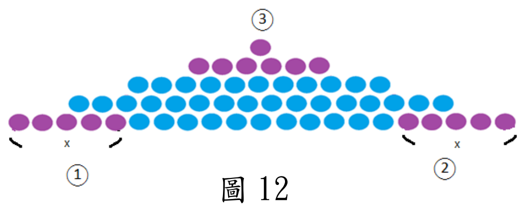


圖 12

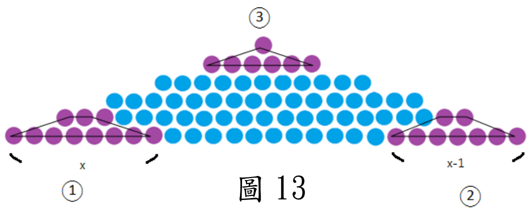


圖 13

1. 如圖 13，我們發現當 n 除以 3 的餘數是 0 時，中間保留的圖形會變成八邊形，①是上底為 3 的梯形，②是上底為 2 的梯形(或者對調)。藉此我們列出下列式子：

$$f(x)=\frac{(5n-2x-8+1)(\frac{5n-2x-4}{5})}{2}+\frac{(x+3)(\frac{x+2}{5})}{2}+\frac{(x+1)(\frac{x+2}{5})}{2}$$

$$=\frac{6x^2+30x-20nx+25n^2-55n+36}{10}$$

$$=\frac{3}{5}x^2+(3-2n)x+\frac{25n^2-55n+36}{10}$$

2. 如圖 12，我們發現 n 除以 3 的餘數是 1、2 時，中間保留的圖形會變成六邊形，①、②是上底為 5 的梯形。(或者對調)

$$f(x)=\frac{\frac{(5n-2x-4+4)}{5}(5n-2x-4+1)}{2}+\frac{x(x+5)}{5}$$

$$=\frac{(5n-2x)(5n-2x-4+1)+2x(x+5)}{10}$$

$=\frac{6x^2+16x-20nx+25n^2-15n}{10}$

$=\frac{3}{5}x^2+\frac{(8-10n)}{5}x+\frac{5n^2-3n}{2}$

接下來我們 x 取$\frac{5n-9}{3}$代入 f(x)，得下列式子:

$f(x)=\frac{3}{5}x^2\times\left(\frac{5n-9}{3}\right)^2-\frac{(2n-3)(5n-9)}{3}+\frac{25n^2-55n+36}{10}$

$=\frac{50n^2-180n+162-100n^2+330n-270+75n^2-165n+108}{30}$

$=\frac{25n^2-15n}{30}=\frac{n(5n-3)}{6}$

同理將最接近 $f(x)$最小值的整數值代入後整理結果如下：

3. 小結

	n≡ 0(mod3)	n ≡ 1(mod3)	n ≡ 2(mod3)
X 值	$\frac{5n-9}{3}$	$\frac{5n-5}{3}$	$\frac{5n-10}{3}$
f(n, 5)	$\frac{n(5n-3)}{6}$	$\frac{(5n+2)(n-1)}{6}$	$\frac{(5n-8)(n+1)}{6}$

表 6

(五)結論

依照上方的討論，我們將公式一般化整理如下(n 是層數，d 是公差)：

層數 n	n≡ 0(mod3)	n ≡ 1(mod3)	n ≡ 2(mod3)
公差 d	$\frac{[n(\mathrm{d}(\mathrm{n}-1)+2]}{6}$	$\frac{(\mathrm{n}-1)(\mathrm{dn}+2)}{6}$	$\frac{(\mathrm{n}+1)[d(\mathrm{n}-2)+2]}{6}$

表 8

四、探究立體正三角錐堆疊翻轉問題，尋找其規律性：

接下來是立體圖形，因為立體圖形翻轉以及移動球的方式不易觀察，我們嘗試用保麗龍球來做模型，也買了網路立體三角錐模組來觀察，其中在觀察每一層的構造時，發現三角錐圓球堆疊的組成會以 3 個一循環的型態重複出現，其中層數除 3 餘 1 的構造相同、除 3 餘 2 的構造相同、除 3 整除的構造相同，為了接下來研究方便，我們使用三視圖中的俯視圖來確認各球間的相對位置關係與層數，如圖 14，我們以(黑)、(紅)、(綠)三種顏色來區分這 3 種不同的構造，由最上層第一顆球開始分別以下列方式記錄。

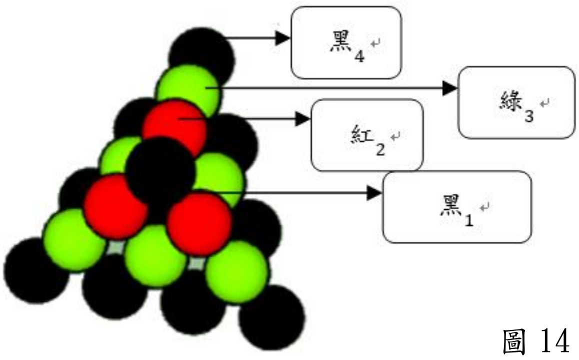
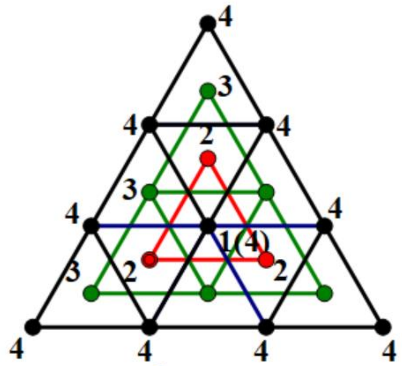


圖 14



俯視圖

(一)移動最少顆球的探討

1. 首先我們從四層 n=4 開始找起，雖然有許多種移動方法，發現最少移動個數都是 10 顆。

(方法 1)

如圖 15，將原本正立第四層的 4-1、4-2、…、4-5 五顆移給第三層使用變成倒立的第四層，正立第三層的一顆(3-1)移到右上角和第四層剩下的五顆合併成倒立後的第三層，而第一層和第二層直接移動顛倒，移動總顆數為$5+1+4=10$。

方法 1 策略主要是將底下最多顆數的兩層互換，盡量保留最多顆數不動，從圖中可發現不動的部分剛好構成兩個對稱梯形。

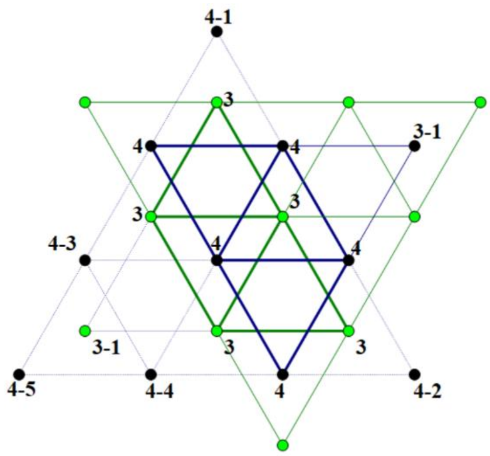


圖 15

（方法 2）

第四層不動，其他三層的球全部移動到下方，移動總顆數為 1+3＋6＝10。

方法 2 的策略是利用底層顆數最多全部不移動，將所有上層全部移動到下方。

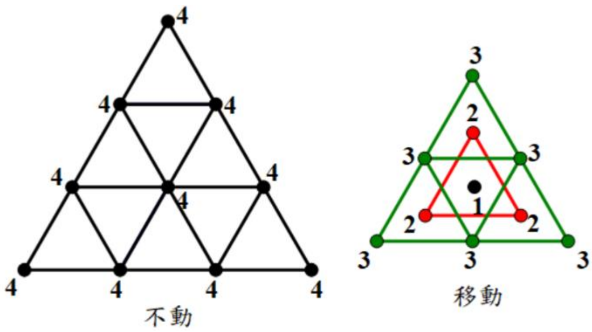


圖 16

2. 當 n=5 時，討論如下：

(1)<u>方法 1</u>：保留梯形法的移動顆數變成 21 顆，如下圖 17 所示：

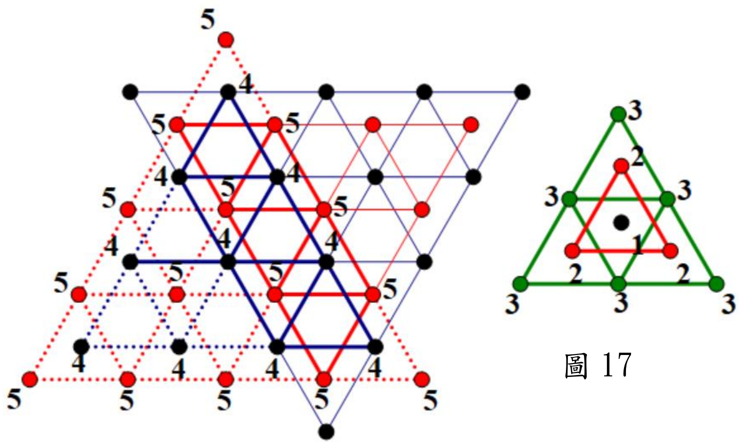


圖 17

(2)<u>方法 2</u>：保留底層法的移動顆數變成

1+3+6+10=20 顆。

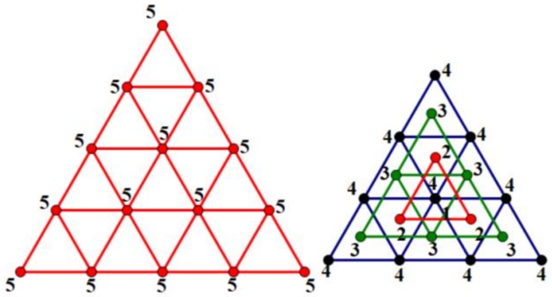
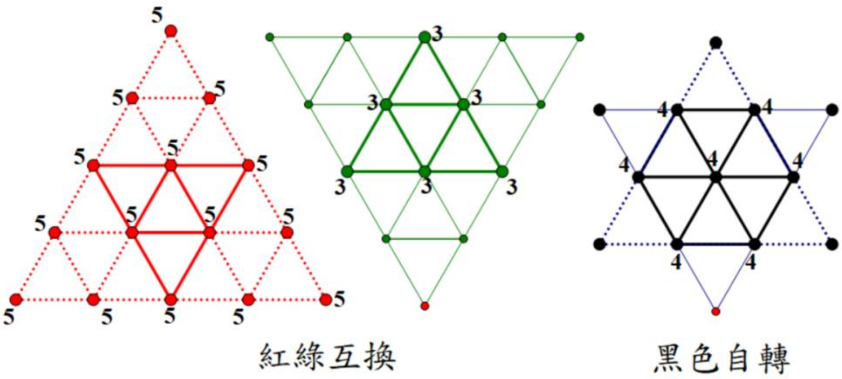


圖 18

(3)<u>方法 3</u>：讓中間構造保留越多顆，則移動會最少



18

圖 19

如圖 19，將原本正立第五層中的 9 顆移到第 3 層，讓第 3 層變成倒立第五層，而原先的第五層變成倒立第 3 層，第四層黑色自行移動 3 顆從正立變倒立，最後將 1、2 層挪移到最下方即可，因此移動的總顆數計算方式為$F(5)=3\times3+3+(1+3)=16$。合併結構圖如下所示：

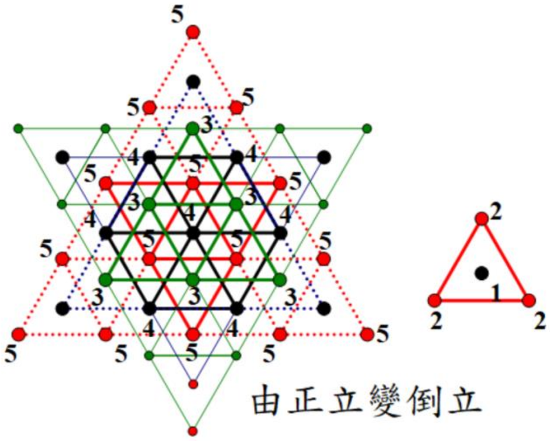
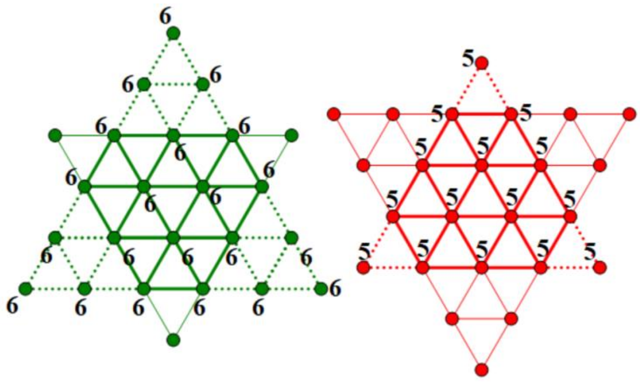


圖 20

3. 當 n=6 時，討論如下：

(1)方法 1：讓底下兩層互換，其他層全部搬動下方。



此時移動顆數為$3\times3+3+(1+3+6+10)=32$。

圖 21

(2)方法 2：讓底下五層互換，第一層搬到下方。

如圖 22，將原本正立 G_6 中的 18 顆移給 R_2，此時 R_2 變成倒立的第六層，而原先的 R_5 移 9 顆給 G_3，此時 G_3 變成倒立的第五層，B_4 自行移動 3 顆從正立變倒立，最後將第一層的 1 顆挪移到最下方即可，因此移動的總顆數計算方式為：

$F(6)=6\times3+3\times3+3+1=31$。

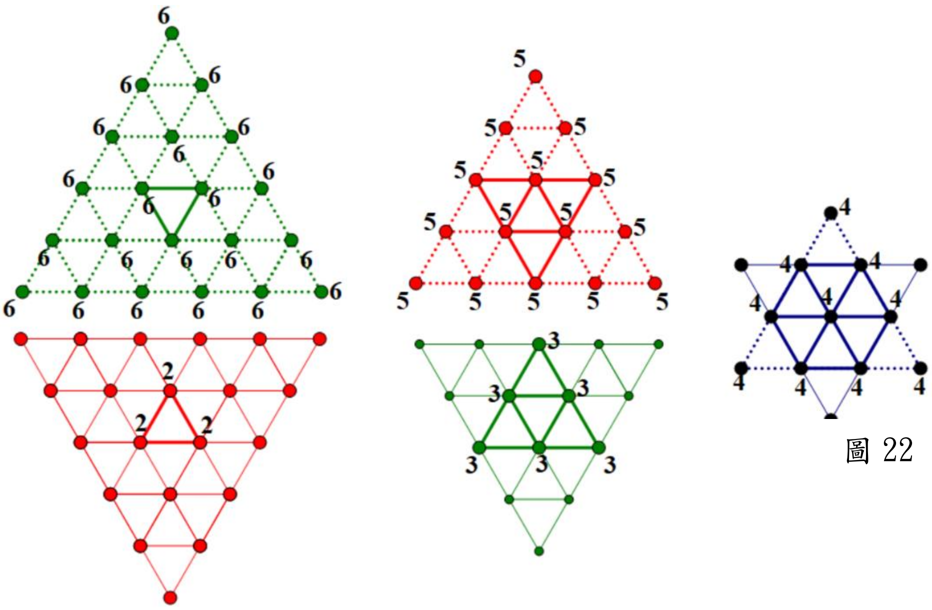


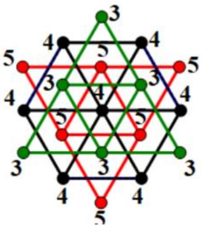
圖 22

二、尋找其中的規律

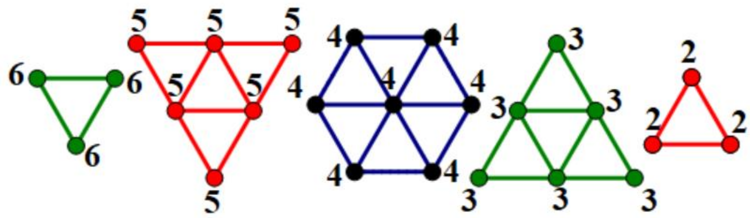
從此處我們發現了以下幾個特點：

1. 從正立變倒立過程中，若原本正立俯視圖為▲，當倒立俯視圖變為▼時可保留最多顆數不需移動，因為 R(紅)、G(綠)互換，能讓本體結構保留最多。

例：如下圖，由正立變倒立過程，本體中間保留了以下結構不需移動：



（n=5）



（n=6）

2. 互換過程中我們發現紅、綠層之間互換為最佳，因為將顆數多的那層借給顆數少的另一層時，彼此不但都可從正立變倒立，且可保留中間部分不需移動，如圖 19，R_5(紅)借給 G_3(綠)9 顆，R_5(紅)自己變為倒立第三層，G_3(綠)則變成倒立第五層。
3. 黑色層有兩種方式：讓它自轉或是和同色層互換可讓移動顆數較少，如圖 19、21。
4. 當層數$n \leq 4$時不適用此規則，原因是 4 層以前上面的總和≤底層，例如：

   當$n = 3 \Rightarrow 1 + 3 < 6$(底) ，當$n = 4 \Rightarrow 1 + 3 + 6 = 10$(底)。
5. 移動最少顆的問題可轉換為<u>不移動最多顆</u>的方向，為了接下來方便探討，我們以下列方式記錄最多不移動顆數，來反推最少移動個數：

(1)n=7 時，如下圖 23 所示：

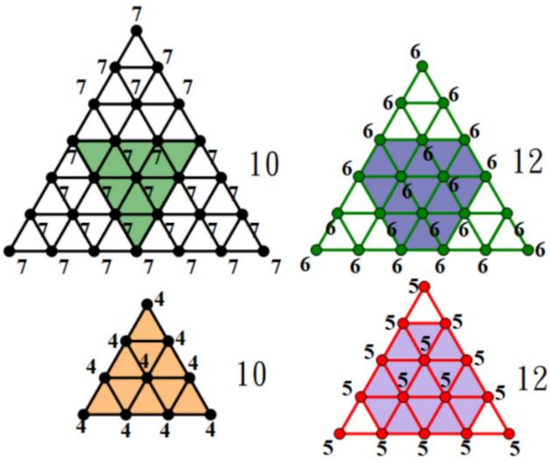


圖 23

圖中顏色區塊代表不需移動顆數，共有 44 顆，可推得$F(7)=\frac{7\times8\times9}{6}-44=40$。

(2)n=8 時，如下圖 24 所示：

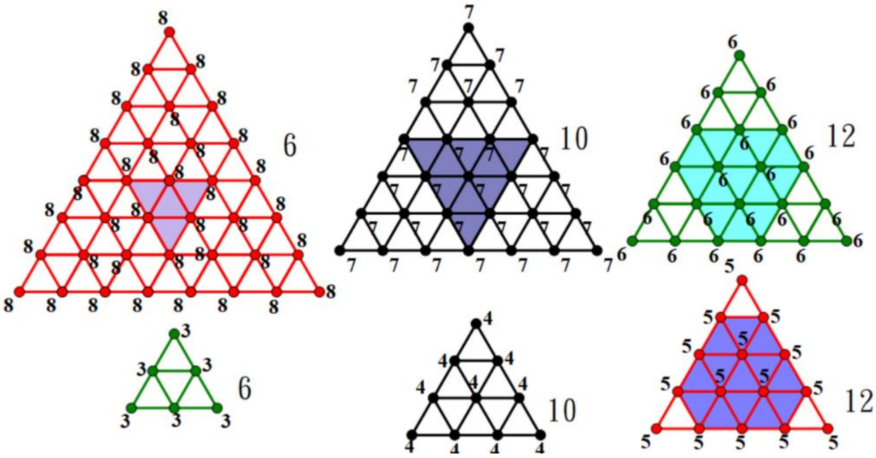


圖 24

不需移動顆數共有 56 顆，可推得$F(8)=\frac{8\times9\times10}{6}-56=64$。

(3)n=9 時，如下圖 25 所示：

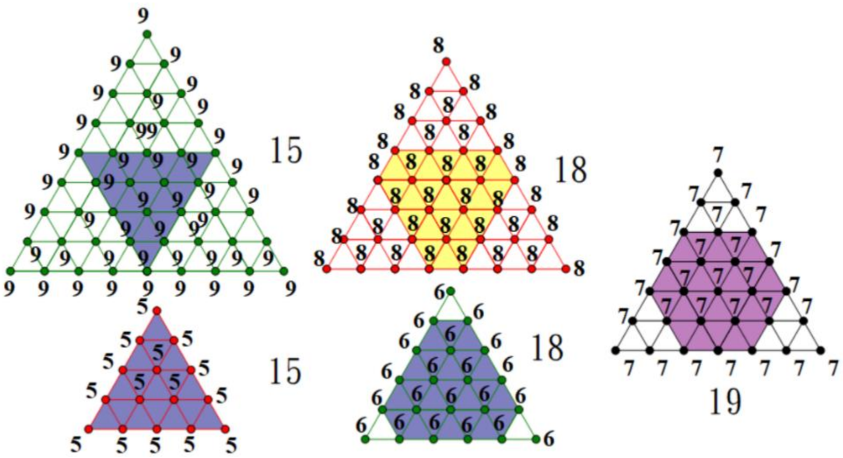


圖 25

不需移動顆數共有 85 顆，可推得$F(9)=\frac{9\times10\times11}{6}-85=80$。

(4)n=10 時，如下圖 26 所示：

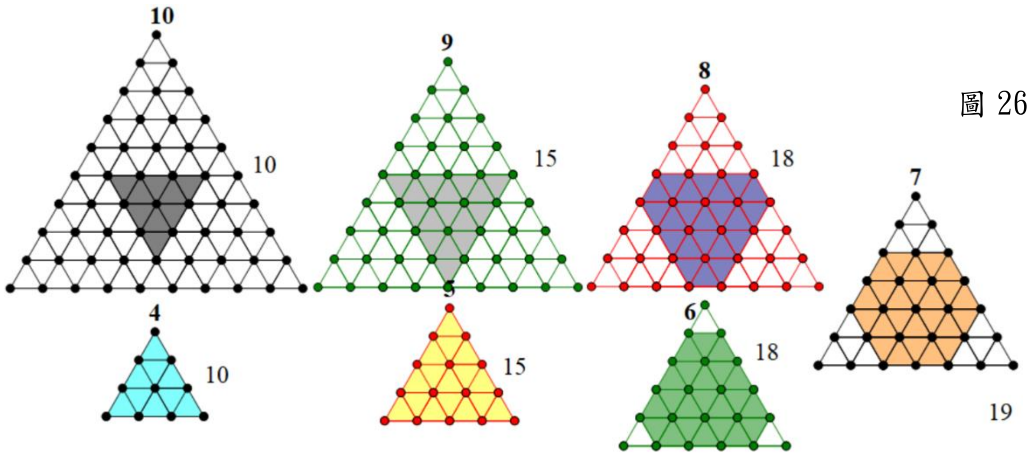


圖 26

不需移動顆數共有 105 顆，可推得$F(10)=\frac{10\times11\times12}{6}-105=115$。

(5)n=11 時，如下圖 27 所示：

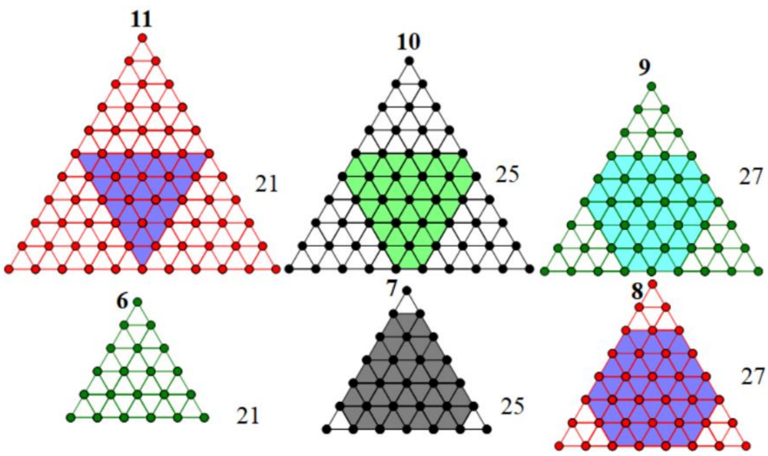


圖 27

不需移動顆數共有 146 顆，可推得$F(11)=\frac{11\times12\times13}{6}-146=140$。

(6)n=12 時，如下圖 28 所示：

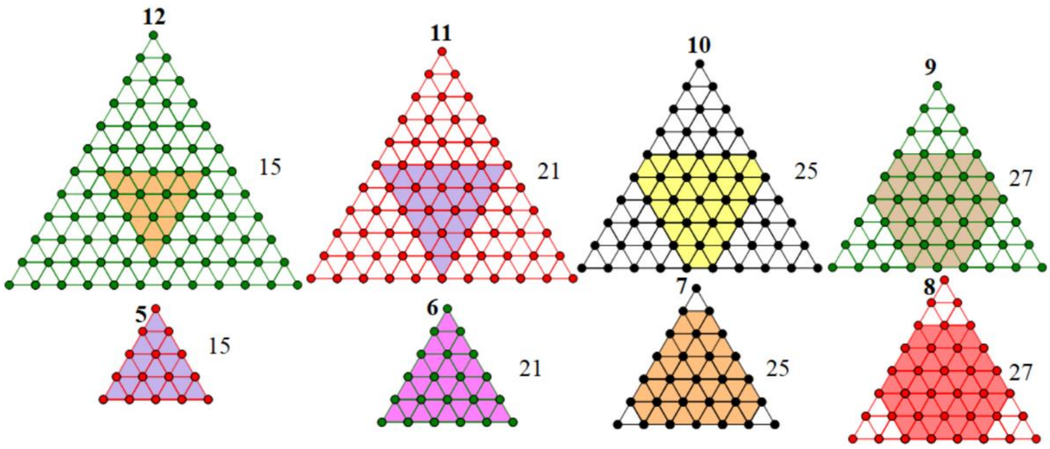


圖 28

不需移動顆數共有 176 顆，可推得$F(12)=\frac{12\times13\times14}{6}-176=188$。

(7)n=13 時，如下圖 29 所示：

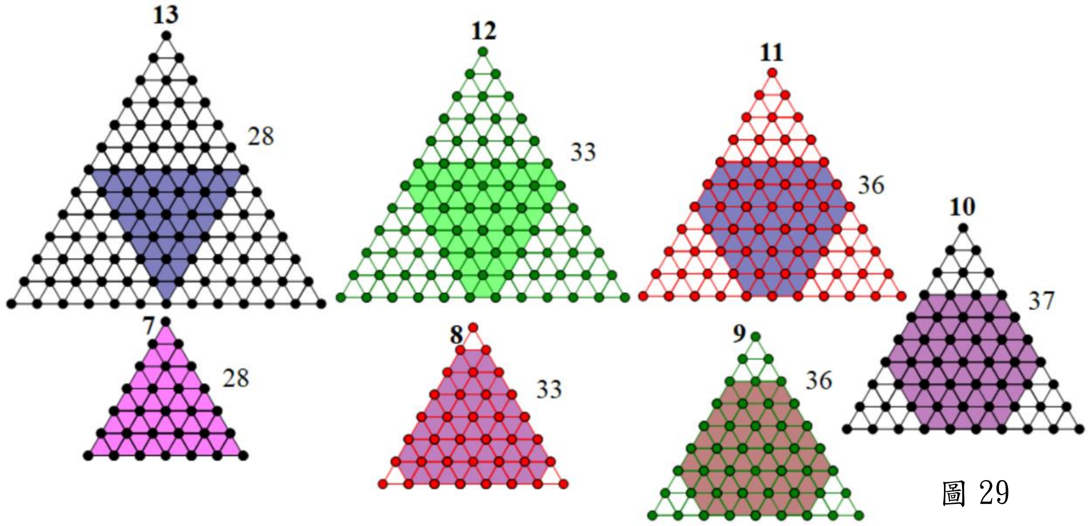


圖 29

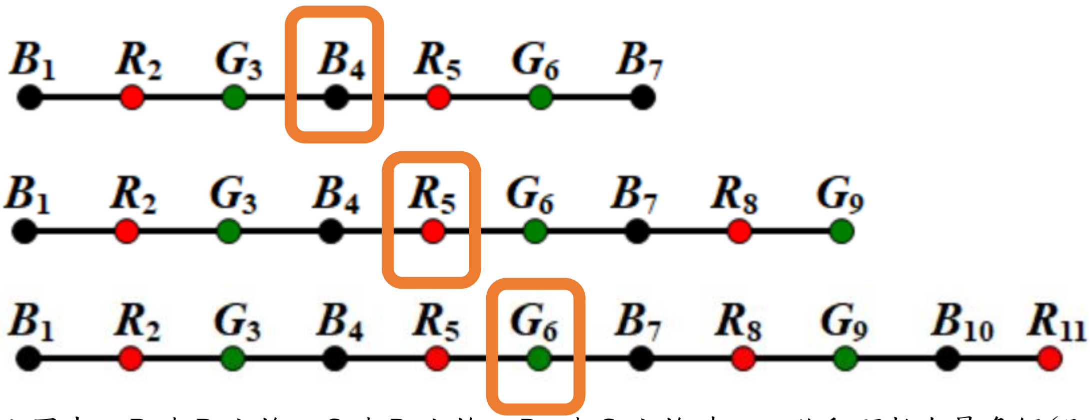
不需移動顆數共有 231 顆，可推得$F(13)=\frac{13\times14\times15}{6}-231=224$。

研究觀察發現：

(1)若n為奇數層，則最底層 R、G、B 剛好對應到中間點 G、R、B 時，此時不移動顆數可得最多解。

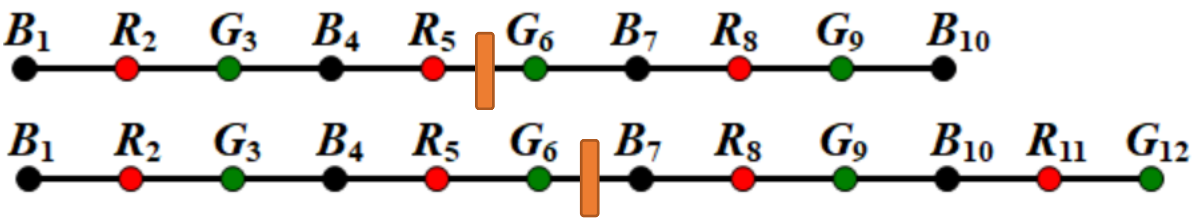
(2)若n為偶數層，則最底層 R、G、B 對應到中間軸左方第一個 G、R、B 時，此時不移動顆數可得最多解，往左、往右遞減。

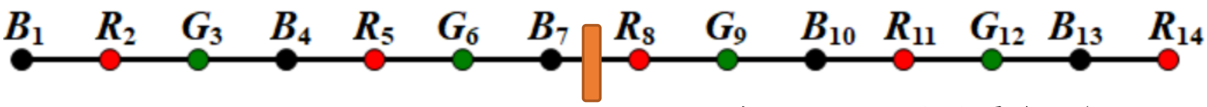
例：<u>奇數層</u>



上圖中，B_7與B_4交換，G_9與R_5交換，R_{11}與G_6交換時，不移動顆數有最多解(即可移動最少顆數使錐體顛倒)。

<u>偶數層</u>





如上圖，B_{10}與B_4交換，G_{12}與R_5交換，R_{14}與G_6交換時，不移動顆數有最多解(即可移動最少顆數使錐體顛倒)。

接下來我們先推導推導以下引理，嘗試算出不移動顆數的總和：

引理 3. 下圖中兩層互換時，若中間保留不移動部分之線對稱六邊形(或正三角形)的上底有x顆，兩層邊長顆數分別為a、b，則x、a、b間的關係式為$x-1=\frac{2a-b-1}{3}$。

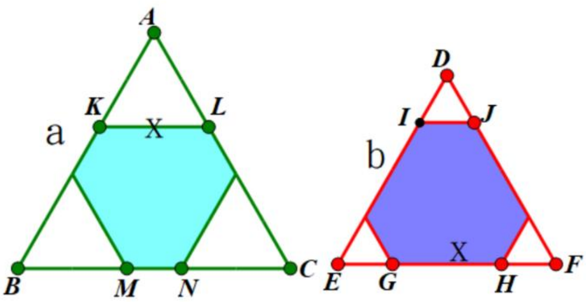


圖 30

[證明]

設$a \geq b$，$\overline{GH}$、$\overline{KL}$上皆有x顆，若在互換對調過程中塗色部分為全等不移動區塊

$\Rightarrow \overline{EG}(\text{不包含 G})+1=\overline{IJ}=\overline{MN}=\frac{b-x}{2}+1$顆

$$\Rightarrow \frac{a-(\frac{b-x}{2}+1)}{2}=x-1$$

$$\Rightarrow 2a-b+x-2=4x-4$$

$$\Rightarrow x=\frac{2a-b+2}{3}$$

$\Rightarrow x-1=\frac{2a-b-1}{3}$，得證。

有了引理 3，我們便可算出不移動區塊球的個數，得引理 4

引理 4. 如圖 30 兩層互換時，兩層邊長顆數分別為a、$b(a \geq b)$，則不移動顆數

(1)當$a \leq 2b-1$，有$\frac{-a^2+a+4ab-b^2+b+2}{6}$顆。

(2)當$a=b$，有$\frac{a^2+a+1}{3}$顆。

(3)當$a>2b-1$，有$\frac{(1+b)b}{2}$顆。

[證明]

(1)由引理 3 可得顏色區塊不移動顆數為：

$$\frac{(1+a)a}{2}-\frac{[1+\frac{2a-b-1}{3}](\frac{2a-b-1}{3})}{2}$$

$$=\frac{3a(a+1)-(2a-b+2)(2a-b-1)}{6}$$

$$=\frac{3a^2+3a-(2a-b)^2-(2a-b)+2}{6}$$

$$=\frac{-a^2+a+4ab-b^2+b+2}{6}$$

(2)當$a=b$時，代入上式可得$\frac{-2a^2+2a+4a^2+2}{6}=\frac{2a^2+2a+1}{6}=\frac{a^2+a+1}{3}$，得證。

為了接下來推導一般式計算方便，我們定義$a+b=m$，則上述不移動顆數可改為

$$=\frac{-a^2+a+4ab-b^2+b+2}{6}=\frac{-(2a-m)^2+m+2a(m-a)+2}{6}$$

$$=\frac{-4a^2+4am-m^2+m+2am-2a^2+2}{6}$$

$$=\frac{-6a^2+6am-(m-2)(m+1)}{6}$$

$$=a(m-a)-\frac{(m-2)(m+1)}{6}$$

(三)、推導一般式

有了引理 3 和 4 後，我們開始嘗試推導一般式，分成以下四種循環出現討論：

1. 當 n $\equiv 0$（mod4）

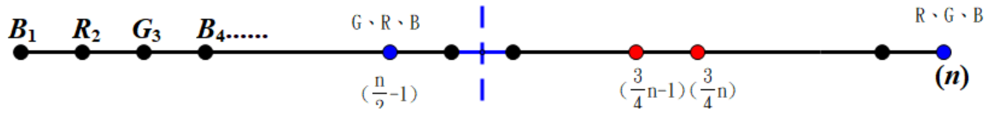


圖 31

若最底層依次為$\mathrm{R_n}$、$\mathrm{G_n}$、$\mathrm{B_n}$，則對應到中間軸左方的$\mathrm{R}_{\frac{n}{2}-1}$、$\mathrm{G}_{\frac{n}{2}-1}$、$\mathrm{B}_{\frac{n}{2}-1}$時，保留顆數可最多，兩兩一組配對剛好配完，例如:($\mathrm{R_n}$，$\mathrm{G}_{\frac{n}{2}-1}$)、($\mathrm{B_{n-1}}$，$\mathrm{B}_{\frac{n}{2}}$)……，此時$m=n+(\frac{n}{2}-1)$，$\therefore\frac{(m-2)(m+1)}{6}=\frac{3n(n-2)}{8}$，先算兩組中其中一組：

$$\sum_{a=\frac{3}{4}n}^{n}\left[a\left(\frac{3n-2}{2}\right)-a^2-\frac{3n(n-2)}{8}\right]$$

$$=\left(\frac{3n-2}{2}\right)\left(\frac{\left(\frac{3n}{4}+n\right)\left(\frac{n}{4}+1\right)}{2}\right)-\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(3n-2)(3n-4)}{64}\right]-\frac{3n(n-2)}{8}\left(\frac{n}{4}+1\right)$$

$$=\frac{7n(n+4)(3n-2)}{64}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(3n-2)(3n-4)}{64}-\frac{6n(n-2)(n+4)}{64}$$

$=\frac{n(3n-2)(10n+24)-6n(n-2)(n+4)}{64}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{8n^2(3n+5)}{64}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{3n^2(3n+5)-4n(n+1)(2n+1)}{24}$

$=\frac{9n^3+15n^2-4n(2n^2+3n+1)}{24}=\frac{n(n+4)(n-1)}{24}$，因為最後會上、下對稱出現，將結果乘 2，可得不移動總顆數為$\frac{n(n+4)(n-1)}{12}$。

2. 當 n $\equiv 2$（mod4）

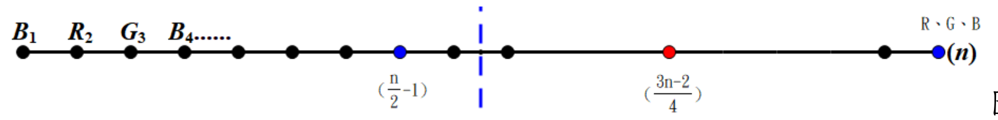


圖 32

同理，兩兩一組配對後，最後會剩中間的$B_{\frac{3n-2}{4}}$，

此時$m=n+(\frac{n}{2}-1)\therefore\frac{(m-2)(m+1)}{6}=\frac{3n(n-2)}{8}$，不移動總顆數一般式推導如下：

$$\sum_{a=\frac{3n+2}{4}}^{n}\left[a\left(\frac{3n-2}{2}\right)-a^2-\frac{3n(n-2)}{8}\right]$$

$$=\left(\frac{3n-2}{2}\right)\left(\frac{\left(\frac{7n+2}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}+1\right)}{2}\right)-\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(3n-2)(3n+2)}{64}\right]-\frac{3n(n-2)}{8}\left(\frac{n+2}{4}\right)$$

$$=\frac{(3n-2)(7n+2)(n+2)}{64}+\frac{n(3n-2)(3n+2)}{64}-\frac{6n(n-2)(n+2)}{64}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{(3n-2)(10n^2+18n+4)-6n(n-2)(n+2)}{64}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{12n^3+17n^2-4}{32}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{3(12n^3+17n^2-4)-16n(n+1)(2n+1)}{96}$$

$=\frac{4n^3+3n^2-16n-12}{96}=\frac{(n-2)(4n^2+11n+6)}{96}$將此結果乘 2 加上$B_{\frac{3n-2}{4}}$的不移動顆數，可得全部不移動顆數為：

$$\frac{(n-2)(4n^2+11n+6)}{48}+\left[\left(\frac{3n-2}{4}\right)^2-\frac{3n(n-2)}{8}\right]=\frac{4n^3+12n^2-16n}{48}=\frac{n^3+3n^2-4n}{12}=\frac{n(n+4)(n-1)}{12}$$ 。

3. 當 n $\equiv 1$（mod4）

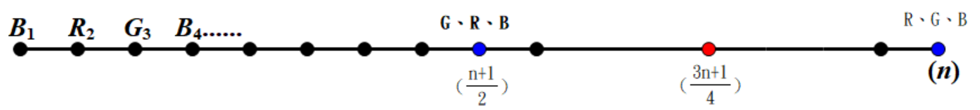


圖 33

兩兩一組配對後，最後會剩中間的$B_{\frac{3n+1}{4}}$，

此時$m=n+(\frac{n+1}{2})\therefore\frac{(m-2)(m+1)}{6}=\frac{3(n+1)(n-1)}{8}$，先算兩組成對的部分

$$\sum_{a=\frac{3n+5}{4}}^{n}\left[a\left(\frac{3n+1}{2}\right)-a^2-\frac{3(n+1)(n-1)}{8}\right]$$

$$=\left(\frac{3n+1}{2}\right)\left(\frac{\left(\frac{7n+5}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)}{2}\right)-\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)(3n+1)(3n+5)}{64}\right]-\frac{3(n+1)(n-1)}{8}\left(\frac{n-1}{4}\right)$$

$$=\frac{(3n+1)(7n+5)(n-1)+(3n+1)(3n+5)(n+1)-6(n+1)(n-1)^2}{64}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{(3n+1)[5n^2+3n]-3(n+1)(n-1)^2}{32}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{12n^3+17n^2+6n-3}{32}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$=\frac{4n^3+3n^2+2n-9}{48}$ 將此結果乘 2 加上$B_{\frac{3n+1}{4}}$的不移動顆數，可得全部不移動顆數為：

$$\frac{4n^3+3n^2+2n-9}{48}+\left[\left(\frac{3n+1}{4}\right)^2-\frac{3(n+1)(n-1)}{8}\right]=\frac{4n^3+12n^2+20n+12}{48}=\frac{n^3+3n^2+5n+3}{12}=\frac{(n+1)(n^2+2n+3)}{12}$$

4. n ≡ 3（mod4）

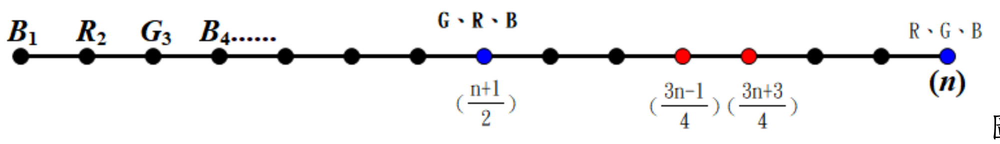


圖 34

同理，兩兩一組配對後剛好配完，推導不移動總顆數：

$$\sum_{a=\frac{3n+3}{4}}^{n}\left[a\left(\frac{3n+1}{2}\right)-a^2-\frac{3(n+1)(n-1)}{8}\right]$$

$$=\left(\frac{3n+1}{2}\right)\left(\frac{\left[\frac{3(n+1)}{4}+n\right]\left(\frac{n+1}{4}\right)}{2}\right)-\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)(3n-1)(3n+1)}{64}\right]-\frac{3(n+1)(n-1)}{8}\left(\frac{n+1}{4}\right)$$

$$=\frac{(3n+1)(7n+3)(n+1)+(n+1)(3n-1)(3n+1)-6(n+1)^2(n-1)}{64}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{(3n+1)(n+1)(10n+2)-6(n+1)^2(n-1)}{64}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(3n^2+2n+1)}{8}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$=\frac{3(n+1)(3n^2+2n+1)-4n(n+1)(2n+1)}{24}=\frac{(n+1)(n^2+2n+3)}{24}$將結果乘 2，

∴可得不移動總顆數$=\frac{(n+1)(n^2+2n+3)}{12}$ 。

伍、討論與結論

一、在平面正三角形n層堆疊翻轉的情況下，最少顆數$f(n)$，得知以下規律：

(一)當 n 除以 3 餘 0 時，$f(n)=\frac{n(n+1)}{6}$。

(二)當 n 除以 3 餘 1 時，$f(n)=\frac{(n+2)(n-1)}{6}$。

(三)當 n 除以 3 餘 2 時，$f(n)=\frac{n(n-1)}{6}$。

二、平面三角形上下層間公差$\mathrm{d}\neq 1$為變因在’n層堆疊翻轉的情況下，最少顆數$f(n,d)$，得知以下規律：：

(一)當$\mathrm{d}=2$，

1. 當 n 除以 3 餘 0 時，$f\left(n，2\right)=\frac{n^2}{3}$，中間不移動的圖形為八邊形。
2. 當 n 除以 3 餘 1 時，$f\left(n，2\right)=\frac{(n+1)(n-1)}{3}$，中間不移動的圖形為線對稱六邊形。
3. 當 n 除以 3 餘 2 時，$f\left(n，2\right)=\frac{(n+1)(n-1)}{3}$，中間不移動的圖形為線對稱六邊形。

(二)當$\mathrm{d}=3$

1. 當 n 除以 3 餘 0 時，$f\left(n，3\right)=\frac{n(3n-1)}{6}$，中間不移動的圖形 3 層時會是平行四邊形，其他層時為八邊形。
2. 當 n 除以 3 餘 1 時，$f\left(n，3\right)=\frac{(\mathrm{n}-1)(3\mathrm{n}+2)}{6}$，中間不移動的圖形為線對稱六邊形。
3. 當 n 除以 3 餘 2 時，$f\left(n，3\right)=\frac{(3n-4)(n+1)}{6}$，中間不移動的圖形為線對稱六邊形。

(三)當$\mathrm{d}=4$

1. 當 n 除以 3 餘 0 時，$f\left(n，4\right)=\frac{n(2n-1)}{3}$，中間不移動的圖形為線對稱八邊形
2. 當 n 除以 3 餘 1 時，$f\left(n，4\right)=\frac{(2n+1)(n-1)}{3}$，中間不移動的圖形為線對稱六邊形
3. 當 n 除以 3 餘 2 時，$f\left(n，4\right)=\frac{(2n-3)(n+1)}{3}$，中間不移動的圖形為線對稱六邊形

(四) 當$\mathrm{d}=5$

1. 當 n 除以 3 餘 0 時，$f\left(n，5\right)=\frac{n(5n-3)}{6}$，中間不移動的圖形為八邊*形*
2. 當 n 除以 3 餘 1 時，$f\left(n，5\right)=\frac{(5n+2)(n-1)}{6}$，中間不移動的圖形為線對稱六邊形
3. 當 n 除以 3 餘 2 時，$f\left(n，5\right)=\frac{(5n-8)(n+1)}{6}$，中間不移動的圖形為線對稱六邊形

（五）平面三角形上下層間硬幣個數公差d，最少顆數$f(n,d)$，我們推得一般式如下：

層數 n	$\mathrm{n}\equiv 0(\mathrm{mod}3)$	$\mathrm{n}\equiv 1(\mathrm{mod}3)$	$\mathrm{n}\equiv 2(\mathrm{mod}3)$
公差 d	$\frac{[n(\mathrm{d}(\mathrm{n}-1)+2]}{6}$	$\frac{(\mathrm{n}-1)(\mathrm{dn}+2)}{6}$	$\frac{(\mathrm{n}+1)[d(\mathrm{n}-2)+2]}{6}$

三、在立體正三角椎 n 層圓球堆疊($\mathrm{n}>4$)情況下，移動最少顆使其翻轉，若最少顆數為 $\mathrm{F}(n)$，則：

1. 當 $\mathrm{n}\equiv 0 \vee 2(\mathrm{mod}4)$時

$\mathrm{F}(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+4)(\mathrm{n}-1)}{12}=\frac{n(n^2+3n+8)}{12}$。

2. 當 $\mathrm{n}\equiv 1 \vee 3$（mod4）時

$\mathrm{F}(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}^2+2\mathrm{n}+3)}{12}=\frac{(n+1)(n+3)(n-1)}{12}$。

陸、參考文獻

一、國民中學數學課本第二冊、第五冊。

二、陳語謙。翻轉金字塔。花蓮縣第 59 屆國中小科展國小組數學科第一名。

三、網路參考資料 https://kknews.cc/zh-tw/education/4mmpjnv.html。