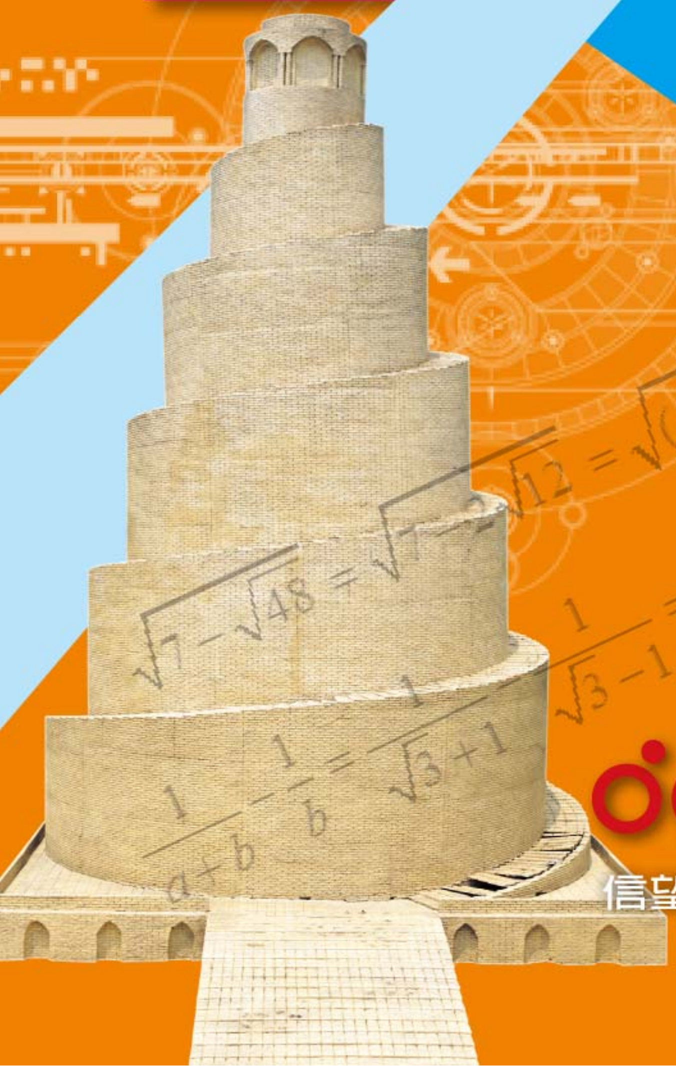
數學 3 進階講義

柯西不等式

成功高中 · 陳冠宏　老師



信望愛文教基金會

10-2-3　柯西不等式

定理敘述

➢ 柯西不等式

(1)向量式：$|\vec{a}||\vec{b}| \geq |\vec{a}\cdot\vec{b}|$，等號成立時，$\vec{a}//\vec{b}$

(2)代數式：$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

等號成立時，若$b_1b_2\neq 0$，則$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$

定理證明或說明

➢ 柯西不等式

(1)$\because |cos\theta| \leq 1$ $\therefore |\vec{a}||\vec{b}| \geq |\vec{a}||\vec{b}||cos\theta| = |\vec{a}\cdot\vec{b}|$

等號成立時，$|cos\theta| = 1 \Rightarrow cos\theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0°$或 $180°$

即$\vec{a},\vec{b}$的夾角為$0°$或 $180°$，故$\vec{a}//\vec{b}$

(2)設$\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$，承(1)可得

$\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq|a_1b_1+a_2b_2|$

兩邊平方可得$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

等號成立時，$\vec{a}//\vec{b}$，故若$b_1b_2\neq 0$，則$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$

關鍵字

柯西不等式

例題 1

已知$x^2+y^2-4x+8y-5=0$，試求 3x+4y-5 的最大值與最小值，並求此時的 x,y 之值

Ans： $x=5,y=0$有最大值 10； $x=-1,y=-8$有最小值-40

解：

$x^2+y^2-4x+8y-5=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+4)^2=25$

$((x-2)^2+(y+4)^2)(3^2+4^2) \ge (3(x-2)+4(y+4))^2$

$\Rightarrow 25\times 25 \ge (3x+4y+10)^2$

$\Rightarrow -25 \le 3x+4y+10 \le 25$

$\Rightarrow -40 \le 3x+4y-5 \le 10$

等號成立時：$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{4}$，令 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{4}=t$

則 $x=2+3t, y=-4+4t$

$3x+4y-5=-40 \Rightarrow 3(2+3t)+4(-4+4t)-5=-40 \Rightarrow t=-1$

$\therefore x=-1, y=-8$

$3x+4y-5=10 \Rightarrow 3(2+3t)+4(-4+4t)-5=10 \Rightarrow t=1$

$\therefore x=5, y=0$

例題 2

設$\vec{a}=(x,4),\ \vec{b}=(1,y)$，$x,y$ 均為正實數，且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值為____________

Ans：3

解：

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x+4y$

$[(\sqrt{x})^2+(2\sqrt{y})^2][(\sqrt{\frac{1}{x}})^2+(\sqrt{\frac{1}{y}})^2] \ge (1+2)^2$

$\Rightarrow 3(x+4y) \ge 9$，故$\vec{a}\cdot\vec{b} \ge 3$

例題 3

已知a、$b>0$，試求$(a+\frac{9}{b})(b+\frac{4}{a})$的最大值_______

Ans：25

解：$[(\sqrt{a})^2+(\frac{3}{\sqrt{b}})^2][(\frac{2}{\sqrt{a}})^2+(\sqrt{b})^2] \ge (2+3)^2=25$

例題 4

已知 θ 可為任意角度，試求 3sinθ+4cosθ 之範圍

Ans：-5≦3sinθ+4cosθ≦5

解：

$[(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2][(3)^2+(4)^2]\ge(3\sin\theta+4\cos\theta)^2$

$\Rightarrow 25\ge(3\sin\theta+4\cos\theta)^2 \Rightarrow -5\le 3\sin\theta+4\cos\theta\le 5$

例題 5

已知一直角△，兩股長分別 *a*, b，斜邊為 13，試求此三角形周長 s 的的最大值

Ans：$13+13\sqrt{2}$

解：

∵直角△$\Rightarrow a^2+b^2=169$

又$[a^2+b^2][1^2+1^2]\ge(a+b)^2 \Rightarrow -13\sqrt{2}\le a+b\le 13\sqrt{2}$

故周長 s=*a*+b+13 的最大值為$13+13\sqrt{2}$

例題 6

設 $P(x,y)$為直線 L：$4x+3y+5=0$ 上的動點，求$(x+1)^2+(y-3)^2$的最小值為____________

Ans：4

解：

（法一）

$[(x+1)^2+(y-3)^2][4^2+3^2]\ge[4(x+1)+3(y-3)]^2=(4x+3y-5)^2$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2\ge\dfrac{100}{25}=4$

（法二）

可視為直線上的點與(-1,3)之距離平方最小值

距離最小值即(-1,3)到直線 4x+3y+5=0 之距離=$\dfrac{|-4+9+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

故所求即$2^2=4$

溫故知新

習題 1

設實數 x, y 符合 $3x-4y=14$，求 $3x^2+4y^2$ 的最小值為____________

習題 2

設實數x, y滿足$x^2+4y^2=9$，則$3x+4y$的最小值為______

習題 3

設 $3x+2y=12$，其中 $x, y\in\mathbb{R}$，求 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ 發生最小值時，數對$(x,y)=$____________

習題 4

已知a、$b>0$，且$2a+b=5$，試求$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$的最小值____

習題 5

設x, y為任意實數，若$4(x-2)^2+9(y-1)^2=1$，求$8x-9y$的最小值_____

習題 6

設原點到直線 L：$\dfrac{1}{\sqrt{a}}x+\dfrac{2}{\sqrt{b}}y=4$ 的距離為 $d=\dfrac{k}{\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}}}$，則

(1)正數 $k=$____________；(2)若 $a+b=1$，則 d 之最大值為____________

習題 7 【指考乙 97】

兩向量以$\vec{a}$和$\vec{b}$表示，並以$\vec{a}\cdot\vec{b}$表示$\vec{a}$和$\vec{b}$的內積，以$|\vec{a}|, |\vec{b}|$分別表示$\vec{a}$和$\vec{b}$的長度，試問下列哪一個選項表示：「三角形兩邊中點的連線段與第三邊平行，且其長度為第三邊之半」？

解答與解析

習題 1：28

習題 2：$-3\sqrt{13}$

習題 3：(2,3)

習題 4：$\frac{8}{5}$

習題 5：2

習題 6：(1)4；(2) $\frac{4}{3}$

習題 7：(2)

解：(1) 表$\vec{a}$與$\vec{b}$垂直。

(2) 為正確答案。

(3) 為柯西不等式，對任意兩向量皆正確。

(4) 對任意兩向量皆正確。

(5) 為三角不等式，對任意兩向量皆正確。