中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030408

哇！這是什麼 5、4、3 啊！

學校名稱：桃園縣立大竹國民中學

作者：	指導老師：
國二 宋蕙君 國二 陳柏揚 國二 謝明君	黃世宏 林青昊

關鍵詞：　畢氏數、勾股弦、543

哇!這是什麼 5，4，3 啊!

摘要

國中數學第三冊 2-3 的主題是「勾股定理」，或稱「畢氏定理」。我們討論的主題為畢氏數中的整數解，先看連續奇數的和與畢氏數的關係，再從「勾股定理」做討論，把勾分成奇數與偶數分別討論，得到兩個公式，但發現所得的公式並無法涵蓋所有的畢氏數，進而發現直角三角形中只可能會有偶偶偶或偶奇奇兩種情形，因此發展出另一個通式可涵蓋上述兩個公式，然後研究出直角三角形三邊長中一定會有一邊為 3 或 4 或 5 的倍數，而當三邊長的最大公因數為 1 時，不一定恰有一數為質數。

壹、研究動機

這篇研究的動機，起於上學期在學勾股定理的時候，雖然上課時所教的內容都是圍繞著 $a^2+b^2=c^2$ 打轉，但是老師曾說過勾股定理中的 a,b,c 也就是所謂的畢氏數，有著很多奇妙的關係，有同學就在課堂上指出這幾組畢氏數(3，4，5)(5，12，13)(7，24，25)(9，40，41)中，a 都是連續的奇數，而 b,c 都剛好差 1，這是巧合還是有其他的原因，引起了我們的興趣，想看看到底可不可以找到其他的關係，因此我們以此內容來做研究，果然也找出不少驚奇的發現。

貳、研究目的

以畢氏定理為基礎，設法找出畢氏數中整數解的關係，再找出通則，進而研究直角三角形的三邊長中，其中一數是否一定會是誰的倍數？是否一定有質數？

參、研究設備及器材

紙，筆

肆、研究過程及方法

一.畢氏定理內容

(一)直角三角形中以直角邊為邊長的兩個正方形面積之和等於以斜邊為邊長之正方形的面積。

(二)直角三角形斜邊長度的平方等於兩個直角邊的長度平方和。

(三)一般而言，西方國家都用「畢達哥拉斯定理」(Pythagorean Theorem)此名稱。在我國，有時簡稱其為「畢氏定理」，有時亦用「商高定理」、「勾股定理」或「勾股弦定理」等名稱，在中國古代，此定理便已被發現，遠較畢氏為早。

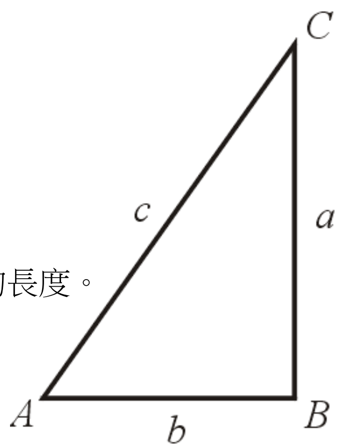
二.畢氏定理的解稱為畢氏數

(一)就是指滿足方程式$a^2+b^2=c^2$的正整數解(a，b，c)

(二)「畢氏定理」的表示法為 $a^2+b^2=c^2 \cdots\cdot(*)$

其中a與b表示直角三角形的二直角邊的長度，c表示斜邊的長度。

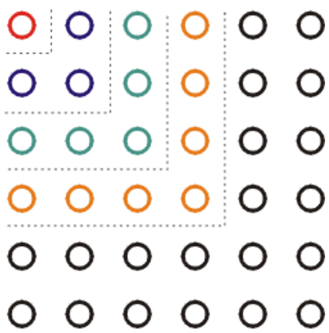
通常我們把方程式(*)的正整數解(a,b,c)稱為畢氏數。



三.連續奇數的和與畢氏數的關係

(一)首先我們從 1 加到 2*n*-1 如圖一

可得 $1+3+5+7+......+(2n-1)=n^2$



圖一

$1+3+5+7=4^2 \cdots\cdots\cdots$①

$1+3+5+7+9=5^2 \cdots\cdots$②

將①式代入②式

可得$4^2+9=5^2$ 即$4^2+3^2=5^2$

故 （4,3,5） 是一組畢氏數。

(二)我們再看一組

$1+3+5+7+......+23=12^2$ ··········③

$1+3+5+7+......+23+25=13^2$ ······④

將③式代入④式

可得$12^2+25=13^2$　即$12^2+5^2=13^2$

故　(12,5,13　)是一組畢氏數。

(三)看出來了嗎?我們再來看一組

$1+3+5+7+......+47=24^2$ ··········⑤

$1+3+5+7+......+47+49=25^2$ ······⑥

將⑤式代入⑥式

可得$24^2+49=25^2$　即$24^2+7^2=25^2$

故　(24,7,25　)是一組畢氏數。

(四)依同法可繼續推算至無限，故畢氏數有無數多組存在。

$1+3+5+7+......+(2n-3)+(2n-1)=n^2$ ··········⑦

$1+3+5+7+......+(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$ ··········⑧

將⑦式代入⑧式

可得$n^2+(2n+1)=(n+1)^2$　即和平方公式

推得畢氏數為 $\left(n,\sqrt{2n+1},n+1\right)$或$\left(\sqrt{2n+1},n,n+1\right)$

因為我們討論的是正整數解，所以上式中$(2n+1)$必須為完全平方數且為奇數

所以當

$(2n+1)=9$ ⇨ $n=4$ 得一組畢氏數為(4，3，5)

$(2n+1)=25$ ⇨ $n=12$ 得一組畢氏數為(12，5，13)

$(2n+1)=49$ ⇨ $n=24$ 得一組畢氏數為(24，7，25)

$(2n+1)=81$ ⇨ $n=40$ 得一組畢氏數為(40，9，41)

:

:

以此類推，整理得到下列畢氏數

(a ， b ，c)

(3 ， 4 ， 5)

(5 ， 12 ，13)

(7 ， 24 ，25)

(9 ， 40 ，41)
(11 ， 60 ，61)
(13 ， 84 ，85)
:
:

(五)我們觀察這些畢氏數有無特別規律，發現如下

1. a 為連續奇數

(3，5，7，9，11‧‧‧‧等差數列)

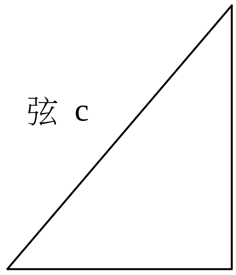
2. b 為二階等差數列

(4，12，24，40，60，84‧‧‧‧等差數列)

差為 8，12，16，20，24‧‧

3. $c = b + 1$ ⇨ 弦＝勾＋1

$a^2 + b^2 = c^2$
(股 勾 弦)



同時 $3^2 = 4 + 5$

$5^2 = 12 + 13$

$7^2 = 24 + 25$

$9^2 = 40 + 41$

可推得 $a^2 = b + c$ ⇨ 股的平方＝勾＋弦

四.思考

(一)上述的畢氏數弦、勾數皆差 1。

(二)如果想要求弦、勾數差 2 可做到嗎?

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + (2n-3) + (2n-1) + (2n+1) + (2n+3)$$
$$= 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + (2n-3) + (2n-1) + (2n+1) + [2(n+2) - 1] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$
$$= (n+2)^2$$

將⑨式代入⑩式

可得$n^2+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$

$n^2+4n+4=(n+2)^2$

推得畢氏數為 $(n,\sqrt{4n+4},n+2)$或$(\sqrt{4n+4},n,n+2)$

其中$(4n+4)$必須為完全平方數且為偶數

例：（8，15，17）（18，80，82）（24，143，145）（22，120，122）

（182 , 8280 , 8282）‧‧‧‧

(三)如果想要求弦、股數差 k 可做到嗎?

$$1+3+5+7+......+(2n-3)+(2n-1)=n^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

$$1+3+5+7+......+(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)+......+[2n+(2k-1)]$$
$$=1+3+5+7+......+(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)+......+[2(n+k)-1] \quad \cdots\cdots ⑫$$
$$=(n+k)^2$$

將⑪式代入⑫式

可得$n^2+(2n+1)+(2n+3)+......+[2n+(2k-1)]=(n+k)^2$

$n^2+2nk+k^2=(n+k)^2$

推得畢氏數為 $(n,\sqrt{2nk+k^2},n+k)$或$(\sqrt{2nk+k^2},n,n+k)$

其中$(2nk+k^2)$必須為完全平方數

例：弦、股數差 3

(9，12，15) (15，36，39) (21，72，75) (27，120，123)‧‧‧‧

例：弦、股數差 7

(21，28，35) (35，84，91) (49，168，175) (63，280，287)‧‧‧‧

因此不管弦、股數差多少都是可以做到的

五.我們來找找看是否會有符合 $a^2+b^2=c^2$ 的公式出現

(一)先從 a 為奇數或偶數來討論

1. a 為奇數

設 $a=2n+1$ (n=0、1、2、3‧‧) 代入 $a^2+b^2=c^2$

所以 $(2n+1)^2+b^2=c^2$

$(2n+1)^2=c^2-b^2$

$(2n+1)^2=(c+b)(c-b)$

$4n^2+4n+1=(c+b)(c-b)$

$\begin{cases} c+b=4n^2+4n+1 \\ c-b=1 \end{cases}$　　$\begin{cases} c+b=2n+1 \\ c-b=2n+1 \end{cases}$ (不合)　$\begin{cases} c+b=1 \\ c-b=4n^2+4n+1 \end{cases}$ (不合)

∵c、b 皆為正整數

∴c+b 一定大於 c-b

故　上面關係皆不合

將兩式相減得

$2b=4n^2+4n$

所以 $b=2n^2+2n$

$c=2n^2+2n+1$

但，n=0 時，a=1、b=0、c=1 (不合)

∴a 為大於等於 3 的奇數時，也就是 n 為正整數有以下公式

結論:　n 為正整數，$(2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1)$ 為一組畢氏數

『見參考資料(二)P236 第(3)式』

我們看看上述所說，當弦＝股＋1 時，勾的平方=股+弦 是否成立

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 &= 4n^2+4n+1 \\ &= (2n^2+2n)+(2n^2+2n+1)\end{aligned}$$ 得證

$n=1$　(3，4，5)

$n=2$　(5，12，13)

$n=3$　(7，24，25)

$n=4$　(9，40，41)

因此任給一個 n 都可得一組畢氏數且最小邊為奇數

例如　$n=27$　可得一組畢氏數 (55，1512，1513)

2. a 為偶數

設 $a=2n$ (n 為正整數)代入 $a^2+b^2=c^2$

所以 $(2n)^2+b^2=c^2$

⇨ $(2n)^2=c^2-b^2$

⇨ $4n^2=(c+b)(c-b)$

情況分別討論如下

情況 1

$$\begin{cases} c+b=4n^2 \\ c-b=1 \end{cases}$$

將兩式相減得 $2b=4n^2-1$

⇨ $b=\dfrac{4n^2-1}{2}$ ， $c=\dfrac{4n^2+1}{2}$

因為 c 與 b 皆為正整數

所以此組不合

情況 2

$$\begin{cases} c+b=n^2 \\ c-b=4 \end{cases}$$

將兩式相減得 $2b=n^2-4$

⇨ $b=\dfrac{n^2-4}{2}$ ， $c=\dfrac{n^2+4}{2}$ ，

當 n 為奇數，此時 c 與 b 不為整數

n 為偶數有解，但解不夠廣泛

且包含於情況 3 的解中【註 1】

情況 3

$$\begin{cases} c+b=2n^2 \\ c-b=2 \end{cases}$$

將兩式相減得 $2b=2n^2-2$

⇨ $b=n^2-1$ ， $c=n^2+1$ ，

當，n=1 時，a=2、b=0、c=2 (不合)

$n\geq 2$ 皆成立

情況 4

$$\begin{cases} c+b=4n \\ c-b=n \end{cases}$$

將兩式相減得 $2b=3n$

⇨ $b=\dfrac{3n}{2}$ ， $c=\dfrac{5n}{2}$ ，

當 n 為奇數，此時 c 與 b 不為整數

n 為偶數有解，

但解為(4、3、5)的倍數解

情況 5

$$\begin{cases} c+b=2n \\ c-b=2n \end{cases} \quad \begin{cases} c+b=n \\ c-b=4n \end{cases} \quad \begin{cases} c+b=1 \\ c-b=4n^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+b=2 \\ c-b=2n^2 \end{cases} \quad \begin{cases} c+b=4 \\ c-b=n^2 \end{cases}$$

∵c、b 皆為正整數　　∴c+b 一定大於 c-b

故　上面五種關係皆不合

【註 1】由情況 2 中，得解為 $(2n,\dfrac{n^2-4}{2},\dfrac{n^2+4}{2})$ 其中 n 為偶數，

令 n＝2s(s 為正整數)，得解為 $(2(2s),2(s^2-1),2(s^2+1))$ ，

又因為，情況 3 的解為 $\left(2n,n^2-1,n^2+1\right)$，

由以上可以很明顯看出，情況 2 的解為情況 3 的 2 倍解，
故　情況 2 的解包含於情況 3 的解中

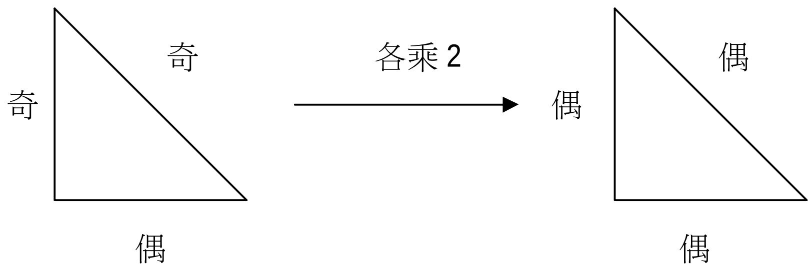
結論:　$n\geq 2,\left(2n,n^2-1,n^2+1\right)$ **為一組畢氏數**

$n=1$　(2，0，2)　不合　$\Rightarrow a\geq 4$
$n=2$　(4，3，5)
$n=3$　(6，8，10)
$n=4$　(8，15，17)
$n=5$　(10，24，26)
$n=6$　(12，35，37)
$n=7$　(14，48，50)
$n=8$　(16，63，65)

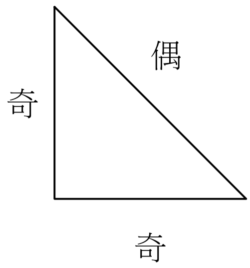
因此，任給一個 $n\geq 3$ 都可得一組畢氏數且最小邊為偶數
例如　$n=27$　可得一組畢氏數 (54，728，730)

(二)由三邊長為奇數或偶數來討論

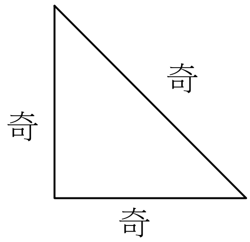
1.由 $\left(2n+1,2n^2+2n,2n^2+2n+1\right)$　$\left(2n,n^2-1,n^2+1\right)$ 可知符合畢氏定理整數解只有這兩種情形，我們從上述所說找到了兩個公式，但是(20，21，29)並不符合上面的公式，現在再找看看有沒有其他的想法。



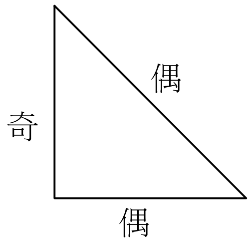
而沒有以下各情形



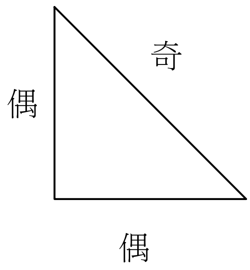
$a^2+b^2=c^2$ 中，若 a、b 為奇數，c 為偶數，
假設　a = 2k + 1、b = 2m + 1、c = 2n
　　　　(k、m、n 皆為正整數)
$(2k+1)^2 + (2m+1)^2 = (2n)^2$
$4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 4n^2$
4(n^2¡　k^2¡　k¡　m^2 - m) = 2
但又∵k、m、n 皆為正整數∴n^2¡　k^2¡　k¡　m^2¡　m 必為整數
所以 4(n^2¡　k^2¡　k¡　m^2 - m) ≠ 2　　故假設不成立



∵奇數的平方仍為奇數
∴奇數的平方＋奇數的平方
＝　　奇數　＋　　奇數
＝　　　　　偶數
又因為 斜邊為奇數　(矛盾)　　　故假設不成立



∵奇數的平方仍為奇數，偶數的平方仍為偶數
∴奇數的平方＋偶數的平方
＝　　奇數　＋　　偶數
＝　　　　　奇數
又因為 斜邊為偶數　(矛盾)　　　故假設不成立



∵奇數的平方仍為奇數，偶數的平方仍為偶數
∴偶數的平方＋偶數的平方
＝　　偶數　＋　　偶數
＝　　　　　偶數
又因為 斜邊為奇數　(矛盾)　　　故假設不成立

2.由上圖可知兩股必有一邊為偶數

不妨設b為偶數，我們再從畢氏定理看看有沒有新的發現

$$a^2+b^2=c^2$$

⇨ $b^2=c^2-a^2$

⇨ $b^2=(c+a)(c-a)$

⇨ $\frac{b^2}{4}=\frac{(c+a)(c-a)}{4}$

⇨ $\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{(c+a)}{2}\times\frac{(c-a)}{2}$

若(a ，b ，c)為畢氏數，則(ka ，kb ，kc)亦為畢氏數，k為任意正整數。

因此，令欲求的畢氏數滿足(a ，b ，c)=1，並不失一般性，

因為，c、a 為奇數且互質

得知 $\frac{(c+a)}{2}$與$\frac{(c-a)}{2}$必不相等且為整數

所以 $\frac{(c+a)}{2}$與$\frac{(c-a)}{2}$必為完全平方

⇨令$\frac{(c+a)}{2}=m^2$ ，$\frac{(c-a)}{2}=n^2$ ，其中$m>n$，

將$(c+a)=2m^2$，$(c-a)=2n^2$ 代入 $b^2=(c+a)(c-a)$

可得$b=2mn$

$$\begin{cases}\frac{c+a}{2}=m^2\\ \frac{c-a}{2}=n^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}c+a=2m^2\\ c-a=2n^2\end{cases}$$

將兩式相減得$2a=2m^2-2n^2$

$a=m^2-n^2$ ⇨ $c=m^2+n^2$

所以又找到一組畢氏數為$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$

結論: $(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$為一組畢氏數

『見参考資料(二)P247 第(4)式』

3.討論上面的公式：

要得到畢氏數　必須 m＞n

(m，n) $\Rightarrow$ $\left(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\right)$

若 m=2 ，

(2，1) ⇒ (3，4，5)

若 m=3 ，

(3，1) ⇒ (8，6，10)
(3，2) ⇒ (5，12，13)

若 m=4 ，

(4，1) ⇒ (15，8，17)
(4，2) ⇒ (12，16，20)
(4，3) ⇒ (7，24，25)

若 m=5 ，

(5，1) ⇒ (24，10，26)
(5，2) ⇒ (21，20，29)
(5，3) ⇒ (16，30，34)
(5，4) ⇒ (9，40，41)

若 m=6 ，

(6，1) ⇒ (35，12，37)
(6，2) ⇒ (32，24，40)
(6，3) ⇒ (27，36，45)
(6，4) ⇒ (20，48，52)
(6，5) ⇒ (11，60，61)

若 m=7 ，

(7，1) ⇒ (48，14，50)
(7，2) ⇒ (45，28，53)
(7，3) ⇒ (40，42，58)
(7，4) ⇒ (33，56，65)
(7，5) ⇒ (24，70，74)
(7，6) ⇒ (13，84，85)

若 m=8 ，

(8，1) ⇒ (63，16，65)
(8，2) ⇒ (60，32，68)
(8，3) ⇒ (55，48，73)
(8，4) ⇒ (48，64，80)
(8，5) ⇒ (39，80，89)
(8，6) ⇒ (28，96，100)
(8，7) ⇒ (15，112，113)

若 m=9 ，

(9，1) ⇒ (80，18，82)
(9，2) ⇒ (77，36，85)
(9，3) ⇒ (72，54，90)
(9，4) ⇒ (65，72，97)
(9，5) ⇒ (56，90，106)
(9，6) ⇒ (45，108，117)
(9，7) ⇒ (32，126，130)
(9，8) ⇒ (17，144，145)

若 m=10 ，

(10，1) ⇒ (99，20，101)
(10，2) ⇒ (96，40，104)
(10，3) ⇒ (91，60，109)
(10，4) ⇒ (84，80，116)
(10，5) ⇒ (75，100，125)
(10，6) ⇒ (64，120，136)
(10，7) ⇒ (51，140，149)
(10，8) ⇒ (36，160，164)
(10，9) ⇒ (19，180，181)

若 m=11 ，

(11，1) ⇒ (120，22，122)
(11，2) ⇒ (117，44，125)
(11，3) ⇒ (112，66，130)
(11，4) ⇒ (105，88，137)
(11，5) ⇒ (96，110，146)
(11，6) ⇒ (85，132，157)
(11，7) ⇒ (72，154，170)
(11，8) ⇒ (57，176，185)
(11，9) ⇒ (40，198，202)
(11，10)⇒ (21，220，221)

整理以上資料

(2,1)、(3,2)、(4,3)、(5,4)、(6,5)、(7,6)、(8,7)、(9,8)、(10,9)、(11,10)

這些數剛好與$\left(2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1\right)$所求出的解相同

(2,1)、(3,1)、(4,1)、(5,1)、(6,1)、(7,1)、(8,1)、(9,1)、(10,1)、(11,1)

這些數剛好與$\left(2n, n^2-1, n^2+1\right)$所求出的解相同

其他解

(5，2) $\Rightarrow$ (21，20，29)

(7，2)

(7，4)

(8，3)

(8，5)

(9，2)

(9，4)

(10，3)

(10，7)

(11，2)

(11，4)

(11，6)

(11，8)

倍數解

(m,n)$\neq$1

(5，3) $\Rightarrow$ (16，30，34)為(4，1)解的兩倍

(7，5)

(9，7)

(11，9)

(7，3)

(9，5)

(11，3)

(11，5)

(11，7)

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & (11,11) \\
 & & & & & & & & & (10,10) & (11,10) \\
 & & & & & & & & (9,9) & (10,9) & (11,9) \\
 & & & & & & & (8,8) & (9,8) & (10,8) & \boxed{(11,8)} \\
 & & & & & & (7,7) & (8,7) & (9,7) & \boxed{(10,7)} & (11,7) \\
 & & & & & (6,6) & (7,6) & (8,6) & (9,6) & (10,6) & \boxed{(11,6)} \\
 & & & & (5,5) & (6,5) & (7,5) & \boxed{(8,5)} & (9,5) & (10,5) & (11,5) \\
 & & & (4,4) & (5,4) & (6,4) & \boxed{(7,4)} & (8,4) & \boxed{(9,4)} & (10,4) & \boxed{(11,4)} \\
 & & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) & (7,3) & \boxed{(8,3)} & (9,3) & \boxed{(10,3)} & (11,3) \\
 & (2,2) & (3,2) & (4,2) & \boxed{(5,2)} & (6,2) & \boxed{(7,2)} & (8,2) & \boxed{(9,2)} & (10,2) & \boxed{(11,2)} \\
(1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) & (7,1) & (8,1) & (9,1) & (10,1) & (11,1)
\end{array}\right)
$$

由以上可以發現：

1.紅線部分與 $(2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1)$ 的解 相同

2.藍色部分與 $(2n, n^2-1, n^2+1)$ 的解 相同

3.紅線與藍線中間黃色部分，如果(m,n)=1 且 m、n 為一奇一偶，

可以得到不為倍數關係的其他解。

PS：其他解中為什麼除了(m,n)=1 外且要 m、n 為一奇一偶，

因為如果 m、n 皆為奇數，$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2) \Rightarrow$ (偶數、偶數、偶數) 為倍數解

由以上我們找到的每一組畢氏數中恰好發現，必有一數為 3 的倍數，必有一數為 4 的倍數，必有一數為 5 的倍數，這到底是巧合嗎?還是正確的呢?我們討論如下

六.所有畢氏數中，至少有一個數字為 3 的倍數

任意數 n 與 3 可以表示成以下的關係:

n:

除以 3餘 0 $\Rightarrow n=3k$

除以 3餘 1 $\Rightarrow n=3k+1$

除以 3餘 2 $\Rightarrow n=3k+2$

n^2:

$n^2=(3k)^2=9k^2=3(3k^2) \Rightarrow$ 除以 3餘 0

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1 \Rightarrow$ 除以 3餘 1

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1 \Rightarrow$ 除以 3餘 1

說明:

假設 $a^2+b^2=c^2$ 中 a、b、c 皆不為 3 的倍數

因此，a^2+b^2 除 3 的餘數為 1+1=2，但 c^2 的餘數不可能為 2　　矛盾

故 a、b、c 中必有一數為 3 的倍數

七.所有畢氏數中，至少有一個數字為 5 的倍數

任意數 n 與 5 可以表示成以下的關係:

n:

除以5餘0 $\Rightarrow n=5k$

除以5餘1 $\Rightarrow n=5k+1$

除以5餘2 $\Rightarrow n=5k+2$

除以5餘3 $\Rightarrow n=5k+3$

除以5餘4 $\Rightarrow n=5k+4$

n^2:

$n^2=(5k)^2=25k^2=5(5k^2)\Rightarrow$ 除以5餘0

$n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1\Rightarrow$ 除以5餘1

$n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4\Rightarrow$ 除以5餘4

$n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4\Rightarrow$ 除以5餘4

$n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1\Rightarrow$ 除以5餘1

說明:

假設 $a^2+b^2=c^2$ 中 a、b、c 都不為 5 的倍數

(一) 若 a^2 與 b^2 除以 5 皆餘 1

則，a^2+b^2 除以 5 的餘數為 1+1=2，但 c^2 的餘數不可能為 2　矛盾

(二) 若 a^2 與 b^2 除以 5 皆餘 4

則，a^2+b^2 除以 5 的餘數為 3 (4+4=8， 8-5=3)，但 c^2 的餘數不可能為 3　矛盾

(三) 若 a^2 與 b^2 除以 5 餘分別為 1、4

則，a^2+b^2 除以 5 的餘數為 0 (1+4=5， 5-5=0)，但 c 不為 5 的倍數　矛盾

故　a、b、c 中必有一數為 5 的倍數

八.所有畢氏數中，至少有一個數字為 4 的倍數

任意數 n 與 4 可以表示成以下的關係:

n:

除以4餘0 $\Rightarrow n=4k$

除以4餘1 $\Rightarrow n=4k+1$

除以4餘2 $\Rightarrow n=4k+2$

除以4餘3 $\Rightarrow n=4k+3$

n^2:

$n^2=(4k)^2=16k^2=4(4k^2)\Rightarrow$ 除以 4餘 0

$n^2=(4k+1)^2=16k^2+8k+1=4(4k^2+2k)+1\Rightarrow$ 除以 4餘 1

$n^2=(4k+2)^2=16k^2+16k+4=4(4k^2+4k+1)\Rightarrow$ 除以 4餘 0

$n^2=(4k+3)^2=16k^2+24k+9=4(4k^2+6k+2)+1\Rightarrow$ 除以 4餘 1

說明:

$a^2+b^2=c^2$ 中，畢氏數 a、b、c 三數的關係為

(一) 一偶二奇時

1.若 c 為偶數，a、b 為奇數

則，a^2+b^2 除以 4 的餘數為 1+1=2，但 c^2 的餘數為 0 (矛盾) 故 c 不為偶數

2.若 a 為偶數

$a^2=(c\text{-}b)(c+b) \quad \Rightarrow \quad (\frac{a}{2})^2=\frac{(c\text{-}b)}{2}\times\frac{(c+b)}{2}$

若 $\frac{(c\text{-}b)}{2}$ ，$\frac{(c+b)}{2}$ 皆為奇數，則 $\frac{(c\text{-}b)}{2}+\frac{(c+b)}{2}=c$ 為偶數 (矛盾)

所以 $\frac{(c\text{-}b)}{2}$ ，$\frac{(c+b)}{2}$ 有一數為偶數

$\Rightarrow (\frac{a}{2})^2$ 為偶數 $\Rightarrow$ a 為 4 的倍數

3.若 b 為偶數

同上 $\Rightarrow$ b 為 4 的倍數

(二) 三偶時

畢氏數 a、b、c 三數同除以 2 $\Rightarrow$ $\frac{a}{2}$、$\frac{b}{2}$、$\frac{c}{2}$

可得 $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2$ 也是畢氏數

由畢氏數 a、b、c 三數的關係為 一偶二奇 或 三偶

可知 $\frac{a}{2}$、$\frac{b}{2}$ 中一定有一數是偶數

所以 a、b 中一定有一數為 4 的倍數

伍、研究結果

研究內容	連續奇數的和與畢氏數的關係
研究結果	$n\ge 4$且n,k皆為正整數$\Rightarrow\left(\sqrt{2nk+k^2},n,n+k\right)$為畢氏數 其中 $2nk+k^2$ 為完全平方數

研究內容	奇數與偶數與畢氏數的關係
研究結果	奇數: n 為正整數，$\left(2n+1,2n^2+2n,2n^2+2n+1\right)$為一組畢氏數 偶數: $n\ge 2,\left(2n,n^2-1,n^2+1\right)$為一組畢氏數

研究內容	兩股必有一邊為偶數與畢氏數的關係
研究結果	m＞n，$\left(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2\right)$為一組畢氏數 並且，若(m,n)=1 且 m、n 為一奇一偶，可以得到不為倍數關係的解。

研究內容	畢氏數與 3、4、5 的關係
研究結果	所有畢氏數中，至少有一個數字為 3 的倍數 所有畢氏數中，至少有一個數字為 4 的倍數 所有畢氏數中，至少有一個數字為 5 的倍數

陸、討論

在這次研究中，我們遇到許多瓶頸，例如：研究初期，我們藉由奇數與偶數找出畢氏數中整數解的關係有①：$\left(2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1\right)$ 與 ②：$\left(2n, n^2-1, n^2+1\right)$這兩個公式，但是(20，21，29)並不符合上面的公式，經過一番討論、研究與資料查詢後，我們終於發現另外一個公式③：$\left(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\right)$，再由最原始的方式(帶入數字)去探討是否存在著規律性，也意外發現了許多有趣的結果，①、②為③之特例，①為③中 m＝n＋1 之解，②為③中 n＝1 之解。

在觀察過很多組的畢氏數後，也發現在同一組的畢氏數中，必有一數為 3 的倍數、必有一數為 4 的倍數、必有一數為 5 的倍數。

之後我們曾討論過若(a,b,c)=1 的畢氏數是否至少有一個是質數？但因為發現了好幾組的例外，所以也就沒有繼續的討論下去。

例 1　$(36,77,85)$ ⇨ $36=2^2\times3^2$ ；$77=7\times11$ ；$85=5\times17$

例 2　$(161,240,289)$ ⇨ $161=7\times23$ ；$240=2^4\times3\times5$ ；$289=17^2$

例 3　$(152,345,377)$ ⇨ $152=2^3\times19$ ；$345=3\times5\times23$ ；$377=13\times29$

在多次的討論與思考後，無意間也發現了以下有趣的現象，就是$3^3+4^3+5^3=6^3$
但因為時間有限，所以也沒有繼續研究下去，而此內容也可作為下次科展的題材，繼續延伸下去。

柒、結論

第一: $\left(2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1\right)$ & $\left(2n, n^2-1, n^2+1\right)$這兩個公式的解為

$\left(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\right)$此公式的特例，這代表著$\left(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\right)$包含全部的解嗎?我們目前並無法肯定，因為當初以為數字不是奇數就是偶數，而衍生出的公式會有全部的解，就在(20，21，29)這組畢氏數出現後就破滅了。

第二:同一組畢氏數中，必有一數為 3 的倍數、必有一數為 4 的倍數、必有一數為 5 的倍數。

經由這次的研究，讓我們對數學產生更多的樂趣，也讓我們在思考上有更上一層的突破與發展。

捌、參考資料及其他

一.昌爸工作坊　網址：http://www.mathland.idv.tw/

二.數學歷史典故(梁宗巨著，九章出版社)

三.數學家傳奇（九章出版社)

四.朱浩偉（1998）；從畢氏定理談起。

五.李金財；深入探討畢氏數

六.數學的發現趣談(蔡聰明著，三民書局)

【評語】030408

1. 在國中數學的基礎上，探討畢式數的結構，努力值得肯定。
2. 主題核心內容大多已知，應朝更一般（如４個變數）情形研究。
3. 證明過程不夠嚴密。