數學傳播 36卷4期, pp. 83-96

級數求和、對消和與對消乘積(下)

林宜嬪・張福春

3. 部份分式

當欲求和或乘積是屬於有理多項式的型態時, 可利用部份分式先將有理多項式分解爲數個較簡易的算式再進行對消, 可提高計算的效率, 也可避免計算上的錯誤。

而 部份分式 (*partial fraction*) 分解, 又稱部份分式展開, 是將有理函數分解成許多次數較低有理函數和的形式, 來降低分子或分母多項式的次數。分解後的分式需滿足以下條件:

1. 分式的分母需爲不可約多項式 (irreducible polynomial) 或其乘冪。
2. 分式的分子多項式次數需比其分母多項式次數要低。

對 $f(x)=P(x)/Q(x)$ 進行分項分式的步驟如下:

[步驟一 :化成眞分式]

如果 $P(x)$ 的次方大於 $Q(x)$, 則必須將 $P(x)/Q(x)$ 化爲帶分式,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

其中 $S(x)$, $P_1(x)$ 和 $Q(x)$ 爲多項式且 $P_1(x)$ 的次方會小於 $Q(x)$。以下步驟二、三、四是針對眞分式 $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ 作討論。

[步驟二 :分母因式分解]

將因子 $Q(x)$ 分解成線性或二次因子:$(px+q)^m$ 和 $(x^2+bx+c)^n$, 其中 (x^2+bx+c) 必須在實數系中爲不可分解的。

[步驟三 :二次因子]

對於每一個二次因子 $(x^2+bx+c)^n$, 其部份分式必包含 n 個分式之和:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

詳細內容可參考微積分課本 Larson and Edwards [6, Section 8.5, p. 555]。

例 10: 陶懋頎、單墫、蘇淳、嚴鎮軍 [1, 5.3.1, p. 204] 計算級數 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ 的值。

解: 先設法將有理多項式拆解成部分分項, 利用對消化簡, 因此定出實數 A, B, 使得

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{A}{(3k-2)}+\frac{B}{(3k+1)}$$

則

$$1=A(3k+1)+B(3k-2) \tag{1}$$

使 (1) 對應項係數相等, 可得

$$\begin{cases}3A+3B & =0\\ A-2B & =1\end{cases}$$

求得 $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, 因此前 n 項和為

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(3k-2)}-\frac{1}{(3k+1)}\right]\\&=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)}-\frac{1}{(3n+1)}\right]\\&=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{(3n+1)}\right]\end{aligned}$$

□

此外數列之無窮級數和為 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{(3n+1)}\right]=\frac{1}{3}$。

另外, 若遇到分母為 x^4+1 或 x^4+4y^4 此種形式, 可適當增、減項之後, 利用配方法與平方差分解分母, 再將分式作轉換進而可以鄰項對消, 其中 x^4+1 和 x^4+4y^4 的分解如下:

(1)
$$\begin{aligned}x^4+1&=(x^4+2x^2+1)-2x^2\\&=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2\\&=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)\end{aligned}$$

(2)
$$x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2$$

$$= (x^2+2y^2)^2 - (2xy)^2$$
$$= (x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$$

例 11: Andreescu and Gelca [4, Section 2.4, p. 49] 試求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$ 之值。

解: 因爲分母 $4k^4+1$ 可以分解成

$$\begin{aligned} 4k^4+1 &= (4k^4+4k^2+1)-4k^2 \\ &= (2k^2+1)^2-(2k)^2 \\ &= (2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1) \end{aligned}$$

且分子爲 $(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)=4k$, 則級數爲

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k^2-2k+1)} - \frac{1}{(2(k+1)^2-2(k+1)+1)} \right) \\ &= 1-\frac{1}{2n^2+2n+1} \end{aligned}$$ □

有些級數並不容易看出其部份分式的類型, 因此需經轉換才爲部份分式, 方便於求和, 以下例作說明:

例 12: Andreescu and Gelca [4, Section 2.3, p. 44] 計算 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$ 的值。

解: 先將分母有理化

$$\begin{aligned} \left((k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}\right)\cdot\left((k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}\right) &= \left[(k+1)\sqrt{k}\right]^2-\left[k\sqrt{k+1}\right]^2 \\ &= k(k+1)^2-(k+1)k^2 \\ &= k(k+1) \end{aligned}$$

則所求爲

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\
&= 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}
\qquad \square
$$

並非所有部份分式皆可鄰項對消, 符合上述介紹之常見型式, 故以例子作說明:

例 13: 陶懋頎、單墫、蘇淳、嚴鎮軍 [1, 5.3.2, p. 205] 求級數的和

$$\frac{3}{1\times2\times3}+\frac{5}{2\times3\times4}+\frac{7}{3\times4\times5}+\frac{9}{4\times5\times6}+\cdots$$

解: 此題等同於求值

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k(k+1)(k+2)}$$

仍然運用部份分式方法, 因此先定出實數 A, B, C, 使得

$$\frac{2k+1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}$$

化簡即為

$$2k+1=A(k+1)(k+2)+Bk(k+2)+Ck(k+1)$$

在其中令 $k=0$, 得 $A=\frac{1}{2}$; 令 $k=-1$, 得 $B=1$; 令 $k=-2$, 得 $C=-\frac{3}{2}$, 則數列的前 n 項和為

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{3}{2}}{3}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{3}-\frac{\frac{3}{2}}{4}\right] && (2)\\
&\quad+\left[\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{4}-\frac{\frac{3}{2}}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{\frac{3}{2}}{n}\right] && (3)\\
&\quad+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right] && (4)
\end{aligned}
$$

(2)−(4) 的對消現象表現在三個括號之間: 每個括號內的三項中的最後一項可與其後括號內的中間項以及再後面一個括號內的第一項的和相抵消, 也就是

$$-\frac{\frac{3}{2}}{k}+\frac{1}{k}+\frac{\frac{1}{2}}{k}=0,\quad k=3,\ 4,\ \ldots,\ n$$

化簡可得

$$\begin{aligned}S_n &= \left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}\right]+\left[\frac{-\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right]\\ &= \frac{5}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\end{aligned}$$

所以無窮級數的和爲 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{5}{4}$。 □

由此題可知對消項不一定是相鄰, 可以跳項對消。

4. 三角函數

不同於之前所介紹的反差分之三角函數對消方法, 此節的三角函數對消求和型式爲乘上一適當輔助量, 使得三角函數可鄰項對消或跳項對消。

例 14: Andreescu and Gelca [4, Section 2.3, p. 44] 試計算 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\alpha$ 的值。

解: 因爲 $\cos k\alpha$ 乘上 $2\sin\frac{\alpha}{2}$ 之後, 利用積化和差可得

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha$$

其中假設 $\alpha \neq 2m\pi$, m 爲一整數, 因此

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha &= \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\\ &= \left[\sin\left(\frac{3}{2}\right)\alpha-\sin\left(\frac{1}{2}\right)\alpha\right]+\left[\sin\left(\frac{5}{2}\right)\alpha-\sin\left(\frac{3}{2}\right)\alpha\right]\\ &\quad+\cdots+\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\\ &= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

因爲 $2\sin\frac{\alpha}{2}$ 是一個常數, 所以可得到

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{2}$$ □

例 15: Andreescu and Gelca [4, Problem 1, p. 32] 試證

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\cdots+\frac{\sin nx}{\cos^n x}=\cot x-\frac{\cos(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$$

對於所有 $x\neq\frac{k\pi}{2}$ 均成立。

解: 由餘弦函數的和角公式可知

$$\sin kx\sin x=\cos kx\cos x-\cos{(k+1)x} \tag{5}$$

其中 k 爲一特定正整數, 在 (5) 式等號兩邊同時除以 $\sin x\cos^k x,\ x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$, 得到

$$\frac{\sin kx}{\cos^k x}=\frac{\cos kx}{\sin x\cos^{k-1} x}-\frac{\cos{(k+1)x}}{\sin x\cos^k x}$$

所求爲

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\cdots+\frac{\sin nx}{\cos^n x}&=\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}\right)+\left(\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}-\frac{\cos 3x}{\sin x\cos^2 x}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{\cos nx}{\sin x\cos^{n-1} x}-\frac{\cos{(n+1)x}}{\sin x\cos^n x}\right)\\&=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos{(n+1)x}}{\sin x\cos^n x}\\&=\cot x-\frac{\cos{(n+1)x}}{\sin x\cos^n x}\end{aligned}$$

□

由例子可知, 解題技巧著重於和角公式的應用。

例 16: Andreescu and Gelca [4, Problem 8, p. 33] 對於任何正整數 n 和實數 $x\neq\frac{k\pi}{2^m}$, 其中 $m=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n$ 且 k 爲整數, 試證

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x \tag{6}$$

成立。

解:

i. 因爲

$$\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2 x-(2\cos^2 x-1)}{\sin 2x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin 2x} \\
&= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \\
&= \cot x - \cot 2x
\end{aligned}
$$

ii. 推廣到 $\frac{1}{\sin 2^n x}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin 2^n x} &= \frac{2\cos^2(2^{n-1}x) - (2\cos^2(2^{n-1}x) - 1)}{\sin 2^n x} \\
&= \frac{2\cos^2(2^{n-1}x)}{2\sin(2^{n-1}x)\cos(2^{n-1}x)} - \frac{(2\cos^2(2^{n-1}x) - 1)}{\sin 2^n x} \\
&= \frac{\cos(2^{n-1}x)}{\sin(2^{n-1}x)} - \frac{\cos 2^n x}{\sin 2^n x} \\
&= \cot(2^{n-1}x) - \cot(2^n x)
\end{aligned}
$$

iii. 則所求爲

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\sin 2^n x}\right] &= \sum_{k=1}^{n}\left[\cot(2^{n-1}x) - \cot(2^n x)\right] \\
&= (\cot x - \cot 2x) + (\cot 2x - \cot 4x) + \cdots + \big(\cot(2^{n-1}x) - \cot(2^n x)\big) \\
&= \cot x - \cot 2^n x \qquad \square
\end{aligned}
$$

5. 階乘函數

在特殊情況亦可使用對消法來求和, 例如: 階乘函數。

> **例 17**: Andreescu and Gelca [4, Problem 1, p. 47] 試計算 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)$ 之值。

解: 因爲 $k!(k^2+k+1) = [(k+1)^2 - k]\,k!$, 所以

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1) &= \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k\right] k! \\
&= \sum_{k=1}^{n}[(k+1)!(k+1) - k!k]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= (2! \cdot 2 - 1! \cdot 1) + (3! \cdot 3 - 2! \cdot 2) + \cdots + ((n+1)!(n+1) - n!n) \\ &= (n+1)!(n+1) - 1 \end{aligned}$$ □

例 18: Andreescu and Gelca [4, Section 2.3, p. 44] 計算 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k$ 的值。

解: 將 $k! \cdot k$ 改寫爲 $k! \cdot (k+1-1) = (k+1)! - k!$, 則

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) &= 2! - 1! + 3! - 2! + \cdots + (n+1)! - n! \\ &= (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

經過對消之後, 則和爲 $(n+1)! - 1$。 □

階乘函數對消問題雖有一定型式規則去依循, 題解重點在於將一般項 a_k 透過加項補項或其他技巧改寫成 $A_{k+1} - A_k$。

6. 對消與合併乘積

對消乘積有兩種常見型式, 其中一種爲對消型, 另外一種爲合併型。

I 對消型爲能將 b_k 拆解成 $\frac{B_{k+1}}{B_k}$ 使得 $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} b_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{B_{k+1}}{B_k}$ 可得到乘積 $\dfrac{B_{n+1}}{B_1}$。

II 合併型則需乘上一適當輔助量, 使得乘積之一般項可逐項化簡。

6.1. 平方差

平方差公式是對消型常用手法之一, 其中平方差公式爲

$$1 - k^2 = (1-k)(1+k)$$

經適當分解之後, 再分項對消求乘積。

例 19: Andreescu and Gelca [4, Section 2.3, p. 46] 試證明 $\displaystyle\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}$ 成立。

解: 利用平方差公式可知 $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)&=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\\&=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\right]\cdot\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right]=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

則 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$。 □

合併型則需藉著適當輔助量作變換, 以下例來說明:

例 20: Andreescu and Gelca [4, Problem 13, p. 48] 試計算 $\prod\limits_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)$ 之值。

因爲 $2\left(1-\frac{1}{2^{2^0}}\right)=1$, 因此將原式改寫

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^0}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)$$

且利用平方差公式可知

$$\left(1-\frac{1}{2^{2^k}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{2^{k+1}}}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)&=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^0}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^0}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^0}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)=2\end{aligned}$$ □

此外, 立方和與立方差公式, 亦可被使用在對消乘積類型的題目中。

[立方和公式] $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

[立方差公式] $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

例 21: Andreescu and Gelca [4, Problem 12, p. 48] 試證

$$\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}$$

成立。

解: 因爲 $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$, 所以

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1}&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}\right)\times\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{7}{3}\times\frac{13}{7}\times\frac{21}{13}\times\cdots\times\frac{n^2-n+1}{(n-1)^2-(n-1)+1}\times\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times 2\times((n+1)^2-(n+1)+1)}{3n(n+1)}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

由題目可歸納出幾個解題重點:

1. 對消型: 若原函數爲平方差、立方和或立方差型式, 則原式展開後之乘積爲拆項分別作對消。
   例:$\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$。
2. 合併型: 若原函數爲平方差、立方和或立方差型式之展開式其中一式, 則需乘上一適當輔助量, 再作對消。
   例:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)&=2\left(1-\frac{1}{2^{2^0}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)\\
&=2\left(1-\frac{1}{2^{2^0}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^0}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)
\end{aligned}$$

三角函數乘積亦包含對消型與合併型兩種型式, 此節將介紹利用和角公式、半角與倍角公式求乘積之題型。

6.2. 半角與倍角公式

例 22: Andreescu and Gelca [4, Problem 12, p. 33] 試求

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\tan^2\frac{2^k\pi}{2^n+1}\right)$$

的值。

解: 因爲 $1-\tan^2 x=\frac{2\tan x}{\tan 2x}$, 則

$$1-\tan^2\frac{2^k\pi}{2^n+1}=\frac{2\tan\frac{2^k\pi}{2^n+1}}{\tan\frac{2^{k+1}\pi}{2^n+1}}$$

利用對消的性質

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\tan^2\frac{2^k\pi}{2^n+1}\right)&=\left(\frac{2\tan\frac{2\pi}{2^n+1}}{\tan\frac{4\pi}{2^n+1}}\right)\left(\frac{2\tan\frac{4\pi}{2^n+1}}{\tan\frac{8\pi}{2^n+1}}\right)\cdots\left(\frac{2\tan\frac{2^n\pi}{2^n+1}}{\tan\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1}}\right)\\&=2^n\frac{\tan\frac{2\pi}{2^n+1}}{\tan\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1}}=2^n\frac{\tan\frac{2\pi}{2^n+1}}{\tan\left(2\pi-\frac{2\pi}{2^n+1}\right)}=2^n\frac{\tan\frac{2\pi}{2^n+1}}{-\tan\frac{2\pi}{2^n+1}}=-2^n\end{aligned}$$

□

例 23: Andreescu and Gelca [4, Problem 10, p. 33] 對於所有非零實數 α, 試證

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^k}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\tag{7}$$

恆成立。

解: 由半角公式可知

$$\cos\theta=\frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^k}&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{\sin\frac{\alpha}{2^k}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{4}}\right)\cdots\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}\right)=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}\\&=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\quad(\text{令 } x=\frac{\alpha}{2^n})\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\alpha}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} \quad \text{(根據 L'Hospital's Rule)}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad \square$$

由例題可知, 題目大部分不是直接以半角或倍角公式型式存在, 必須藉由乘上一適當輔助量, 再利用和角公式轉換一般式, 進而可以逐項對消。然而, 不僅是半角與倍角公式, 有些題型是綜合半角、倍角公式或三倍角公式而成, 如下例所示:

[**三倍角公式**]

- $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

例 24: Andreescu and Gelca [4, Problem 14, p. 33] 試證

$$\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20}\right) = \frac{1}{16} \tag{8}$$

成立。

解: 因爲

$$\frac{\cos 3k'}{\cos k'} = 4\cos^2 k' - 3 = 2(1+\cos 2k') - 3 = 2\cos 2k' - 1 \tag{9}$$

令 $k' = \frac{k}{2}+\frac{\pi}{2}$ 代入 (9), 再除以 (-2) 可得

$$\frac{1}{2} - \cos(k+\pi) = \frac{1}{2}+\cos k = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\left(\frac{3k}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{k}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{3k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right)$$

則所求爲

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{3\pi}{40}}{\sin\frac{\pi}{40}}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{9\pi}{40}}{\sin\frac{3\pi}{40}}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{27\pi}{40}}{\sin\frac{9\pi}{40}}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{81\pi}{40}}{\sin\frac{27\pi}{40}}\right)\\
&= \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin\frac{81\pi}{40}}{\sin\frac{\pi}{40}} = \frac{1}{16} \qquad \square
\end{aligned}$$

6.3. 積化和差公式

例 25: Andreescu and Gelca [4, Problem 11, p. 33] 對於整數 $n>1$, 試證

$$\cos\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cdots\cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}=\frac{1}{2^n} \tag{10}$$

成立。

解: 將 (10) 式同乘 $2^n\sin\frac{2\pi}{2^n-1}$, 且因爲

$$\sin\frac{2\pi}{2^k-1}\cos\frac{2\pi}{2^k-1}=\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{2^k-1}$$

所以

$$\begin{aligned}
&2^n\sin\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cdots\cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}\\
&=2^{n-1}\sin\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cdots\cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}\\
&\qquad\vdots\\
&=\sin\frac{2^{n+1}\pi}{2^n-1}=\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{2^n-1}\right)=\sin\frac{2\pi}{2^n-1}
\end{aligned}$$

因爲 $2^n\sin\frac{2\pi}{2^n-1}$ 爲常數, 則所求爲

$$\cos\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cdots\cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}=\frac{1}{2^n}$$

□

参考文獻

1. 陶懋頎、單墫、蘇淳、嚴鎮軍 譯, 常庚哲 校 (2002)。通過問題學解題, 一版二刷。台北: 九章出版社。
2. 常豐 (1997)。反差分計算在數列求和上的應用, 工科數學第 13 卷第 4 期。蚌埠: 蚌埠教育學院。
3. Andreescu, T. and Gelca, R. (2007). *Putnam and Beyond.* New York: Springer Verlag.
4. Andreescu, T. and Gelca, R. (2009). *Mathematical Olympiad Challenges*, 2nd edition. New York: Springer Verlag.
5. Graham, R.L., Knuth, D.E. and Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, 2nd edition. New York: Addison-Wesley Publishing Company.
6. Larson, R. and Edwards, B.H. (2010). *Calculus*, 9th edition. New York: Brooks/Cole, Cengage Learning, Inc.
7. Miller, K.S. (1960). *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations.* New York: Henry Holt.

8. Rosen, K. H. (2000). *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics.* Boca Raton, FL: CRC Press.

—本文作者林宜嬪任教私立興國高級中學, 張福春任教國立中山大學應用數學系—

超表示論研討會

Workshop on Super Representation Theory

日　　期 : 2013 年 5 月 10 日 (星期五) ∼ 2013 年 5 月 12 日 (星期日)

地　　點 : 台北市大安區羅斯福路四段1號　天文數學館6樓中研院數學所演講廳 (639研討室)

詳見中研院數學所網頁 http://www.math.sinica.edu.tw

Conference on Diophantine Problems and Arithmetic Dynamics

日　　期 : 2013 年 6 月 24 日 (星期一) ∼ 2013 年 6 月 28 日 (星期五)

地　　點 : 台北市大安區羅斯福路四段1號　天文數學館6樓中研院數學所演講廳 (639研討室)

詳見中研院數學所網頁 http://www.math.sinica.edu.tw