數學獨立研究研究日誌

|  |  |
| --- | --- |
| 研究活動 | 研究1.不動點個數產生極大值的地方 |
| 研究日期 | 111.03 |
| 研究進度與內容 | 假設最底層為$R\_{t}$，若選擇$G\_{n}$($t>n$)交換，由引理4得知，不動點個數可寫成下列一般式：(其中$n+t=m$)$$\sum\_{a=n}^{t}a\left(m-a\right)-\frac{(m-2)(m+1)}{6}$$$=m\left[\frac{t\left(t+1\right)}{2}-\frac{\left(1+n-1\right)\left(n-1\right)}{2}\right]-\left[\frac{t\left(t+1\right)\left(2t+1\right)}{6}-\frac{\left(n-1\right)\left(n\right)\left(2n-1\right)}{6}\right]-\frac{\left(m-2\right)\left(m+1\right)}{6}\left(t-n+1\right)$ $=\frac{t\left(t+1\right)\left(3m-2t-1\right)+n\left(n-1\right)\left[\left(2n-1\right)-3m\right]-(m-2)(m+1)(t-n+1)}{6}$ $=\frac{t\left(t+1\right)\left(t+3n-1\right)-n\left(n-1\right)\left[1+3t+n\right]+\left(n+t-2\right)\left(n+t+1\right)\left(n-t-1\right)}{6}$ $$=\frac{\left(t^{3}+3nt^{2}+3nt-t\right)-\left(3n^{2}t+n^{3}-n-3nt\right)}{6}$$$$+\frac{n^{3}+n^{2}t-nt^{2}-2n^{2}-2nt-n-t^{3}+3t+2}{6}$$$$=\frac{2nt^{2}+4nt+2t-2n^{2}t-2n^{2}+2}{6}$$$$=\frac{\left(-t-1\right)n^{2}+\left(t^{2}+2t\right)n+(t+1)}{3}$$令$f(n)=\frac{\left(-t-1\right)n^{2}+\left(t^{2}+2t\right)n+(t+1)}{3}$，則當$n=\frac{-(t^{2}+2t)}{2(-t-1)}=\frac{t(t+2)}{2(t+1)}=\frac{t\left(t+1\right)+\left(t+1\right)-1}{2(t+1)}=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2(t+1)}$時會有極大值。 |
| 回饋: |

數學獨立研究研究日誌

|  |  |
| --- | --- |
| 研究活動 | 研究2.利用不移動點證明平面三角形一般式 |
| 研究日期 | 111.03 |
| 研究進度與內容 | 假設最底層為第n層，若選擇第m層交換，分為以下兩種結果討論1. 當n+m為奇數

此時中間軸沒有硬幣，為上下兩兩一組對稱分布總顆數為$s=\frac{\left\{\left[1+\left(m-1\right)d\right]+[1+(\frac{m+n-1}{2}-1)d]\right\}∙\frac{(n-m+1)}{2}}{2}×2$ $=\frac{\left(n-m+1\right)[2+(\frac{3m+n-1}{2}-2)d]}{2}$ $=\frac{4\left(n-m+1\right)+\left(n-m+1\right)\left(3m+n-1\right)d-4d(n-m+1)}{4}$ 將分子展開整理成m的二次函數可得$$f\left(m\right)=-3dm^{2}+\left(2nd+8d-4\right)m+(n^{2}d+4n-4nd+4-5d)$$此時當$m=\frac{-(2nd+8d-4)}{-6d}=\frac{n+4}{3}-\frac{2}{3d}$時$f\left(m\right)$有極大值，接下來討論n除3不同餘數時，m所對應的整數值。(1)$n≡0 \left(mod3\right) ⇒m=\frac{n+3}{3}$$⇒$第m層顆數為$1+\left(m-1\right)d=1+\frac{n}{3}d$$⇒$第$\frac{m+n-1}{2}$層顆數為$1+\left(\frac{m+n-1}{2}-1\right)d=1+(\frac{2n}{3}-1)d$$⇒$不移動總顆數為$\frac{[2+(n-1)d](\frac{n}{3})}{2}×2=\frac{n[2+(n-1)d]}{3}$$⇒$移動最少顆數為$\frac{[2+(n-1)d]n}{2}-\frac{n\left[2+\left(n-1\right)d\right]}{3}=\frac{n[2+(n-1)d]}{6}$，故得證。(2)$ n≡1 \left(mod3\right) ⇒m=\frac{n+2}{3}$，不合(因為n+m為奇數)。(3)$ n≡2 \left(mod3\right) ⇒m=\frac{n+4}{3}$，不合(因為n+m為奇數)。 |

|  |  |
| --- | --- |
|  | 二、當n+m為偶數此時中間軸有硬幣(為第$\frac{n+m}{2}$層)到中間層的總顆數為$s=\frac{\left\{\left[1+\left(m-1\right)d\right]+[1+(\frac{m+n}{2}-1)d]\right\}∙\frac{(n-m+2)}{2}}{2}$ $=[\frac{4+\left(3m+n-4\right)d}{2}]×(\frac{n-m+2}{2})$ $=\frac{[4+(3m+n-4)d](n-m+2)}{4}$ 將分子展開整理成m的二次函數可得$$f\left(m\right)=-3dm^{2}+\left(2nd+10d-4\right)m+(n^{2}d+4n-2nd+8-8d)$$此時當$m=\frac{-(2nd+10d-4)}{-6d}=\frac{n+5}{3}-\frac{2}{3d}$時$f\left(m\right)$有極大值，同理，討論n除3不同餘數時，m所對應的整數值。(1)$n≡0 \left(mod3\right) ⇒m=\frac{n+3}{3}$不合，因為n+m為偶數。(2)$ n≡1 \left(mod3\right) ⇒m=\frac{n+2}{3}$， $⇒$第m層顆數$1+\left(m-1\right)d=1+(\frac{n-1}{3})d$，而$\frac{n+m}{2}=\frac{2n+1}{3}$$⇒$第$\frac{m+n}{2}-1$層顆數$1+\left(\frac{2n-2}{3}-1\right)d=1+(\frac{2n-5}{3})d$$⇒$不移動總顆數為$\frac{[2+\frac{3n-6}{3}d](\frac{n-1}{3})}{2}×2+[1+\frac{2n-2}{3}]d=1+\frac{\left(n-1\right)\left[2+nd\right]}{3}=\frac{2n+n^{2}d-nd+1}{3}$$⇒$移動最少顆數為$\frac{2n+nd(n-1)}{2}-\frac{2n+n^{2}d-nd+1}{3}=\frac{2n+n^{2}d-nd-2}{6}=\frac{(n-1)(nd+2)}{6}$，得證。 (3)$ n≡2 \left(mod3\right) ⇒m=\frac{n+4}{3}$，$⇒$第m層顆數$1+\left(m-1\right)d=1+(\frac{n+1}{3})d$，而$\frac{n+m}{2}=\frac{2n+2}{3}$$⇒$第$\frac{m+n}{2}-1$層顆數$1+\left(\frac{2n-1}{3}-1\right)d=1+(\frac{2n-4}{3})d$$⇒$不移動總顆數為$\frac{[2+(n-1)d](\frac{n-2}{3})}{2}×2+[1+\frac{2n-1}{3}]d=\frac{\left(n-2\right)\left[2+(n-1)d\right]+3+(2n-1)d}{3}$$=\frac{2\left(n-2\right)+\left(n-2\right)\left(n-1\right)d+3+(2n-1)d}{3}$ $=\frac{2n-1+(n^{2}-n+1)d}{3}$ $⇒$移動最少顆數為$\frac{2n+nd\left(n-1\right)}{2}-\frac{2n-1+\left(n^{2}-n+1\right)d}{3}=\frac{2n+2+d\left(n^{2}-n-2\right)}{6}=\frac{2\left(n+1\right)+\left(n-2\right)\left(n+1\right)d}{6}$$=\frac{\left(n+1\right)[2+(n-2)d]}{6}$，得證。 |

|  |  |
| --- | --- |
| 研究活動 | 研究3.平方級數和及立體錐總顆數一般式 |
| 研究日期 | 2022.02 |
| 研究進度與內容 | 我們科展當中有運用到平方級數、立體錐總顆數的一般式，在之前我有上網查過，不過都是運用很複雜的原理，所以只是國中生的我看不懂。不過老師用了一個很簡單的原理讓我了解如上圖，我們首先先將”金字塔格子的數量”算出來，也就是$\frac{n(n+1)}{2}$，接下來如果我們把三個金字塔內的數量相加，例如:第一個金字塔的首項是1；第二個金字塔的首項是n；第三個金字塔的首項是n，1+n+n=2n+1。若每格都這樣算的話，我們會發現每一格都是2n+1，因此3個金字塔內的數字總和=$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$，但我們只用算一個金字塔內的數字總和，所以$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2×3}$=$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，由得證。而算出立體錐總顆數也是一樣的方法，只是換數字而已，我們把n換成1、n-1換成2、……、1換成n，這時候我們會發現每格方格的數字是(n+2)，所以我們得出立體錐總顆數和之一般式為$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$。這次不僅讓我學會如何證明平方級數和，也讓我知道數學不只會有一種方法! |
|  |

|  |  |
| --- | --- |
| 研究活動 | 研究4.柯西不等式證明 |
| 研究日期 | 2022.02 |
| 研究進度與內容 | http://www.mathland.idv.tw/fun/cauchy.jpg圖一和圖二是全等的長方形，圖一黃色區域的面積是ac+bd，圖二黃色區域的面積=$\frac{1}{2}$ac×2+$\frac{1}{2}$bd×2=ac+bd。由此我們可以得知紅色面積也相等因為圖一的紅色面積為ad+bc，因此我們可得知ad+bc=$\sqrt{a^{2}+c^{2}}×h$，此時我們分為兩種情況:1. 紅色區域不是長方形

因為三角形的斜邊長大於股長，因此我們可得知$\sqrt{a^{2}+c^{2}}×\sqrt{b^{2}+d^{2}}>\sqrt{a^{2}+c^{2}}×h$，將兩邊平方後，得出 (a2+c2)(d2+b2) > (ad+bc)21. 如果紅色區域是長方形，則$\sqrt{b^{2}+d^{2}}=h$，由ad+bc=$\sqrt{a^{2}+c^{2}}×h$可得知

ad+bc=$\sqrt{a^{2}+c^{2}}×\sqrt{b^{2}+d^{2}}$，即 (ad+bc)2 = (a2+c2)(d2+b2)。如圖三，如果 a：d = c：b，則紅色區域一定是長方形，理由如下： |
|  | http://www.mathland.idv.tw/fun/cauchy3.jpg因為直角△CDA和直角△BEC，a：d = c：b 即 CD : BE = DA : EC ，又∠D =∠E = 90∘，所以 △CDA和直角△BEC相似 (SAS相似)，因此 ∠1=∠2。因為∠1+∠3 = 90∘，所以∠2+∠3 = 90，可知∠BCA是直角，因此圖三的紅色區域(平行四邊形)是長方形。由上述可知如果 a：d = c：b，則  (a2+c2)(d2+b2) = (ad+bc)2 。可以推廣得知，「若 a、b、c、d是任意數，則(a2+c2)(d2+b2) ≧ (ad+bc)2 ，當 a：d = c：b 時，等號成立。」 |
|  |