投稿類別：數學組

篇名：

數獨中一格集合性質探究與演算法

作者：

沈泓毅。臺北市立建國高級中學。高二 25 班

謝　翔。臺北市立建國高級中學。高二 25 班

指導老師：

姚志鴻 老師

施翔仁 老師

壹、前言

一、研究動機

數獨是廣為流傳的益智遊戲。自數獨被發明以來，即有一問題被提出：「最少應填入多少數字(該數目稱最小初盤數)做為題目，才能推出唯一的答案？」雖然對此問題之解答早有諸多猜測，但直到 2012 年，經過電腦遍歷才確定正確解答為 17 個。於是我們的長期目標是改進該論文演算法以完成另一問題：最大初盤數，此篇小論文中將針對一格集合查找程式研究與修改。

二、研究目的

(一) 證明關於一格集合的假設

(二) 由此假設改良一格集合查找程式之演算法

三、研究方法

透過文獻分析和實際遊玩了解數獨解法，並將解法運用在證明上，作為演算法的理論基礎。

貳、正文

一、名詞解釋

(一) 數獨規則

數獨遵守的限制：「每格只填入 1~9 任一數值，且同一行、列、宮之值皆不重複」。

(二) 盤面

一符合數獨規則的 9*9 方陣 (可含有空格) 。

(三) 格子集合

盤面上格子的集合，可表示為：(其中 G 為格子位置集合，N 為 1~9 的自然數)

$$S \subset G \times N = \{(1,1),(1,2),\dots\dots(1,9),(2,1),\dots\dots,(9,9)\} \times \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

(四) 完成盤面和未完成盤面

若一盤面含有空格，稱未完成盤面，不含空格者稱為完成盤面。可用格子集合表示已填的格子。

(五) 多重解集合 (Unavoidable Set)

為一完成盤面的子集合。若此盤面挖空該子集合後無法導出唯一解，且無任一空格之值在所有解中恆常不變，則此子集為多重解集合。多重解集合的例子見下圖(一)、(二)。

1	4	5	2	6	7	3	8	9
2	8	9	3	5	4	1	6	7
3	6	7	1	8	9	2	5	4
8	5	1	9	2	3	7	4	6
6	7	2	8	4	1	9	3	5
9	3	4	6	7	5	8	1	2
4	1	3	5	9	2	6	7	8
5	2	6	7	1	8	4	9	3
7	9	8	4	3	6	5	2	1

圖(一) 多重解集合但非一格集合

2	3	4	5	6	1	7	8	9
6	1	7	8	9	2	4	5	3
8	5	9	3	4	7	6	1	2
3	8	2	9	5	4	1	6	7
4	6	1	2	7	3	8	9	5
7	9	5	6	1	8	2	3	4
5	2	3	4	8	6	9	7	1
1	4	6	7	3	9	5	2	8
9	7	8	1	2	5	3	4	6

圖(二) 多重解集合中的一格集合

(六) 一格集合

若一完成盤面挖空一多重解集合後，無論填入何數都能導出唯一解，則此多重解集合為一格集合。參考上圖(一)、(二)，圖(一)為一多重解集合但不是一格集合，圖(二)則為一格集合。

(七) 直觀可能性

在一未完成盤面中，若某空格的同一行、列、宮皆無某值，則該值稱為該空格的一個直觀可能性。數獨解題過程中常運用直觀可能性的刪去，在無法填入任何空格時也能獲得線索。

(八) 直觀可能合理性

一盤面中，若存在同一行或列或宮的 n 格中共有 m 種直觀可能（m<n）的情形，則稱此盤面的直觀可能為「不合理」，若否則稱其為「合理」。

1	2	3	4	5	6	8	7	9
6	4	5	1	2	8	3		

圖(三) 直觀可能性不合理的情形，請見(2, 8)和(2, 9)格

(九) Buddy Digit (以下稱 BD)

若在多重解集合內的同一行、列、宮各找到一格，使這些格子的數值一樣。這些格子和他們的共同數值被定義為 BD。

(十) 深度優先搜索 (Depth-First-Search, 以下稱 DFS)

DFS 為一用於遍歷樹或圖的演算法。沿著邊盡可能深入的搜尋樹的節點，若該節點的邊皆已搜索過，則退回前一節點並繼續搜索，直到所有節點皆已搜索完畢為止。

二、文獻探討

(一) There is no 16-Clue Sudoku－論文中演算法介紹

此篇論文主要利用 DFS 在一完成盤面上決定填入空白方陣的格子集合，並判斷填入該格子集合後是否能導出唯一解。判斷方式則使用一格集合的定義：若盤面上存在一一格集合未填入任何數字，則其不具唯一解，若否則可導出。

論文尋找一格集合的方法為：生成一完成盤面並決定一格子集合，再利用一內有重要一格集合的對照表，決定其是否為一格集合。當論文發表時，找尋一個完成盤面所有的一格集合耗費二十分之一秒。

(二) Finding Unavoidable Set－假設原型介紹

我們想證明的假設原型出現在 Finding unavoidable sets：General (2011)，該假設說明一排內的一格集合含有以下性質：

“ 1. For each cell C there exists a buddy digit D that it can see both in the same row and in the same minicolumn.

2. Every cell can (and must) be counted as a buddy digit once in the row and once in the minicolumn.”

該網頁並列出符合該條件的若干格子集合和假設的延伸：“For each cell C there exists a buddy digit D that it can see in the same row, column and box”。然而該網頁並未提出對於該假設的證明，也附註此假設可能錯誤。

三、主題概述

(一) 假設修改與定型

根據上文原型，我們接受該網頁的定義，將一格集合與特質的關係改成「若且唯若」(如此設計之演算法才具價值)，並且加入連通圖的概念。若假設前面兩點特質皆為真，我們發現所有符合下面條件的多重解集合 U：(A_1 , A_2 皆為一格集合)

$$\mathrm{U} = A_1 \cup A_2 \, , while \; A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

亦符合此兩點特質，因為這些特質僅對各格可能性的關係做出闡述。因此我們將具可能性關係的兩格連線並使這些線符合連通圖的定義，以確保該格子集合符合一格集合的定義。

定理：

一完成盤面中格子集合為一格集合，若且唯若以下性質成立：

1. 此格子的集合內的任一格皆有唯一一組 Buddy Digit(以下簡稱 BD)。

2. 每一格皆為同一行、列、宮各唯一一格之 BD。

3. 若將每格視為一頂點，每格和它的 BD 之連線視為一邊，則可形成一連通圖。

(二) 演算法概述

我們的演算法利用 DFS 遍歷。當我們決定一格後，決定該格的 BD 並將這些 BD 存在一集合(電腦陣列)中。對新加入集合的 BD 重複上述步驟直到所有格子的 BD 皆在集合中，對每個格子做一次 BD 的確認以確保符合假設之前兩個特質(因第三個特質即為演算法進程)。若某格在 BD 值為某值之可能性已完成遍歷，則改變該格之 BD 值，以此類推直到完成遍歷。

事實上，以上演算法仍有改進空間：若該集合已遍歷過過則跳過集合、當集合內格數為特定值時不繼續遍歷、確認程序可被取代或去除……等等，然因目前沒有數學證明支持，本文將不採用此段之想法。

四、引理證明

引理 1：一完成盤面挖空一格集合後有唯二解

證明：

若一格集合存在兩解以上，則任一格必在不同解中有不同數值，若否，則由一格集合之性質可知其非一格集合。由此可知每一格必具備解數量的直觀可能性。

又在三解以上之情形，單決定一格的值可能決定之格子亦為該值，和因為此動作填入的格子同一宮空格的直觀可能因此只減少一個（該值），不能決定所有空格之值。綜上，此引理得證。

引理 2：在完整盤面中挖空多重解集合後，任選一格皆可填入原值和 BD 之值

證明：

利用 DFS 填一位完成盤面之空格，在遇到某空格沒有直觀可能性時，將上一格挖空，並填入其他值。若在上述做法中加入以下作法：當填入某空格時偵測直觀可能性的合理性，在不合理時便挖空該格並嘗試其他可能，則必不可能發生「遇到某空格沒有直觀可能性」的狀況，並且不存在某格無論填何種數字都會不合理的情形。

又在一完成盤面中挖空多重解集合後，知其直觀可能為原有之值和所有該空格之 BD。由此可知：填入首格時不出現直觀可能性不合理的情形，換言之該格必可填入原值和所有 BD。得證。

五、定理證明

(一) 對於「若」

根據引理 1、2 的證明，則可推得 BD 唯一，同理可證得每一格為同行、列、宮各唯一一格之 BD。得證。

(二) 對於「唯若」

假設某符合條件的集合非多重解集合，則在集合中必有一格數字在盤面挖空該集合的所有解中恆常不變，從引理 2 可知此狀況不存在。由此可知：一符合條件的集合必為多重解集合。

假設某符合條件的集合非一格集合，則盤面挖空這個集合後必須有三解以上，或兩解且具備含同一數值之某格。對於前者，可由引理 2 得知各格有兩個直觀可能性，決定某格之值後將會使得部分格子之數值被決定，決定的方法則是：若某格決定，則某格的 BD 和把某格視為 BD 的所有格子將被決定。根據定理的性質 3 可知前者被否定。對於後者，則可以以多重解集合的定義直接否定。

綜上，此定理得證。

參、結論

一、研究結論

(一) 假設

我們在 Finding unavoidable sets 之網站上找到兩段關於一格集合之性質，並成功證明其存在性，根據這兩個性質，我們確定了假設之「若」及「唯若」性質皆成立。

(二) 演算法

我們在假設的基礎上以 DFS 的概念設計一格集合的查找程式，假設成立代表演算法可行。我們預期此演算法的運作時間將大幅降低。

二、未來展望

(一) 在演算法中，我們在找到一個一格集合後，會再花時間進行該集合是否為一格集合之檢查。未來將嘗試證明此步驟可省略，以減少演算法之運作時間。

(二) Finding unavoidable sets 之網站上提及的一格集合最多有 23 個格子，未來將嘗試證明出一格集合的格子數目上限。

肆、引註資料

Finding unavoidable sets：General (2011)
http://forum.enjoysudoku.com/finding-unavoidable-sets-t30206.html

McGuire, G ., Tugemann, B., Civario, G; There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem via Hitting Set Enumeration. Exp. Math. 2013

石田保輝、宮崎修一 (2017)。演算法圖鑑：26 種演算法＋7 種資料結構，人工智慧、數據分析、邏輯思考的原理和應用全圖解。台北市：臉譜出版。