金門地區第60屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：「形形」相印-探討正多邊形內等腰三角形個數

關鍵詞：等腰三角形、正多邊形

編　　號：

目錄

摘要

這個研究主要在探討在一個正 n 邊形裡，以頂點連線組成等腰三角形，則這些等腰三角形最多可以有幾個？我們用了兩種方法，一種是以正 n 邊形的頂點作等腰三角形的頂角，另一種則是當作底角，經過研究發現底角法會數到重複的三角形，所以我們使用頂角法求出六到十四邊形的三角形個數，得到幾個規律，接下來我們簡化問題，將限制點移除，再結合頂角法得出公式$(n)\left[\frac{(n-k)}{2}\right]$，把黑點放回問題中，從一個延伸的多個黑點，總結出公式$(n-m)\left[\frac{(n-k)}{2}-m\right]+y$，但如果正多邊形為三的倍數時會有正三角形，所以我們製作了一個使用同餘方法的判斷發現，合併後得到公式$(n-m)\left[\frac{(n-k)}{2}-m\right]+y-2\left(\frac{n}{3}-T\right)$。

壹、研究動機

有一次在數學課中，老師張貼了一道題目在班上，名為七邊形之謎，經過一番思考後，我們很快地有了想法，覺得這個問題有點有趣，想要更進一步的思考，所以我們把這個問題延伸至更多邊形中或是有更多個黑點，等腰三角形的數量會不會有什麼規律和變化，於是我們興致勃勃地展開了研究。

貳、研究目的

一、正七邊形的頂點有五個紅點、兩個黑點，用紅點當頂點可以連成多少個等腰三角形？

二、將研究目的一的正七邊形推廣至任意正多邊形中有幾個等腰三角形？

三、在正多邊形中放入多個黑點會有幾個等腰三角形？

參、研究設備及器材

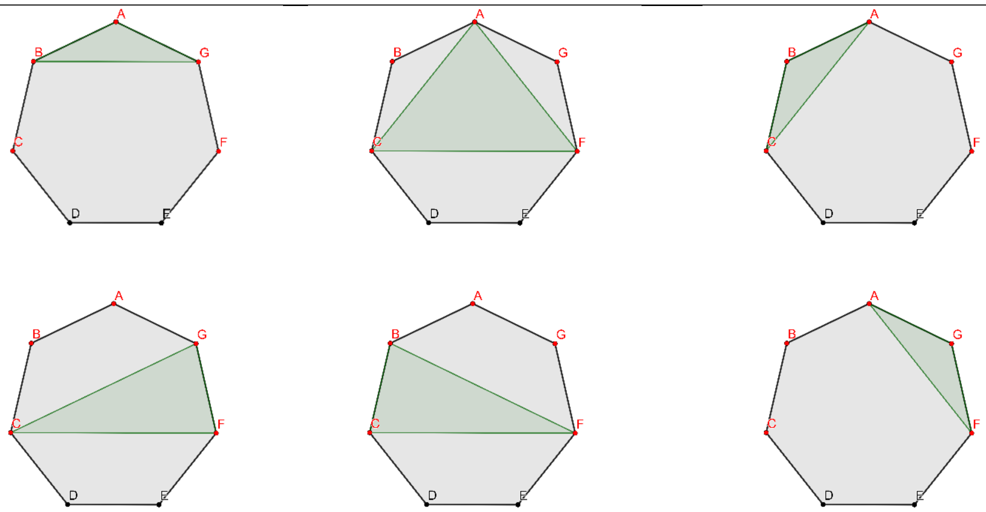
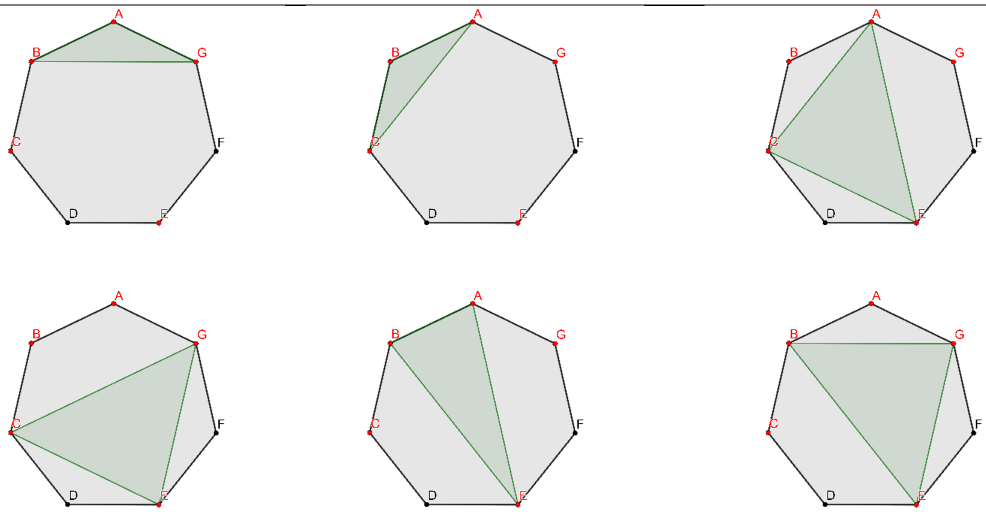
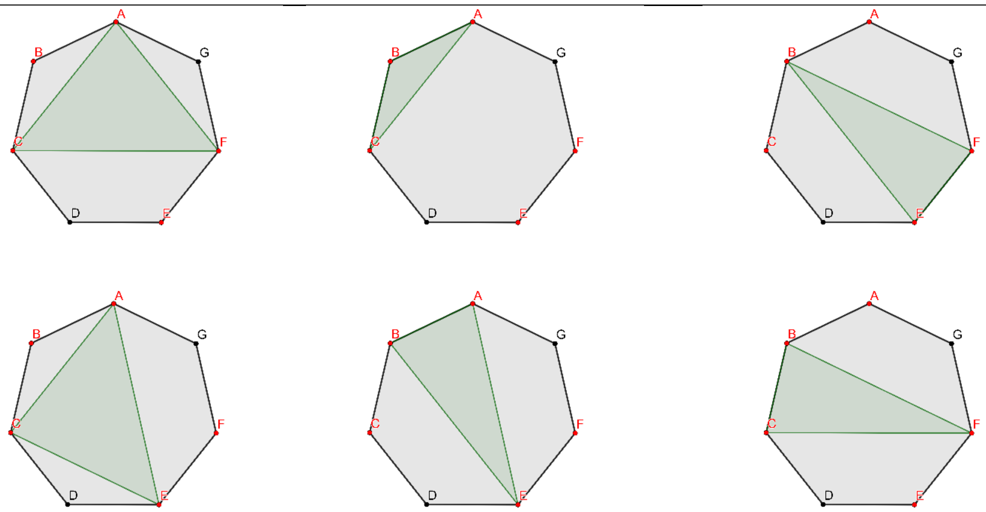
紙、筆、Geogebra 軟體

肆、研究方法與過程

原題：正多邊形內放入兩個黑點，剩餘的為紅點。用紅點當頂點可以連成多少個等腰三角形

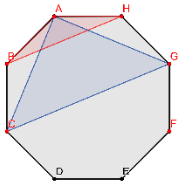
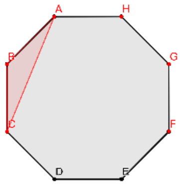
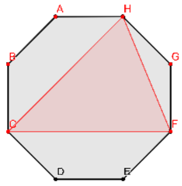
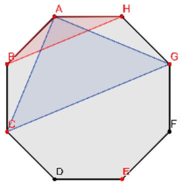
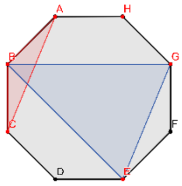
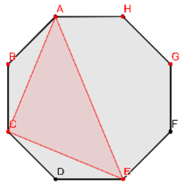
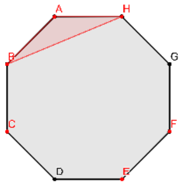
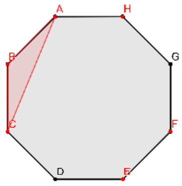
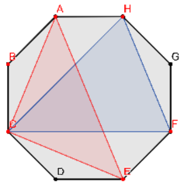
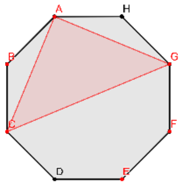
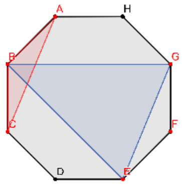
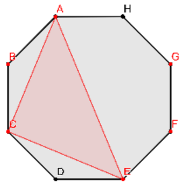
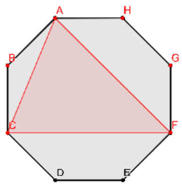
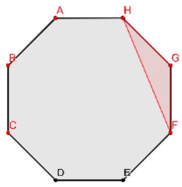
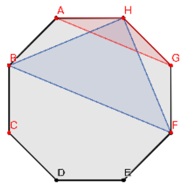
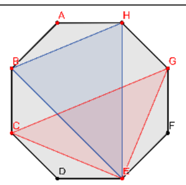
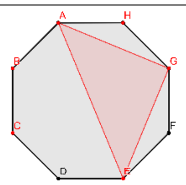
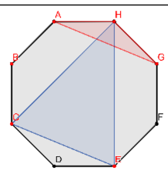
首先我們先研究在正七邊形中放入兩個黑點，會有幾個等腰三角形，稍微思考之後發現，黑點有三種擺放方式，分別是兩點相鄰，間隔一點，間隔兩點（間隔三點不記錄因為從反方向來看就是間隔一點、兩點），利用這三張圖中的紅點，將七邊形的頂點連線後發現，每一種黑點擺放方式，組成的等腰三角形的個數都是 6 個，如表(一)所示。

表(一) 正七邊形中放入兩個黑點，等腰三角形的個數

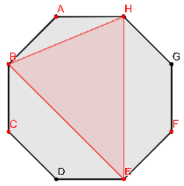
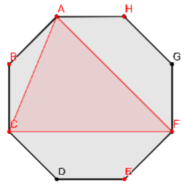
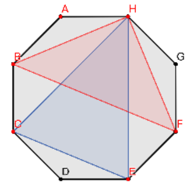
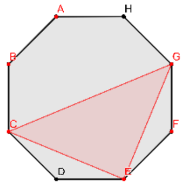
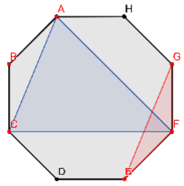
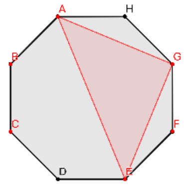
間隔	等腰三角形種類
0	
1	
2	

接下來，我們思考在正八邊形中放入兩個黑點，發現黑點有四種擺放方式，分別是間隔為零、一、二、三點，利用這四張圖中的紅點，連線後發現，組成的三角形個數是 8、10、8、8 個，如表(二)所示。

表(二) **正八邊形中放入兩個黑點，等腰三角形的個數**

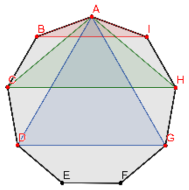
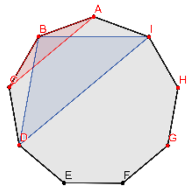
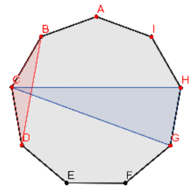
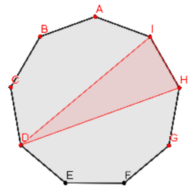
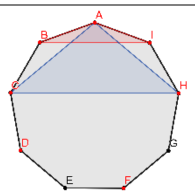
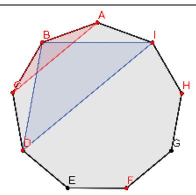
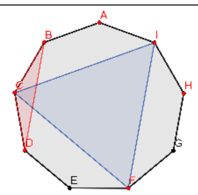
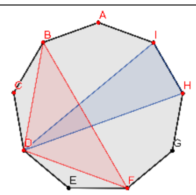
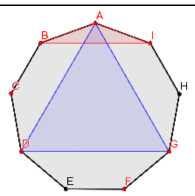
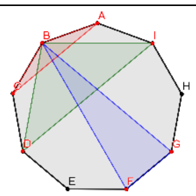
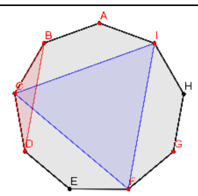
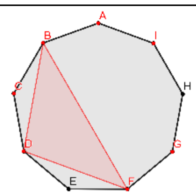
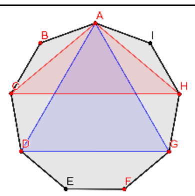
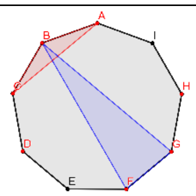
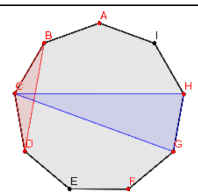
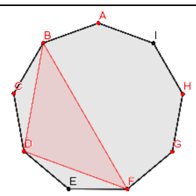
間隔	**頂角**			
	A	**B**	**C**	**D**
0				
1				
2				
3				
間隔	**頂角**			
	E	**F**	**G**	**H**
0				
1				

續表(二)

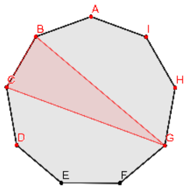
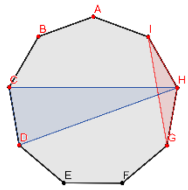
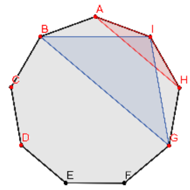
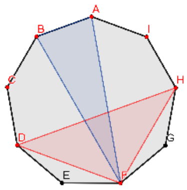
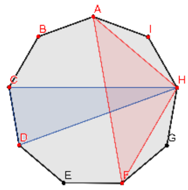
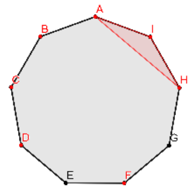
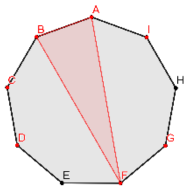
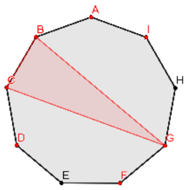
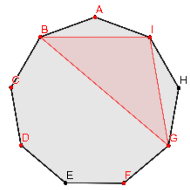
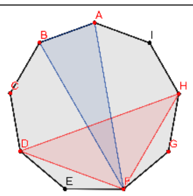
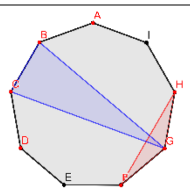
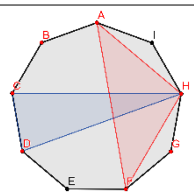
2				
3				

再來，我們思考在正九邊形中放入兩個黑點，發現黑點一樣有四種擺放方式，分別是間隔為零、一、二、三點，利用這四張圖中的紅點，連線後發現，每一種黑點擺放方式，組成的等腰三角形個數分別是 13、13、11、13，如表(三)所示

表(三) **正九邊形中放入兩個黑點，等腰三角形的個數**

間隔	**頂角**			
	A	**B**	**C**	**D**
0				
1				
2				
3				

續表（三）

間隔	頂角			
	F	**G**	**H**	**I**
0				
1				
2				
3				

經由上述的實驗結果，我們總結正七邊形到正九邊形中放入兩個黑點的等腰三角形個數，如表(四)所示。

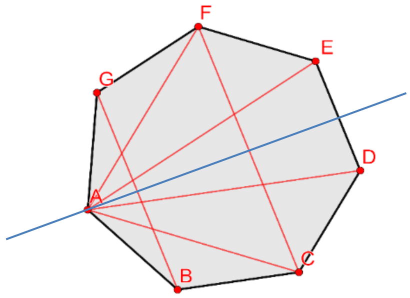
表(四) **正七邊形到正九邊形中放入兩個黑點，等腰三角形的個數**

邊數 / 間隔	七	八	九
0	6	8	13
1	6	10	13
2	6	8	11
3		8	13

為方便計算，我們固定頂角或底角後訂出兩方法。

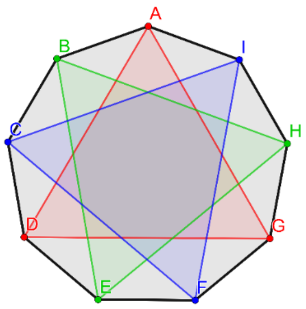
第一個方法：頂角法

我們利用正多邊形中的紅點去找另外兩個可以連成等腰三角形的紅點，取任意頂點，作對稱線過此點，如圖一中藍線，看有沒有對稱的點，一組對稱點就是一個等腰三角形，圖(一)中有三組就是以 A 點為頂角所組成的三個等腰三角形，此種方法我們命名為頂角法。



圖(一)

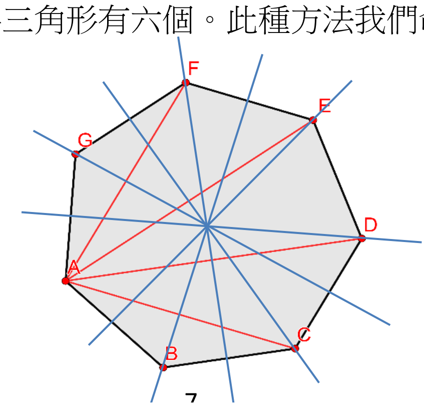
但是我們發現在可以被三整除的正多邊形中會有正三角形，所以會重複數到，如圖(二)中的正九邊形的正三角有三個，所以每有一個正三角形就會使理論數值少 2。



圖(二)

第二種方法：底角法

我們利用正多邊形中的兩個紅點連線去找可以連成等腰三角形的頂點。如圖(三)，以 A 點為底角為例，作 A 點與其他頂點的連線$(\overline{AG}$、$\overline{AF}$、$\overline{AE}$、$\overline{AD}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB})$，在其上作垂直平分線如圖中藍線，觀察藍線上是否有頂點，若有組成一個等腰三角形。圖中有六條藍線上有頂點，則以 A 點為底角組成的等腰三角形有六個。此種方法我們命名為底角法。



圖(三)

用了以上這兩種方法之後，我們發現使用底角法會數到重複的三角形，而頂角法則不會重複，所以使用頂角法會明顯比底角法來的更有效率 ，於是我們利用頂角法快速得出了正六~十四邊形中放入兩個黑點，等腰三角形的個數，如表(五)所示。

表(五) **正六~十四邊形中放入兩個黑點，等腰三角形的個數**

邊數 / 間隔	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四
0	**2**	**6**	**8**	**13**	**18**	**28**	**28**	**45**	**50**
1	**2**	**6**	**10**	**13**	**20**	**28**	**30**	**45**	**52**
2		**6**	**8**	**11**	**18**	**28**	**28**	**45**	**50**
3			**8**	**13**	**20**	**28**	**28**	**45**	**52**
4					**16**	**28**	**28**	**45**	**50**
5							**28**	**45**	**52**
6									**48**

從上面的統計表中我們得到幾個發現：π

1・在任意奇數邊形中的兩點不管為在何處皆會組成同樣數量的三角形。

2・在正多邊形邊數為 3 的倍數時會有正三角形存在，所以三角形個數會因正三角形的數量而減少，在黑點間隔剛好為邊數除三減一時減少最多。

接下來我們簡化問題，將原題中的限制移除，從沒有黑點開始思考問題（如問題 1），再一步步將限制加回問題中。

問題 1：正 n 邊形中無黑點的情況下等腰三角形有多少？

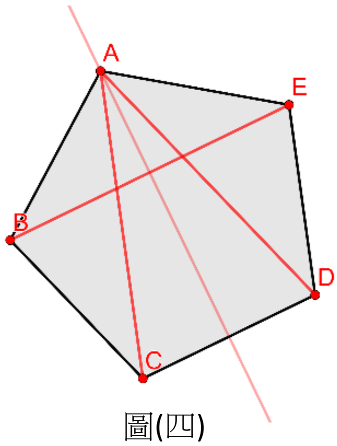
猜想:將頂角法數數方法列式可得沒有黑點公式為$(n)\left[\frac{(n-k)}{2}\right]$，這個公式是由單一頂角所組成的三角形 $\frac{(n-k)}{2}$ ，再乘上頂點數 n ，而 k 則是無法和其他點組成等腰三角形的頂點，所以當正 n 邊形的邊數為奇數時 k 設為 1，為偶數時 k 設為 2。

說明：

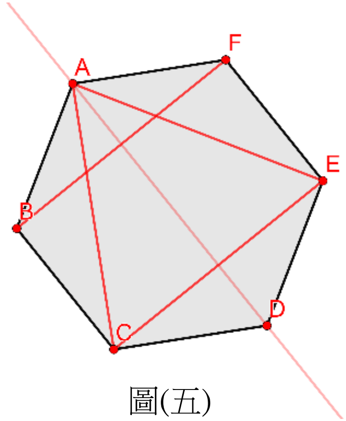
一、奇數邊：$(\boldsymbol{n})\left[\frac{(\boldsymbol{n-1})}{\boldsymbol{2}}\right]$

以正五邊形圖(四)為例

等腰三角形個數＝$5\left[\frac{(5-1)}{2}\right]=10$



圖(四)



圖(五)

二、偶數邊：$(\boldsymbol{n})\left[\frac{(\boldsymbol{n-2})}{\boldsymbol{2}}\right]$

以正六邊形圖(五)為例

等腰三角形個數＝$6\left[\frac{(6-2)}{2}\right]=12$

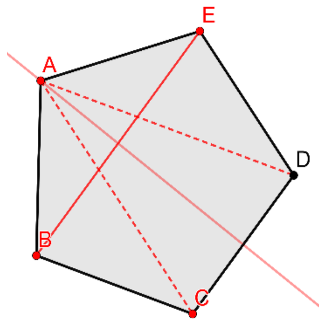
三、特殊情況：但以上兩種方法無法表示 $n=3a\ \ a\in\mathbb{N}$ 的情況，所以在沒有黑點時需減少的三角形個數為 $2\binom{n}{3}$

修正後的公式： $(\boldsymbol{n})\left[\frac{(\boldsymbol{n-k})}{\boldsymbol{2}}\right]-\boldsymbol{2}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}$

再來我們把限制加回問題中，變成在正多邊形中放入一個黑點 （如問題 2）。

問題 2：正 n 邊形中有一個黑點的情況下等腰三角形有多少？

猜想：依照沒有黑點的思路將公式調整成 $(n-1)\left[\frac{(n-k)}{2}-1\right]$，在公式中的 -1 分別表示被黑點佔用的頂點數和被黑點佔用的等腰三角形。



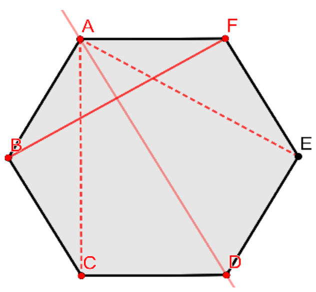
圖(六)

說明：

一、奇數邊：$(\boldsymbol{n-1})\left[\frac{(\boldsymbol{n-1})}{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{1}\right]$

以正五邊形圖(六)為例

等腰三角形個數 $=(5-1)\left[\frac{(5-1)}{2}-1\right]=4$



圖(七)

二、偶數邊：$(\boldsymbol{n-1})\left[\frac{(\boldsymbol{n-2})}{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{1}\right]+\boldsymbol{1}$

以正六邊形圖(七)為例

等腰三角形個數 $=(6-1)\left[\frac{(6-2)}{2}-1\right]=5$

在偶數邊形的公式比奇數多了一個 $+1$ ，是因為黑點在頂角的對角時不會影響到其他三角形的組成，而這種情況只會發生一次所以要補回一個 $+1$。

三、特殊情況：但在$n=3a$的情況中沒有黑點時需再減少的三角形個數為 $2\left(\frac{n}{3}-1\right)$

修正後的公式：$\boldsymbol{(n-1)\left[\frac{(n-k)}{2}-1\right]-2\left(\frac{n}{3}-1\right)}$

解決了簡化後的問題後，再回頭來看原本的問題。

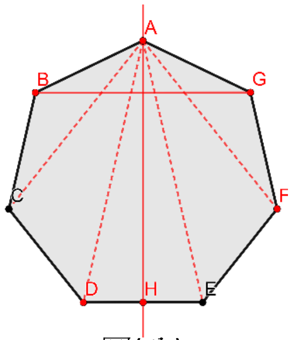
原題：正 n 邊形中有兩個黑點的情況下等腰三角形有多少？

猜想：以此類推我們來將原本的問題，在正多邊形中放入兩個黑點，轉化為公式

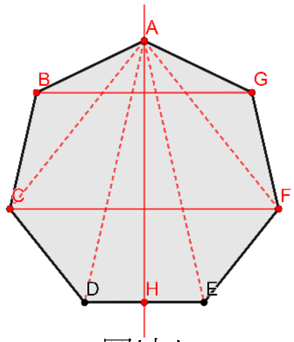
$$(n-2)\left[\frac{(n-k)}{2}-2\right]$$

說明：

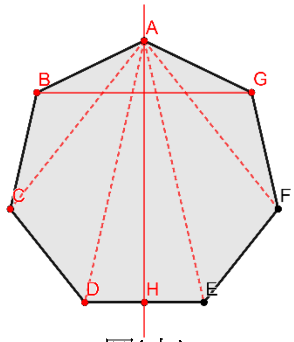
一、奇數邊：$(n-2)\left[\frac{(n-1)}{2}-2\right]$



圖(八)



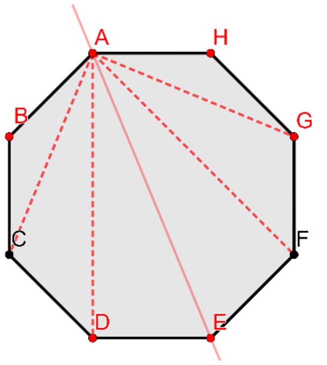
圖(九)



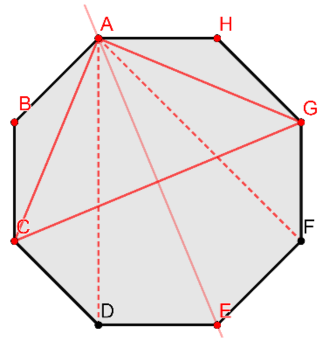
圖(十)

在實際畫過圖後我們發現若以線段 $\overline{AH}$ 為七邊形的對稱軸會有三種情況分別是如圖(八)黑點在對稱軸兩側且互不為對稱點、如圖(九)黑點互為對稱點、如圖(十)黑點在對稱軸同一側且互不為對稱點，以上三種情況中都會造成三角形個數的變化，但在圖(九)黑點互為對稱點的情況下會造成最小的影響，因為黑點所佔用的底角在同一個三角形中，而其他的黑點擺放方式都會同時佔用兩個三角形，這種變化，在更換頂角位置後都會因為方向的改變而得到影響最小的擺放情況。所以我們得到了下列公式：$\boldsymbol{(n-2)\left[\frac{(n-1)}{2}-2\right]+1}$

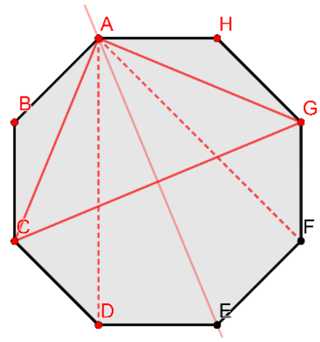
二、偶數邊：$(n-2)\left[\frac{(n-2)}{2}-2\right]$



圖(十一)



圖(十二)

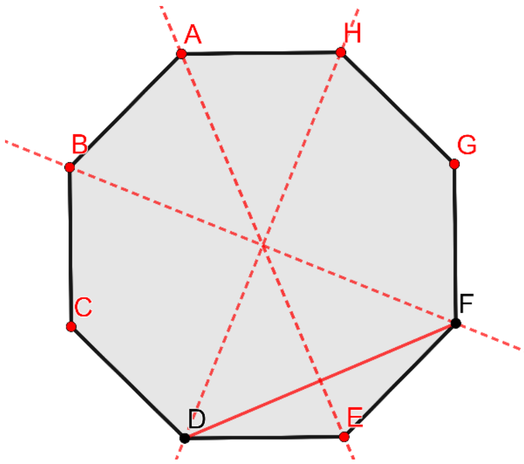


圖(十三)

跟奇數邊形一樣我們發現發現若以線段 $\overline{AE}$ 為八邊形的對稱軸會有三種情況分別是，如圖(十一)黑點在對稱軸兩側但互不為對稱點、如圖(十二)黑點在對稱軸兩側且互為對稱點、如圖(十三)黑點在對稱軸上而另一個在對稱軸一側，以上三種情況中都會造成三角形個數的變化，但在圖(十二)黑點在對稱軸兩側且互為對稱點和圖(十三)黑點在對稱軸上而另一個在對稱軸一側的情況下會造成最小的影響。

因為黑點所佔用的底角在同一個三角形中或是有一個黑點無效，而其他的黑點擺放方式都會同時佔用兩個三角形，這種變化，在更換頂角位置後都會因為方向的改變而得到影響最小的擺放情況，但與奇數邊形不同的是偶數邊形有跟多種造成最小影響的黑點擺放方式，所以不只一個頂點會被影響，就如同統計表一樣等腰三角形的個數會出現有規律的增加或減少。

為此我們製作了一種可以快速判別增加個數的方法，就是將兩點連線後判斷他的垂直平分線上是否有其他頂點，以圖(十四)為例判斷線段 DF 的垂直平分線是否有經過 A、E 兩點，每有一個就增加一個三角形個數，若黑點對角是頂點就加一個三角形。但是這樣以一個個的數實在是太慢了，所以我們想要找到一種可以通過黑點之間關係便可看出增加數值的判別式，我們將兩黑點之間的間隔數以數對(x,y)表示，x,y表示黑點之間的紅點數量。



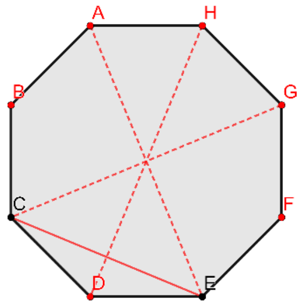
圖(十四)

通過計算後得出公式：$\boldsymbol{(n-2)\left[\frac{(n-2)}{2}-2\right]+y}$

y 值就等於下列判別式的數值

1. x為奇數時就加 4

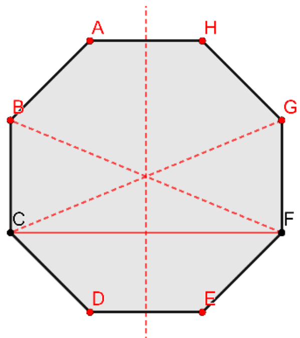
以圖（十四之一）為例，E 點的對角 A 點為紅點，以 A 點為頂角組成等腰三角形時被影響的個數會減一，所以需在公式中**加 1** ，同理 C 點的對角 G 點為紅點，再**加 1**，黑點連線 $\overline{CE}$ 的中垂線上有個紅點 D、H ，將 D、H 點作為頂角組成等腰三角形時被影響的個數會分別**減 1**，所以需在公式中**加 2** 。



圖(十四之一)

2. x為偶數時就加 2

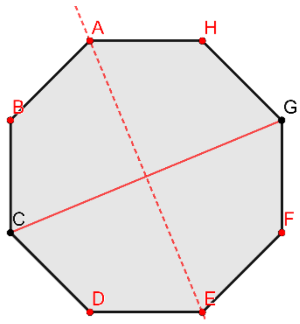
以圖（十四之二）為例，同上 C 點的對角 G 點為紅點，**加 1**，F 點的對角 B 點為紅點，再**加 1**，但與第一種不同的是黑點連線 $\overline{CF}$ 的中垂線上沒有紅點，所以不用加。



圖(十四之二)

3. $x=y$為奇數時就加 2

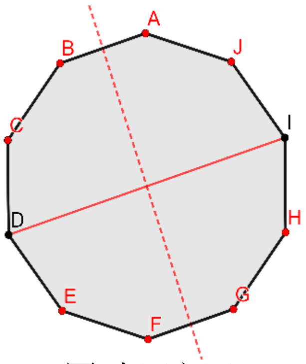
以圖（十四之三）為例，C 點的對角 G 點不為紅點，所以不用加，但黑點連線 $\overline{CG}$ 的中垂線上有個紅點 A、F ，所以需在公式中**加 2**。



圖(十四之三)

4. $x = y$為偶數時就加 0

以圖（十四之四）為例，D 點的對角 I 點不為紅點，所以不用加，且黑點連線 $\overline{DI}$ 的中垂線上沒有紅點，所以也不用加。



圖(十四之四)

三、特殊情況：但在 $n = 3a$ 的情況下還需再減掉重複數到的三角形，所以若 $\frac{n}{3} = x \; or \; y$ 時

減 $2\left(\frac{n}{3} - 2\right)$，

若 $\frac{n}{3} \neq x \; or \; y$ 時減 $2\left(\frac{n}{3} - 1\right)$

接下來我們將問題推廣成更多黑點，開始研究三個黑點（問題 3）。

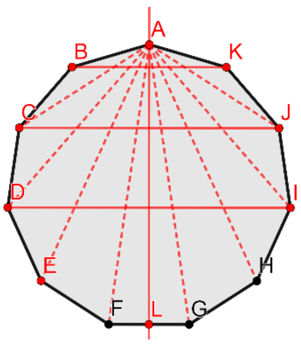
問題 3：正 n 邊形中有三個黑點的情況下等腰三角形有多少？

猜想：根據之前的研究，列出公式 $(n-3)\left[\frac{(n-k)}{2} - 3\right]$

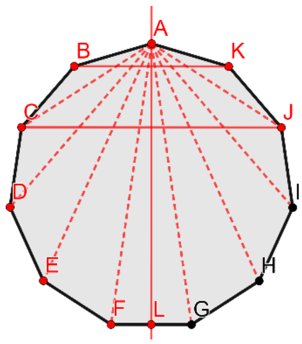
一樣將問題分為奇數邊、偶數邊兩個部分

說明：

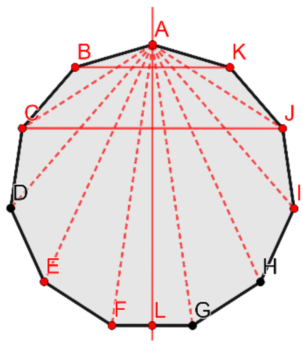
一、奇數邊：$(n-3)\left[\frac{(n-1)}{2} - 3\right]$



圖(十五)



圖(十六)



圖(十七)

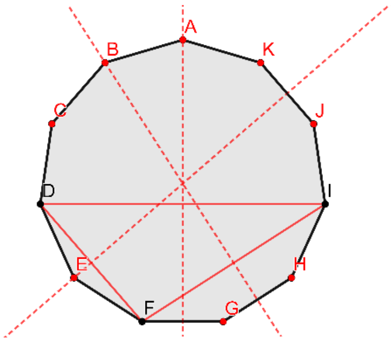
和兩點一樣若以線段 $\overline{\mathrm{AL}}$ 為正十一邊形的對稱軸可以為三種情況分別是，如圖(十五)兩點互為對稱點而另一點在對稱軸的一側、如圖(十六)三點全部在對稱軸的同一側、如圖(十七)三點互不為對稱點，在三種情況中只有圖(十五)兩點互為對稱點而另一點再對稱軸的一側的情況會造成最小的影響，同樣是用垂直平分線來判斷三角形增加的個數，我們將三個黑點之間的間隔以數對(x,y,z)表示，總結後我們得出新的公式：

$$(\boldsymbol{n}-\mathbf{3})\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}}-\mathbf{3}\right]+\boldsymbol{y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式(一)}$$

y 值就由下列判別式算出

1. 在$x \neq y \neq z$時加 3

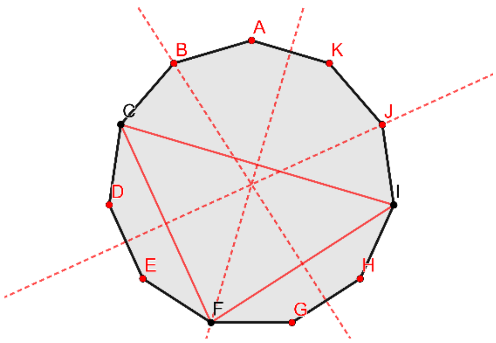
以圖（十四之五）為例，與偶數邊形中兩個黑點大致相同，相同的是黑點連線 $\overline{\mathrm{DF}}$、$\overline{\mathrm{FI}}$、$\overline{\mathrm{DI}}$ 的中垂線上的紅點有 E、B、A三點，所以**加 3** ，而不同的是在奇數邊形中的黑點不會有對角，所以無須增加。



圖(十四之五)

2. 在$x = y \ or \ y = z \ or \ x = z$時加 2

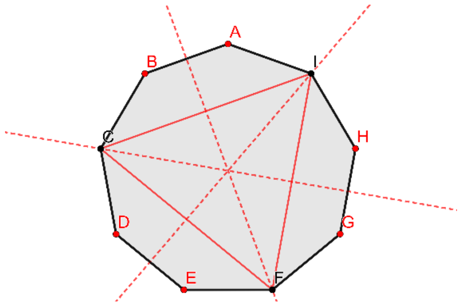
以圖（十四之六）為例，黑點連線 $\overline{\mathrm{CI}}$、$\overline{\mathrm{CF}}$、$\overline{\mathrm{FI}}$ 的中垂線上的紅點有 J、B 兩點，所以**加 2**



圖(十四之六)

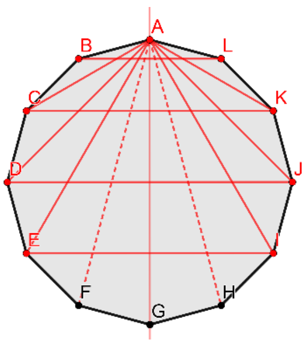
3. $x = y = z$ 時加 0

以圖（十四之七）為例，黑點連線 $\overline{CF}$、$\overline{FI}$、$\overline{CI}$ 中垂線上沒有紅點，所以不需要增加三角形個數。

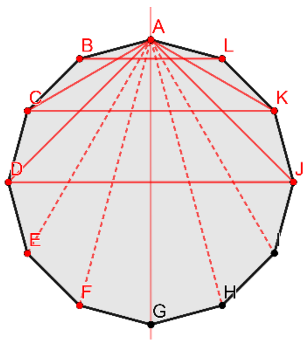


圖(十四之七)

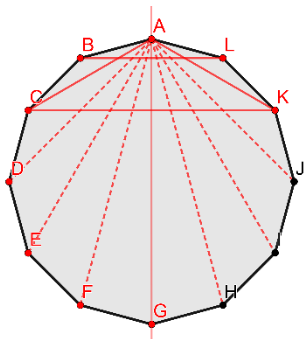
二、偶數邊：$(n-3)\left[\frac{(n-2)}{2}-3\right]$



圖(十八)



圖(十九)



圖(二十)

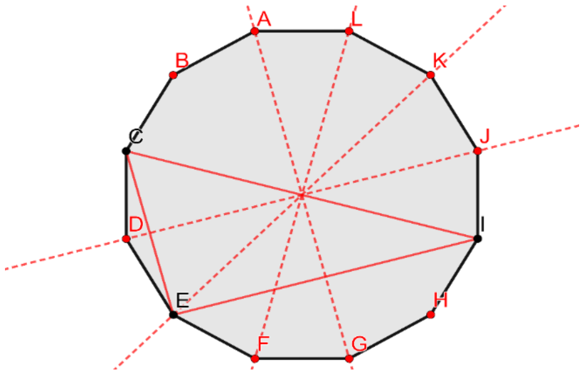
跟奇數一樣也可以大致分為三種情況分別是，如圖(十八)其中兩點平行、如圖(十九)其中一點在對角其他全部交錯、如圖(二十)三點全部在同一側，在三種情況中只有其中兩點平行會造成最小的影響，同樣是用垂直平分線來判斷三角形增加的個數，我們將三個黑點之間的間隔以數對(x,y,z)表示，總結後我們得出了新的公式：

$$\boldsymbol{(n-3)\left[\frac{(n-2)}{2}-3\right]+y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{公式(二)}$$

y 值就由下列判別式算出

1. 在 $x \ or \ y \ or \ z$ 為奇數時時加 2
2. 在 $x \ or \ y \ or \ z$ 為偶數時加 0
3. $x \neq y \ or \ y \neq z \ or \ x \neq z$ 時再加 1
4. 在 $x = y + z + 1$ 時再減 2
5. 在 $y = x + z + 1$ 時再減 2
6. 在 $z = x + y + 1$ 時再減 2

以圖（十四之八）為例，黑點間隔為 $(1，3，5)$，依照判別式 1. 應**加 6** ，因為黑點連線$\overline{CE}$、$\overline{EI}$、$\overline{CI}$ 的中垂線上的紅點有 D、F、G、J、K、L、A ，依照判別式 3. 應**加 3**，但是依照判別式 6. 應**減 2**，因為 C 點的對角 I 點不為紅點，而 E 點的對角 K 為紅點，所以**加 1** 。



圖(十四之八)

三：特殊情況：

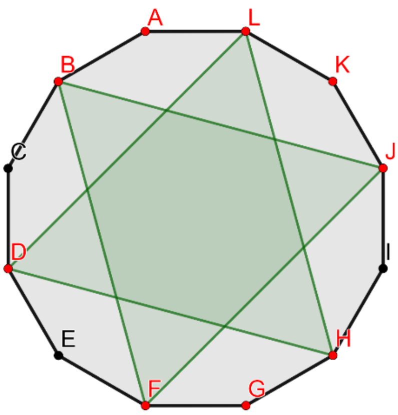
但在$n=3a$的情況下還需再減掉重複數到的三角形，也就是 $2\left(\frac{n}{3}-T\right)$ ，在其中的 $\frac{n}{3}$ 就是正 n 邊形中的正三角形個數，而 T 則是被黑點所佔用的正三角形個數，

為方便說明我們依據黑點間隔(x,y,z)以逆時鐘重新訂定黑點的位置編號

$(1，2+x，3+x+y)=(b,c,d)$，

(b,c,d)中若每有一組同餘模 $\frac{n}{3}$，則代表有多個黑點在同個正三角形中，所以同餘模 $\frac{n}{3}$ 的組數等於被多個黑點佔用的正三角形個數 T 。

如圖(十四之九)，以正十二邊形，黑點間隔$(1，3，5)$為例，C 點為 1 ， E 點為 $1+2=3$ ，I 點為 $1+3+3=7$ ，統整後轉化成 $(1，3，7)$，其中 $\frac{12}{3}=4$ 而 $3\equiv 7(mod4)$ 、$1\equiv 1(mod4)$ ，共有兩組所以 $T=2$，$2\left(\frac{12}{3}-2\right)=4$ 需**減 4**。



圖(十四之九)

綜合公式(一)、(二)以及需減去的 $2\left(\frac{n}{3}-T\right)$ 得到：

奇數且$n=3a$：$(n-3)\left[\frac{(n-1)}{2}-3\right]+y-2\left(\frac{n}{3}-T\right)$。

偶數且$n=3a$：$(n-3)\left[\frac{(n-2)}{2}-3\right]+y-2\left(\frac{n}{3}-T\right)$。

接下來我們將問題推廣到四個黑點（如問題 4）。

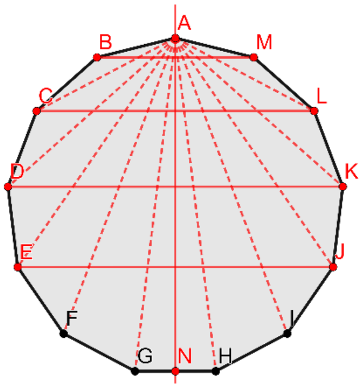
問題 4：正 n 邊形中有四個黑點的情況下等腰三角形會有多少？

猜想：根據之前的研究，列出公式 $(n-4)\left[\frac{(n-k)}{2}-4\right]$

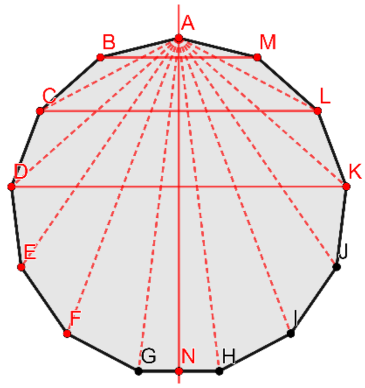
一樣將問題分為奇數邊、偶數邊兩個部分。

說明：

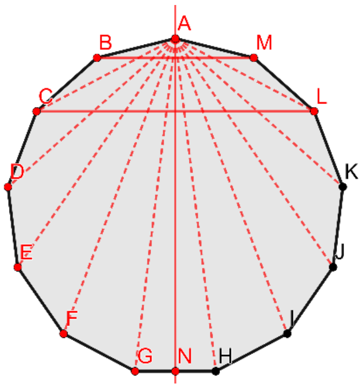
一、奇數邊：$(n-4)\left[\frac{(n-1)}{2}-4\right]$



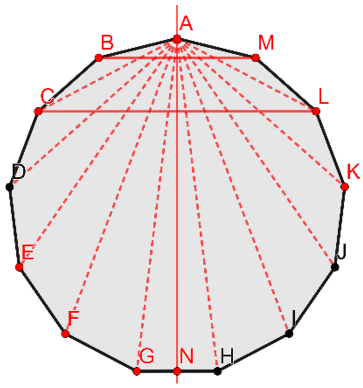
圖(二十一)



圖(二十二)



圖(二十三)



圖(二十四)

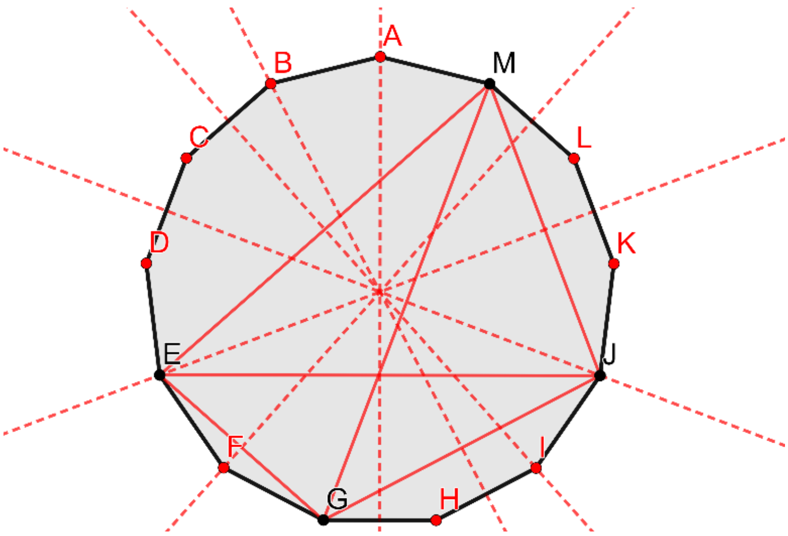
四點的情況若以線段 $\overline{AN}$ 為十三邊形的對稱軸可以為四種情況分別是，如圖(二十一)四點互為對稱點、如圖(二十二)其中兩點互為對稱點、如圖(二十三)四點互不為對稱點且在對稱軸的同一側、如圖(二十四) 四點互不為對稱點，在四種情況中只有圖(二十一)四點互為對稱點的情況下會造成最小的影響，同樣是用垂直平分線來判斷三角形增加的個數，我們將四個黑點之間的間隔化為(x,y,z,a)，總結後我們得出了新的公式：

$$\boldsymbol{(n-4)\left[\frac{(n-1)}{2}-4\right]+y}$$ ………… 公式(三)

y 值就由下列判別式算出

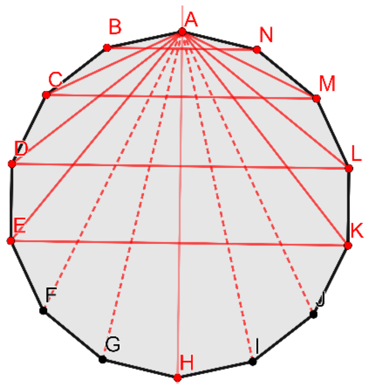
1. 在 $x \neq y+z+1$ and $a \neq y+z+1$時加 1
2. 在 $x \neq z+a+1$ and $y \neq z+a+1$時加 1
3. 在 $z \neq a+x+1$ and $y \neq a+x+1$時加 1
4. 在 $z \neq x+y+1$ and $a \neq x+y+1$時加 1
5. $(x \neq y \text{ and } z \neq a)$時加 1
6. $(y \neq z \text{ and } a \neq x)$時加 1

以圖（十四之十）為例，黑點間隔為 $(1，2，2，4)$，根據判別式 1.應**加 1** ，因為黑點連線 $\overline{EG}$ 的中垂線上有紅點 E 點，根據判別式 2.應**加 1** ，因為黑點連線 $\overline{GJ}$ 的中垂線上有紅點 B 點，根據判別式 3.應**加 1** ，因為黑點連線 $\overline{EJ}$ 的中垂線上有紅點 A 點，根據判別式 4.應再**加 1**。

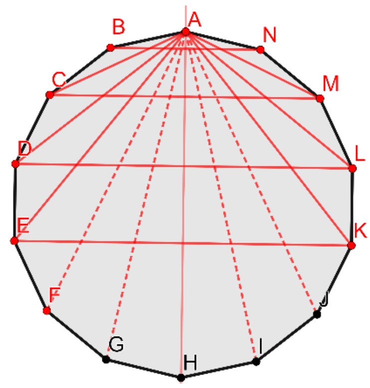


圖(十四之十)

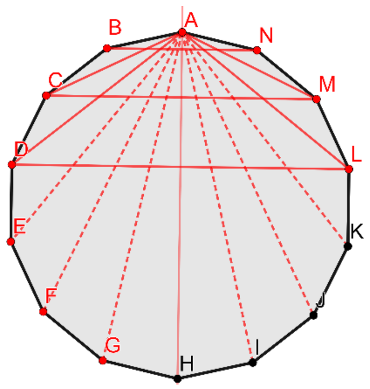
二、偶數邊：$(n-4)\left[\frac{(n-2)}{2}-3\right]$



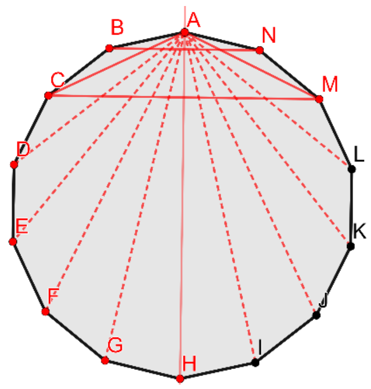
圖(二十五)



圖(二十六)



圖(二十七)



圖(二十八)

跟奇數邊形差不多若以線段 $\overline{AH}$ 為十四邊形的對稱軸可以為四種情況分別是，如圖(二十五)四點互為對稱點、如圖(二十六)其中兩點互為對稱點、如圖(二十七) 其中一點在對稱軸上而其他點互不為對稱點、如圖(二十八) 四點互不為對稱點且在對稱軸同一側，在四種情況中只有圖(二十五)四點互為對稱點的情況下會造成最小的影響，同樣是用垂直平分線來判斷三角形增加的個數，我們將四個黑點之間的間隔化為(x,y,z,a)，總結後我們得出了新的公式：

$\boldsymbol{(n-4)\left[\frac{(n-2)}{2}-4\right]+y}$ ………… 公式(四)

y 值就由下列判別式算出

1. 在$x\ or\ y\ or\ z\ or\ a$ 為奇數時加 2
2. 在$x\ or\ y\ or\ z\ or\ a$ 為偶數時加 0
3. 在$x\neq y\ or\ y\neq z\ or\ z\neq a\ or\ a\neq x$ 時再加 1

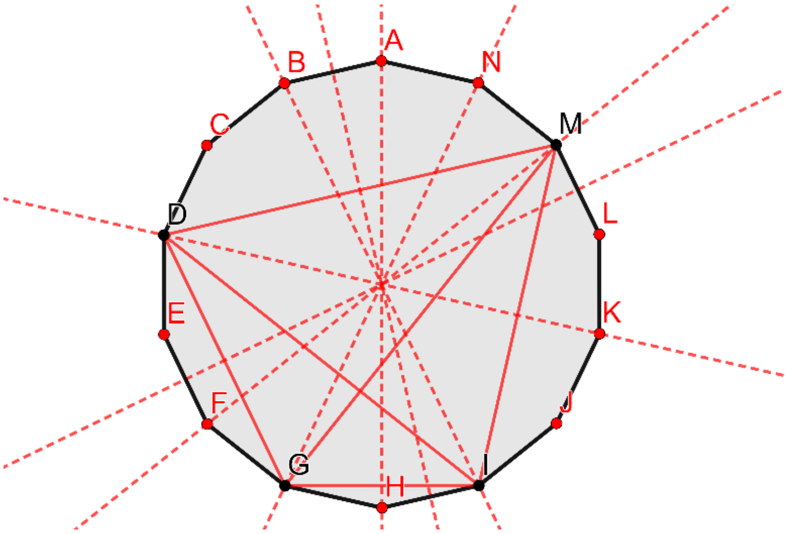
4. 在 $a=x+y+1$ 時減 1

5. 在 $y=z+a+1$ 時減 1

6. 在 $z=a+x+1$ 時減 1

7. 在 $x=y+z+1$ 時減 1

以圖（十四之十一）為例，黑點間隔為 $(2,1,3,4)$，根據判別式 1.應加 **4** ，但根據判別式 4. 應再**減 1** ，因為黑點連線 $\overline{IM}$ 的中垂線上有紅點 K 點和黑點 D 點，黑點連線 $\overline{GI}$ 的中垂線上有紅點 H、A 兩點，根據判別式 3. 應加 4 ，因為黑點D、G、I、M 的對角為紅點 K、N、B、F 四點。



圖(十四之十一)

三、特殊情況：

但在$n=3a$的情況下還需再減掉重複數到的三角形，也就是 $2\left(\frac{n}{3}-T\right)$ ，在其中的 $\frac{n}{3}$ 就是正 n 邊形中的正三角形個數，而 T 則是被黑點所佔用的正三角形個數，為方便說明我們依據黑點間隔(x,y,z,a)以逆時鐘重新訂定黑點的位置編號

$(1,2+x,3+x+y,4+x+y+z)=(b,c,d,e)$，

(b,c,d,e)中若每有一組同餘模 $\frac{n}{3}$，則代表有多個黑點在同個正三角形中，所以同餘模 $\frac{n}{3}$ 的組數等於被多個黑點佔用的正三角形個數 T 。

綜合公式(三)、(四)以及需減去的$2\left(\frac{n}{3}-T\right)$得到：

奇數且$n=3a$：$(n-4)\left[\frac{(n-1)}{2}-4\right]+y-2\left(\frac{n}{3}-T\right)$。

偶數且$n=3a$：$(n-4)\left[\frac{(n-2)}{2}-4\right]+y-2\left(\frac{n}{3}-T\right)$。

伍、研究結果

問題 1：正 n 邊形中無黑點的情況下等腰三角形有多少？

無黑點的公式為$(\boldsymbol{n})\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{2}}\right]$。

$\frac{(n-k)}{2}$是由單一頂角所組成的三角形，再乘上頂點數 n ，而 k 則是無法和其他點組成等腰三角形的頂點，當正 n 邊形的邊數為奇數時 k 設為 1，為偶數時 k 設為 2。

但在$n=3a$的情況中會有正三角形存在，三角形個數會因正三角形的數量而減少，在沒有黑點時需減少的三角形個數為 $2\left(\frac{n}{3}\right)$。

問題 2：正 n 邊形中有一個黑點的情況下等腰三角形有多少？

將無黑點的公式調整成 $(n-1)\left[\frac{(n-k)}{2}-1\right]$。

公式中的 -1 分別表示被黑點佔用的頂點數和被黑點佔用的三角形：

奇數邊：$(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})}{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{1}\right]$

偶數邊：$(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2})}{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{1}\right]+\boldsymbol{1}$

因為黑點在頂角的對角時不會影響到其他三角形的組成，而這種情況只會發生一次所以要補回一個$+1$。

而在$n=3a$的情況中有一個黑點時需再減少的三角形個數為 $2\left(\frac{n}{3}-1\right)$，

所以公式為：$(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{1}\right]-\boldsymbol{2}\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}-\boldsymbol{1}\right)$。

原題：正 n 邊形中有兩個黑點的情況下等腰三角形有多少？

我們將兩黑點之間的間隔化為(x,y)，x,y表示黑點之間的紅點數量，將兩點連線後，垂直平分線上每有一個紅點就增加一個三角形個數，黑點對角是紅點也加一個三角形個數。

1. x為奇數時就加 4
2. x為偶數時就加 2
3. $x=y$為奇數時就加 2
4. $x=y$為偶數時就加 0

但在 $n=3a$ 的情況下還需再減掉重複數到的三角形，所以 $\frac{n}{3}=x\ or\ y$ 時減 $2\left(\frac{n}{3}-2\right)$，

$\frac{n}{3}\neq x\ or\ y$ 時減 $2\left(\frac{n}{3}-1\right)$。

問題 3：正 n 邊形中有三個黑點的情況下等腰三角形有多少？

我們將三個黑點之間的間隔化為(x, y, z)

奇數邊：$\boldsymbol{(n-3)\left[\frac{(n-1)}{2}-3\right]+y}$

1. 在$x \neq y \neq z$時加 3
2. 在$x = y\ or\ y = z\ or\ x = z$時加 2
3. 在$x = y = z$時加 0

偶數邊：$\boldsymbol{(n-3)\left[\frac{(n-2)}{2}-3\right]+y}$

1. 在 $x\ or\ y\ or\ z$ 為奇數時時加 2
2. 在 $x\ or\ y\ or\ z$ 為偶數時加零
3. $x \neq y\ or\ y \neq z\ or\ x \neq z$ 時再加 1
4. 在 $x = y + z + 1$ 時再減 2
5. 在 $y = x + z + 1$ 時再減 2
6. 在 $z = x + y + 1$ 時再減 2

但在$n = 3a$的情況下還需再減掉重複數到的三角形，也就是 $2\left(\frac{n}{3}-T\right)$ ，

T 是被黑點所佔用的正三角形個數，我們依據黑點間隔(x, y, z)以逆時鐘重新訂定黑點的位置編號$(1，2 + x，3 + x + y) = (b, c, d)$，

(b, c, d)中若每有一組同餘模 $\frac{n}{3}$，代表有多個黑點在同個正三角形中，所以同餘模 $\frac{n}{3}$ 的組數等於被多個黑點佔用的正三角形個數 T 。

問題 4：正 n 邊形中有四個黑點的情況下等腰三角形會有多少？

我們將四個黑點之間的間隔化為(x, y, z, a)

奇數邊：$\boldsymbol{(n-4)\left[\frac{(n-1)}{2}-4\right]+y}$

1. 在 $x \neq y + z + 1\ \text{and}\ \mathrm{a} \neq \mathrm{y} + \mathrm{z} + 1$時加 1
2. 在 $x \neq z + a + 1\ \text{and}\ \mathrm{y} \neq \mathrm{z} + \mathrm{a} + 1$時加 1
3. 在 $z \neq a + x + 1\ \text{and}\ \mathrm{y} \neq \mathrm{a} + \mathrm{x} + 1$時加 1
4. 在 $z \neq x + y + 1\ \text{and}\ \mathrm{a} \neq \mathrm{x} + \mathrm{y} + 1$時加 1
5. $(x \neq y\ and\ z \neq a)$時加 1
6. $(y \neq z\ and\ a \neq x)$時加 1

偶數邊：$(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{4})\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2})}{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{4}\right]+\boldsymbol{y}$

1. 在$x\ or\ y\ or\ z\ or\ a$ 為奇數時加 2
2. 在$x\ or\ y\ or\ z\ or\ a$ 為偶數時加 0
3. 在$x\neq y\ or\ y\neq z\ or\ z\neq a\ or\ a\neq x$ 時再加 1
4. 在 $\mathrm{a}=\mathrm{x}+\mathrm{y}+1$ 時減 1
5. 在 $\mathrm{y}=\mathrm{z}+\mathrm{a}+1$ 時減 1
6. 在 $z=a+x+1$ 時減 1
7. 在 $\mathrm{x}=\mathrm{y}+\mathrm{z}+1$ 時減 1

但在$n=3a$的情況下還需再減掉重複數到的三角形，也就是 $2\left(\frac{n}{3}-T\right)$ ，我們依據黑點間隔(x,y,z,a)以逆時鐘重新訂定黑點的位置編號

$(1，2+x，3+x+y，4+x+y+z)=(b,c,d,e)$，

在(b,c,d,e)中同餘模 $\frac{n}{3}$ 的組數等於被多個黑點佔用的正三角形個數 T 。

陸、討論

此次研究我們把它分為三個部分，分別是 1.探討正 n 邊形中的等腰三角形個數爲何；2. 在正 n 形中放入兩個限制點的等腰三角形個數爲何；3. 在正 n 形中放入多個限制點的等腰三角形個數爲何

1. 在第一個部分裡，我們先從數數方法著手，有兩個分別是頂角法和底角法，但是後者會重複數到同一個三角形，所以我們接續的研究都只使用頂角法，基於頂角法我們找到了一個公式$(n)\left[\frac{(n-k)}{2}\right]$，這個公式可以解決所有正多邊形不論是奇數還是偶數，只要將 k 的值依照奇偶改變就可。

2. 接著在正 n 形中放入兩個限制點的部分，先使用頂角法列出等腰三角形的個數，接著我們將第一部分中的公式改進得到$(n-2)\left[\frac{(n-k)}{2}-2\right]$，改變的部分是因爲有三角形被黑點佔用了，但我們發現理論數值和我們實際數到的數值不一樣，仔細思考後發現限制點的擺放方式會影響三角形的個數，也就是選取不同頂點當作頂角是會有數值的改變，而我們的公式是依據每個頂點當作頂角時的限制點影響的三角形個數都一樣，所以需要在公

式中加入補償值，將公式修改成$(n-2)\left[\frac{(n-k)}{2}-2\right]+y$，但補償值的加減不是固定的，所以我們找到了一種可以通用的補償值數數方式，我們發現當限制點互相對稱以及限制點在頂角的對角時影響的三角形個數最少，於是我們將限制點連綫再作中垂綫，判斷中垂綫上是否有紅點，如果有就代表以其作爲頂角時限制點互爲對稱點，所以有幾個紅點就增加多少三角形來補償，還有就是限制點在對角時，只要判斷限制點的對角是否為紅點就可，但是如果正多邊形恰為三的倍數是會有正三角形出現，代表會重複數，因爲正三角形的三個角都可以作爲頂角，爲了方便辨識一上的所有可能，所以我們將限制點以中間間隔的紅點數區分，以(x,y)表示，總結後得出判斷式得以計算y的值。

3. 再來計算正 n 形中放入多個限制點的等腰三角形個數爲何，根據以上兩部分得出公式$(n-m)\left[\frac{(n-k)}{2}-m\right]+y$，$m$值就表示限制點的數量，但是在更多限制點時，正三角形的數量更難確定，所以我們以限制點間隔重新定出限制點的位置編號，再依照同於性質判斷限制點所佔用的正三角形個數，也就是限制點位置編號$(a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_m)$中若每有一組同餘模 $\frac{n}{3}$，則代表有多個黑點在同個正三角形中，所以同餘模 $\frac{n}{3}$ 的組數等於被多個黑點佔用的正三角形個數 T，所以需減去的重複三角形個數就是$2\left(\frac{n}{3}-T\right)$，總結後$\mathrm{n}=3\mathrm{a}$的公式為$(n-m)\left[\frac{(n-k)}{2}-m\right]+y-2\left(\frac{n}{3}-T\right)$，但因時間問題我們最多只有找到四個限制點的$y$值判斷式。

柒、結論

無黑點：

一般式：$(n)\left[\frac{(n-k)}{2}\right]$。

3 的倍數邊：$(n)\left[\frac{(n-k)}{2}\right]-2\left(\frac{n}{3}\right)$。

一個黑點：

奇數邊：$(n-1)\left[\frac{(n-1)}{2}-1\right]$。

偶數邊：$(n-1)\left[\frac{(n-2)}{2}-1\right]+1$。

3 的倍數邊：$(n-1)\left[\frac{(n-k)}{2}-1\right]-2\left(\frac{n}{3}-1\right)$。

兩個黑點：

奇數邊：$(n-1)\left[\frac{(n-1)}{2}-1\right]$。

偶數邊：$(n-1)\left[\frac{(n-2)}{2}-1\right]+1$。

3 的倍數邊：若 $\frac{n}{3}=x\ or\ y$ 時減 $2\left(\frac{n}{3}-2\right)$,若 $\frac{n}{3}\neq x\ or\ y$ 時減 $2\left(\frac{n}{3}-1\right)$。

三個黑點：

奇數邊：$(n-3)\left[\frac{(n-1)}{2}-3\right]+y$。

偶數邊：$(n-3)\left[\frac{(n-2)}{2}-3\right]+y$。

3 的倍數邊：$(n-3)\left[\frac{(n-k)}{2}-3\right]+y-2\left(\frac{n}{3}-T\right)$。

四個黑點：

奇數邊：$(n-4)\left[\frac{(n-1)}{2}-4\right]+y$。

偶數邊：$(n-4)\left[\frac{(n-2)}{2}-4\right]+y$。

3 的倍數邊：$(n-4)\left[\frac{(n-k)}{2}-4\right]+y-2\left(\frac{n}{3}-T\right)$。

捌、未來展望

1.找出決定公式中 y 值的一般式。

2.找出正 n 邊形內的任意三角形個數。

3.找出正 n 邊形內多個黑點的任意三角形個數。

4.找出 n 邊形內多個黑點的任意三角形個數。

5.找出正 n 面體中的錐體個數。

玖、參考資料及其他

1.國中八下課本 第二章 幾何圖形與尺規作圖。

2.國中八下課本 第三章 三角形的基本性質。

3.森鵬教官的數學題—七邊形之謎。

https://www.ntsec.edu.tw/LiveSupply-Content.aspx?cat=6842&a=6829&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&lsid=15533

拾、心得

報名參加科展後，從一開始的研究再到打報告真的是一個很漫長的過程。再加上我天生就沒有寫報告的天份，因此每次要寫的時候，都會讓我絞盡腦汁。到了交稿前一週，我們連清明連假都待在學校打報告，在這個過程中，我學到了很多，包括要多聽聽別人提出的看法，因為每個人對同個問題的著眼點或許不同，不一樣的解法可能就會得出不一樣的答案，而有不同的結果，這時候就需要透過互相討論來得出正確的結論，這也說明瞭團隊合作的重要。最後我也再次體會到了，想拿到好成績就必須付出，正所謂「天下沒有白吃的午餐」。