篇名：排列與組合

作者：郭妍伶

科別：航運管理科

班級：三年甲班

座號：１４號

排列與組合●前言

在西方，羅馬時代的布衣西亞斯〔約 475-574〕曾經討論過 n 個東西取兩個東西的組合種數。12 世紀印度數學家婆什迦羅〔1114-1185〕已經知道從 n 個元素中每取 m 個元素的組合數、在他的名著《麗羅娃提》中還記述了一個有趣的排列問題：什婆神的十只手分別拿著十樣東西；繩、鉤、蛇、鼓、頭蓋骨、三叉戟、床架、匕首、弓、箭，若十只手交換拿這些東西，共有多少種拿法。婆什迦羅的答案是 10!＝3628800〔種〕。

1321 年法國人本・萊維〔1288-1344〕的著作中對排列組合進行了系統的研究。法國數學家帕斯卡〔1623-1662〕用數學歸納法証明了。

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$$

〔當然他是用語言表達的〕並指出這些組合數可以是二項展開式的各對應項的系統。因此，帕斯卡是排列組合公式的發現者之一。

我國，《周易》中的「四象」、「八卦」是世界公認的排列組合問題最早的研究。宋代沈括〔1031-1095〕在《夢溪筆談》〔1088 年左右〕中討論了圍棋所有擺出的棋局的總數。唐朝一行〔683-727〕計算過這個問題。沈括說：「予嘗思之，此固易耳，但數多，非世間名數可能言之」。意思是：「這個問題是很容易解決的，但計算結果，數值太大，是現有的數名無法表達的」。

沈括得棋局數爲「以一爲基，三百六十一次三乘之」。即 3^{361}。這是因爲棋盤上每格有三種可能，佈黑子、佈白子、空格。因此實際的佈局數就是三個元素取三百六十一個元素的可重複排列數。無論從這個公式的推導及如此大的數的處理上，沈括的工作都是難能可貴的。

排列與組合●正文

一、排列組合公式及定理

1. 直線排列

由n個不的事物中取出m個($m \le n$)排成一列，共有$P^n_m = \frac{n!}{(n-m)!}$種方法。

範例：

甲、乙和丙三人排成一列，想知道有多少種可能的排法，我們可以將所有的排列一一列舉出來，共有：

甲、乙、丙	甲、丙、乙
乙、甲、丙	乙、丙、甲
丙、甲、乙	丙、乙、甲

六種不一樣的排法。當人數變大時，如果要把所有可能的排列一一列舉出來，將是一工程浩大的工作。事實上，若只想知道其可能的排列數，並不需列出其所有可能的排法。以上述甲、乙和丙三人爲例，我們可以將三人排列的位置予以固定，並以如下的作法計算出其排列數。首先，此列中的第一個位置，有甲、乙和丙三人可以選擇；其次，當第一個位置決定人選後，安排第二位置，此時利二人可以選擇；最後，第三個位置則留給最後一個人，沒有其他選擇。由乘法原理可知排列數共有$3 \times 2 \times 1 = 6$種。現考慮較一般的情況，假設有n個不同的事物，將它們排成一列，會有幾種不同的排法呢？仿照上面的討論方式，我們將排列的位置予以編號分別爲$1, 2, \cdots, n$，並按編號依序選擇放置的事物，則：

○,1從 n 個不同的事物中，選一個放入編號 1 的位置，共有 n 種選法。

○,2從剩下的 $n-1$ 個不同的事物中，選擇一個放入編號 2 的位置共有 $n-1$ 種選法。

n 1 從剩下的 2 個不同事物中，選擇一個放入編號 $n-1$ 的位置，共有 2 種選法。

n 從剩下的 1 個不同事物中，選擇一個放入編號 n 的位置，共有 1 種選法。

因此由乘法原理可知排列數共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$ 種。爲了使用上的方便我們將 $n,n-1,\cdots,2,1$ 的連乘積叫作 n 的階乘，並以符號 $n!$ 表示。當 $n=5$ 時，$n!=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$。

最後，我們考慮更一般的情況，假設有 n 個不同的事物，從其中任取 m 個 ($m\leq n$)排成一列，會有幾種不同的排法呢？同樣地，我們將排列的位置編號，分別爲 $1,2,\cdots,m$，並按編號依序選擇放置的事物，則：

○,1從 n 個不同的事物中，選一個放入編號 1 的位置，共有 n 種選法。

○,2從剩下的 $n-1$ 個不同的事物中，選擇一個放入編號 2 的位置共有 $n-1$ 種選法。

m 從剩下的 $n-(m-1)$ 個不同事物中，選擇一個放入編號 m 的位置，共有 $n-(m-1)$ 種選法。

由乘法原理可知排列數共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$ 種。我們以符號 P^n_m 表示從 n 個不同事物中，任取 m 個排成一列的排列數，即 $P^n_m=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$。當 $m<n$ 時，

$$
\begin{aligned}
P_m^n &= n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)\\
&= \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)(n-m)\times\cdots\times 2\times 1}{(n-m)\times\cdots\times 2\times 1}\\
&= \frac{n!}{(n-m)!}
\end{aligned}
$$

而 $m=n$ 時，$P_m^n=P_n^n=n!$

一般，我們規定 $0!=1$。此時，$P_n^n=n!=\frac{n!}{(n-n)!}$，即不管 $m<n$ 或 $m=n$，

均有：$P_m^n=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

2. 不盡相異物直線排列

設有 r 種不同種類的事物，第一類有 n_1 個相同，第二類有 n_2 個相同，$\ldots$，第 r 類有 n_r 個相同，共有 $n=n_1+n_2+\cdots+n_r$ 個事物，將此 n 個事物作直線排列，共有 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ 種方法。我們常以符號 $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 來表示 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ 。

範例：

問題 1.將 3 個相同的黑球及 1 個白球作直線排列，試問有幾種不同的排法？

解這個問題，若將白球及黑球分別以 W 及 B 表之，則易知共有 WBBB，BWBB，BBWB，BBBW 等 4 種不同的排法。

為了進一步瞭解一般問題之解法，我們看以下的分析：如果我們將 3 個黑球看成不同的球，分別編號並以 B_1,B_2,B_3 表示，而白球仍以 W 表之，則 4 個球共有 $4!=24$ 種不同的直線排列，如下：

$$
\begin{array}{llll}
WB_1B_2B_3 & B_1WB_2B_3 & B_1B_2WB_3 & B_1B_2B_3W \\
WB_1B_3B_2 & B_1WB_3B_2 & B_1B_3WB_2 & B_1B_3B_2W \\
WB_2B_1B_3 & B_2WB_1B_3 & B_2B_1WB_3 & B_2B_1B_3W \\
WB_2B_3B_1 & B_2WB_3B_1 & B_2B_3WB_1 & B_2B_3B_1W \\
WB_3B_1B_2 & B_3WB_1B_2 & B_3B_1WB_2 & B_3B_1B_2W \\
WB_3B_2B_1 & B_3WB_2B_1 & B_3B_2WB_1 & B_3B_2B_1W
\end{array}
$$

我們觀察在第一行的 6 種排列中，三個黑球皆在第二、三及四個位置，只是編號排列方式不同。而這 6 種不同的編號排列，正是三個相異事物作直線排列的所有情況。因此如果我們將 3 個黑球的編號去掉，則第一行的 6 種排列皆爲同一種排列 WBBB。同樣地，第二、三及四行的排列也分別是 BWBB，BBWB 及 BBBW。由上面的分析可知，要求 3 個相同的黑球及 1 個白球的直線排列數，可以先將黑球編號，再與白球共 4 個球作直線排列，計有 $4!$ 種排列法。在這 $4!$ 種排法中，當我們將黑球、白球的相關位置固定時，由於黑球有 3 個，白球有 1 個，其不同的排法爲黑球在固定的 3 個位置的不同排法，共有 $3!=6$ 種。如果將黑球的編號去掉後，這 6 種排法皆爲同一種排列法。由此可知在全部的 $4!$ 種排法中，每 $3!$ 種排法在黑球的編號去掉後均爲同一種排列法，因此實際的直線排列數爲 $\frac{4!}{3!}=4$。

問題 2.5 個相同的黑球及 4 個相同的白球作直線排列，試問有幾種不同之排法？

首先將黑球予以編號分別爲 B_1, B_2, B_3, B_4 及 B_5，白球亦予以編號分別爲 W_1, W_2, W_3 及 W_4，則這 9 個不同的球共有 $9!$ 種不同的排法。在這 $9!$ 種排法中，當我們將黑球及白球的相關位置固定時，由於黑球在固定的 5 個位置有 $5!$ 種不同的直線排列數，而白球在固定的 4 個位置有 $4!$ 種不同的直線排列數，由乘

法原理可知，共有 $5!4!$ 種不同的排列數。如果將黑球及白球的編號去掉後，這 $5!4!$ 種排法均屬同一種排法。由此可知在全部的 $9!$ 種排法中，每 $5!4!$ 種排法在球的編號去掉後，均爲同一種排列法。因此 5 個相同的黑球及 4 個相同的白球作直線排列，共有 $\frac{9!}{5!4!}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$ 種不同的排法。

3. 相異物的組合

自 n 個不同物件中，每次不重覆地取 m 個爲一組，則其組合數爲：

$$C_m^n=\frac{P_m^n}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}，(0\le m\le n)$$

範例：

在日常生活中我們時常會考慮，從不同的東西中要選出其中幾個到底有多少種選法，先看一個簡單的例子：

若要從 A，B，C，D，E 五個人之中不考慮次序選出三個人作爲一組，參加三對三籃球賽，將會有多少種選法？

分析：從此 5 個人當中選 3 個人出來排列，若考慮選擇的次序，則共有 $P_3^5=5\times4\times3=60$ 種情形。

由於固定的 3 個人，其直線排列數爲 $3!=6$。例如 A，B，C 三人的直線排列有 (A，B，C)，(A，C，B)，(B，A，C)，(B，C，A)，(C，A，B)，(C，B，A)6 種，而這 6 種排列皆爲同一種選法，因此選法共有 $\frac{P_3^5}{3!}=\frac{5!}{3!2!}=10$ 種。

事實上，我們可以將所有可能的情形列出來，分別是：

(A，B，C)，(A，B，D)，(A，B，E)，(A，C，D)，(A，C，E)，

(A，D，E)，(B，C，D)，(B，C，E)，(B，D，E)，(C，D，E)　等 10 種情形。

現考慮一般的情形，從 n 個不同物件中，不重複且不計其前後次序取 m 個 $(m \le n)$物件爲一組，稱作 n 中取 m 的組合。其中的每一種可能結果稱爲一種組合。我們以符號C_m^n或$\binom{n}{m}$，$C(n, m)$表示所有組合的總數(簡稱組合數)。

由上面的例子可以知道，n 個不同物件中取 m 個的組合數C_m^n，可以分成兩個步驟來求：

○,1先從 n 個中選取 m 個出來作直線排列，其排列數爲P_m^n。

○,2由於對固定的 m 個物件，其直線排列數爲$m!$所以P_m^n排列中每$m!$皆爲同一種組合。

因此組合數$C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$。

4. 重複組合

由 n 類相異物中，任取 r 個的重複組合數與方程式$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$的非負整數解之個數均爲$H_r^n = C_{n-1}^{r+n-1}$。

由 n 類相異物中，任取 r 個爲一組，其中每類物品的個數均不小於 r 且可重複選取，則稱此種組合爲 n 中取 r 之重複組合，其組合數以H_r^n表之。

範例：

問題１：假設紅、藍、白三種顏色的球均超過４個，從其中取４個球，試問其可能的取法數 H_4^3 爲多少？

在此問題中，對於我們所取出的４個球分別以 X_1 表示紅色球的個數、以 X_2 表示藍色球的個數、以 X_3 表示白色球的個數，則可知 $X_1+X_2+X_3=4$。所取４個球的每一種組合對應到一組 (X_1,X_2,X_3) 的值，但必須滿足 $X_1+X_2+X_3=4$。反之，方程式 $X_1+X_2+X_3=4$ 的任一非負整數解，可代表所取４個球的某一組合。例如，$X_1=1,X_2=1,X_3=2$ 即表示所取的４個球中有１個紅色球，１個藍色球及２個白色球。因此 H_4^3 亦是方程式 $X_1+X_2+X_3=4$ 的非負整數解之個數，即問題１和下列的問題２是相同的。

問題２：$X_1+X_2+X_3=4$ 有幾組非負整數解？

解問題２，可將所有可能的解一一列舉出來，即 (X_1,X_2,X_3) 可爲：

$(4,0,0),(0,4,0),(0,0,4),(3,1,0),(3,0,1),(1,3,0),(1,0,3),(0,1,3),(0,3,1),$

$(2,2,0),(2,0,2),(0,2,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,1,2)$ 共 15 種。

我們現考慮另一種解法，以便能推廣到更一般的問題上。我們以連續的"$|$"來表示 X_1,X_2,X_3 之值，例如"$||$"表示２。則當解爲 $X_1=1,X_2=1,X_3=2$ 時，以"$|+|+||$"表示，其中我們以"＋"號將相隔二數分間，又當其解爲 $X_1=1,X_2=0,X_3=3$ 時，以"$|++|||$"表示。（因爲 $X_2=0$，所以２個"＋"號中間就沒有"$|$"），因此，$X_1+X_2+X_3=4$ 的每一組解都是４個"$|$"

及 2 個"＋"的一種直線排列，而這樣的排列數爲 $\frac{6!}{4!\times 2!}=C^6_2=15$，即 $H^3_4=C^6_2=15$。

而對一般的情況，由 n 類相異物中，任取 r 個爲一組的重複組數 H^n_r 如何求呢？同樣地，令 X_i 表所取 r 個中，第 i 類物品之個數，$i=1,2,\cdots,n$，則 H^n_r 即爲方程式 $X_1+X_2+\cdots+X_n=r$ 之非負整數解個數，而此方程式之非負整數解個數，等於 r 個"|"及(n − 1)個"＋"的直線排列數，即 $\frac{[r+(n-1)]!}{r!\times(n-1)!}=C^{r+n-1}_{n-1}$。

補充：

① $P^n_m=C^n_m\cdot m!$　【亦即〝排列數〞＝〝選法數〞×〝排法〞】

② $C^n_m=C^n_{n-m}$　【餘組合性質】

③ $C^n_m=C^{n-1}_{m-1}+C^{n-1}_m$　【巴斯卡定理】

證明：

已知 $C^n_m=\frac{n!}{(n-m)!m!}$

$$
\begin{aligned}
C^{n-1}_m+C^{n-1}_{m-1}&=\frac{(n-1)!}{(n-1-m)!m!}+\frac{(n-1!)}{(n-1-m+1)!(m-1!)}\\
&=\frac{n-m}{n-m}\frac{(n-1)!}{(n-1-m)!m!}+\frac{m}{m}\frac{(n-1!)}{(n-m)!(m-1!)}\\
&=\frac{(n-m)(n-1)!}{(n-m)!m!}+\frac{m(n-1!)}{(n-m)!m!}\\
&=\frac{n(n-1)!}{(n-m)!m!}\\
&=\frac{n!}{(n-m)!m!}\\
&=C^n_m
\end{aligned}
$$

排列與組合●結論

在日常生活中，其實很多事情都必須用到排列與組合，只是事物微小，在正常的情況下吸引不了他人的注意。而我們總是用著最麻煩的方法去尋找解答，忽略的每一位數學學者的辛苦研究出來的方法。

數學其實可以幫助我們以最簡單的方式去處理一項複雜的事務，藉著生活中的小事物、小動作來學習數學，並且運用得當，數學對你我將不再是『困難』兩個字，今後，將以『輕鬆』來學習。將數學融入個人的生活吧！

排列與組合●

http://www.edp.ust.hk/previous/math/history/5/5_8/5_8_2.htm

↑　排列與組合

http://eprob.math.nsysu.edu.tw/PerComb.htm

↑　機率學習館－排列組合