投稿類別：數學類

篇名：
正多邊形「層」出巴斯卡三角形

作者：
蔡道毅。台北市立成淵高中。高二 9 班
葉日勛。台北市立成淵高中。高二 9 班
尤虹云。台北市立成淵高中。高二 9 班

指導老師：
林鳳美老師

壹●前言

本研究以高中課程所學到「二項式定理」，進而推廣至「多項式定理」，首先將乘積項由$n=0$次方，推往$n=1$次方，逐項推廣至n次方的概念中，找到展開係數生成法則，再配合幾何圖形蔓延度，於是建構了幾何圖形-正k邊形，充份呈現正k邊形頂點與邊微妙的幾何價值。

建構幾何圖形過程中，採固定某頂點逆時鐘順著正k邊形頂點方向，即每方向通過的頂點都「層」出巴斯卡三角形數字排列，也看到「多項式定理」與「二項式定理」間層層的關聯度與理論性。

一、研究動機：

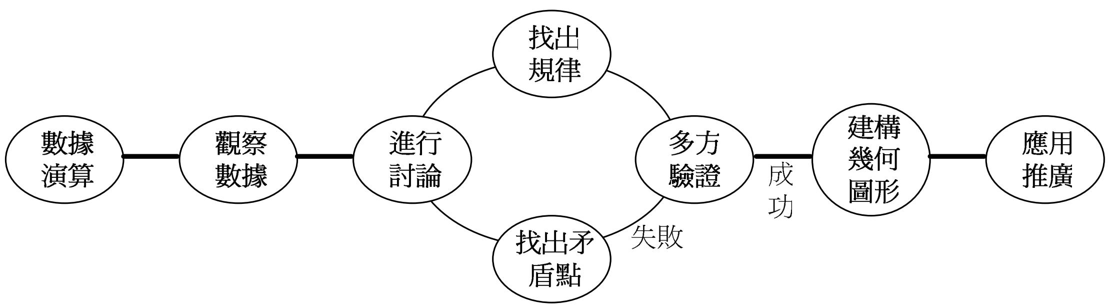
上「數學科學研究」課時，老師介紹了我們已知道的「二項式定理」，其係數即是熟知的巴斯卡三角形，我們深入思考當遇到「多項式定理」展開係數時，是否也可與巴斯卡三角形有關呢?這問題讓我們深感興趣，而我們透過幾何建構的概念揭開序幕，展開一連串研究論證的探討歷程。

二、研究目的：

(一)探討三項式展開係數與巴斯卡三角形的規律，並建構出幾何圖形-正三角形演進法則。
(二)探討四項式展開係數與如何層出巴斯卡三角形係數，並建構出幾何圖形-正四邊形演進法則。
(三)推廣至多項式定理建構出幾何圖形-正k邊形演進法則，且其係數間如何層出巴斯卡三角形係數。

三、研究方法：

本研究以高中課程所學到二項式定理[2]「**許志農、2013**」，推廣至多項式定理建構出幾何圖形-正k邊形並「層」出巴斯卡三角形研究歷程說明如下：



貳●正文

一、名詞定義與定理：

(一)巴斯卡三角形與二項式定理：二項式定理[2]「**許志農、2013**」，

即$(a+b)^n=C_0^n a^n+C_1^n a^{n-1}b+C_2^n a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^n b^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n a^{n-r}b^r$，

展開式說明如下：

$$
\begin{array}{lcccc}
(x+y)^0= & 1 & \leftarrow & 1 \\
(x+y)^1= & x+y & \leftarrow & 1\quad 1 \\
(x+y)^2= & x^2+2xy+y^2 & \leftarrow & 1\quad 2\quad 1 \\
(x+y)^3= & x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 & \leftarrow & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
(x+y)^4= & x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 & \leftarrow & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
(x+y)^5= & x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 & \leftarrow & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1
\end{array}
$$

如上這種三角形的結構爲著名的巴斯卡三角形。

(二)多項式定理[1]「**徐清朗、2013**」：設n爲正整數時，能寫成下列的式子

$(a+b+c+\cdots+k)^n=\sum\frac{n!}{p!q!r!\cdots s!}\cdot a^p\cdot b^q\cdot c^r\cdot\cdots\cdot k^s$，其中$\sum$對於滿足 $p+q+r+\cdots+s=n$的每一個非負整數組$p,q,r,\ldots,s$作和。

二、探討三項式定理與巴斯卡三角形：

（一）三項式展開式係數的對稱性：設$T_{(2,n)}$爲n次二項式展開式係數的三角形，即巴斯卡三角形的第n層；$T_{(3,n)}$爲n次三項式展開式係數的三角形說明如下表一：

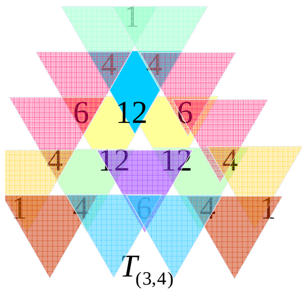
表一：n次三項式展開式係數的三角形$T_{(3,n)}$說明

三項式展開	係數皆可以排列成左右對稱	$T_{(3,n)}$
$(a+b+c)^1$	$\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c\end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1\end{array}$ 表示爲$T_{(3,1)}$

$(a+b+c)^2$ $=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$	a^2 $2ab \quad 2ac$ $b^2 \quad 2bc \quad c^2$	1 2 2 1 2 1 表示爲 $T_{(3,2)}$
$(a+b+c)^3$ $=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $+3b^2c+3bc^2+c^3+3c^2a+3ca^2+6abc$	a^3 $3a^2b \quad 3ac^2$ $3ab^2 \quad 6abc \quad 3ac^2$ $b^3 \quad 3b^2c \quad 3bc^2 \quad c^3$	1 3 3 3 6 3 1 3 3 1 表示爲 $T_{(3,3)}$

（二）探討三項式與巴斯卡三角形

我們觀察三項式 $T_{(3,4)}$ 到 $T_{(3,5)}$ 的演進如下



$T_{(3,4)}$

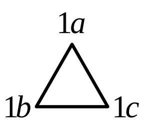
1
5 5
10 20 10
10 30 30 10
5 20 30 20 5
1 5 10 10 5 1

$T_{(3,5)}$

由上可推論出 $T_{(3,n)}$ 的三邊數字是 $T_{(2,n)}$ 的係數所構成，即巴斯卡三角形第 n 層數字，且中間數字可藉由 $T_{(3,n-1)}$ 而得。

（三）建構三項式定理的幾何圖形-正三角形

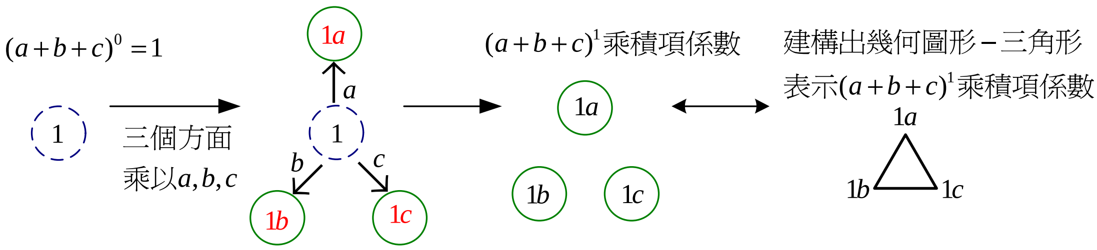
在 $(a+b+c)^n$ 展開式中，是否可建構幾何圖形表示？也能表達巴斯卡三角形係數呢？經過我們研究歷程得到以下結果：

性質 1：證明三項式 $(a+b+c)^0$ 乘積項係數推算 $(a+b+c)^1$ 乘積項係數，且可建構出幾何圖形-正三角形 

來表示。

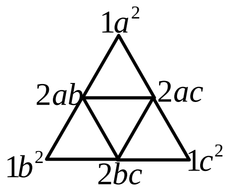
【證明】由三項式 $(a+b+c)^0=1$ 爲中心層分別以三個方向逆時鐘乘以 a,b,c 再依照巴斯卡三角形的規則，推算三項式 $(a+b+c)^1$ 乘積項係數，進而**建構出幾何圖**

形-正三角形來表示$(a+b+c)^1$乘積項係數如下圖一所示：



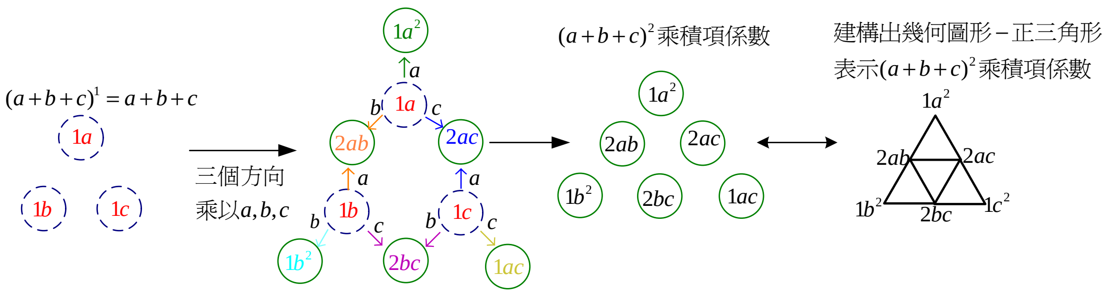
圖一：建構出幾何圖形-正三角形來表示$(a+b+c)^1$乘積項係數[3]「**葉偉文、2002**」

性質 2：證明三項式$(a+b+c)^1=a+b+c$乘積項係數推算$(a+b+c)^2$乘積項係數，且可建構出幾何圖形-正三角形



來表示。

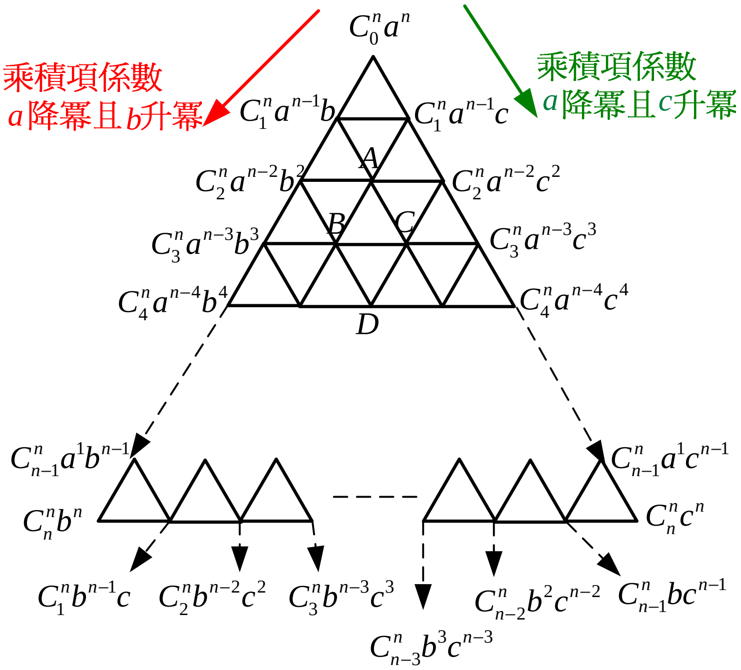
【證明】由三項式$(a+b+c)^1=a+b+c$為中心層分別以三個方向逆時鐘乘以a,b,c再依照巴斯卡三角形的規則，推算三項式$(a+b+c)^2$乘積項係數，進而**建構出幾何圖形-正三角形來表示$(a+b+c)^2$乘積項係數**如下圖二所示：



圖二：建構出幾何圖形-正三角形來表示$(a+b+c)^1$乘積項係數[3]「**葉偉文、2002**」

引理 1：證明三項式$(a+b+c)^n$乘積項係數可建構出幾何圖形-正三角形來表示且三角形各邊都「層」出巴斯卡三角形係數。

【證明】由性質 1 與性質 2 方式可推建構出幾何圖形-正三角形來表示得到
建構出幾何圖形-正三角形沿著左下方與右下方等二個方向前進，
其規律為(1)左下方乘積項係數a降冪且b升冪
(2)右下方乘積項係數a降冪且c升冪
說明如下圖三所示：



圖三：建構出幾何圖形-正三角形沿著二個方向規律前進[3]「**葉偉文、2002**」

其中三角形內點代表三項式乘積項係數的生成規律為

(1)左下方乘積項係數 a 降冪且 b 升冪

(2)右下方乘積項係數 a 降冪且 c 升冪

以 A,B,C,D 四點為例，而四點代表乘積項說明如下：

A 點代表乘積項	乘積項 $a^{n-1}c$ 由 a 降冪且 b 升冪得 $a^{n-2}bc$ 或乘積項 $a^{n-1}b$ 由 a 降冪且 c 升冪得 $a^{n-2}bc$
B 點代表乘積項	乘積項 $a^{n-2}bc$ 由 a 降冪且 b 升冪得 $a^{n-3}b^2c$ 或乘積項 $a^{n-2}b^2$ 由 a 降冪且 c 升冪得 $a^{n-3}b^2c$
C 點代表乘積項	乘積項 $a^{n-2}c^2$ 由 a 降冪且 b 升冪得 $a^{n-3}bc^2$ 或乘積項 $a^{n-2}bc$ 由 a 降冪且 c 升冪得 $a^{n-3}bc^2$
D 點代表乘積項	乘積項 $a^{n-3}bc^2$ 由 a 降冪且 b 升冪得 $a^{n-4}b^2c^2$ 或乘積項 $a^{n-3}b^2c$ 由 a 降冪且 c 升冪得 $a^{n-4}b^2c^2$

因為三角形各邊分別為 $(a+b)^n,(b+c)^n,(a+c)^n$ 展開係數呈巴斯卡三角形係數
故幾何圖形-正三角形各邊都「層」出巴斯卡三角形係數。

三、探討四項式定理與巴斯卡三角形：

(一) 四項式展開式係數的對稱性

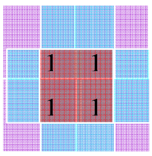
設 $T_{(4,n)}$ 為 n 次四項式展開式係數的三角形，說明如下表二：

表二：n 次四項式展開式係數的三角形 $T_{(4,n)}$ 說明

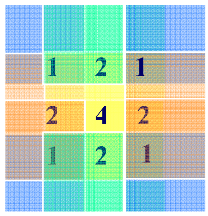
四項式展開	係數皆可以排列成左右對稱	$T_{(3,n)}$
$(a+b+c+d)$	$a \quad b$ $c \quad d$	$1 \quad 1$ $1 \quad 1$ 表示為 $T_{(4,1)}$
$(a+b+c+d)^2$ $=a^2+b^2+c^2+d^2$ $+2ab+2ac+2ad$ $+2bc+2bd+2cd$	$a^2 \quad 2ab \quad b^2$ $2ac \quad 2ad+2bc \quad 2bd$ $c^2 \quad cd \quad d^2$	$1 \quad 2 \quad 1$ $2 \quad 2+2 \quad 2$ $1 \quad 2 \quad 1$ 表示為 $T_{(4,2)}$

(二) 探討四項式與巴斯卡三角形

我們觀察三項式 $T_{(4,1)}$ 到 $T_{(4,2)}$ 的演進如下：



1	2	1
2	2+2	2
1	2	1



1	3	3	1
3	6+3	6+3	3
3	6+3	6+3	3
1	3	3	1

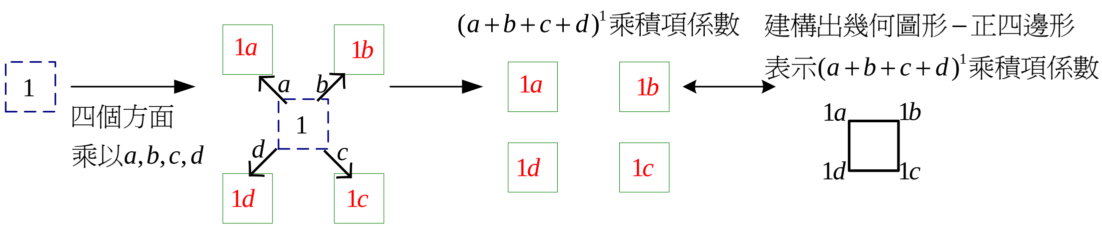
$T_{(4,n)}$ 的三邊數字是 $T_{(2,n)}$ 的係數所構成，即巴斯卡三角形第 n 層數字，且中間數字可藉由 $T_{(4,n-1)}$ 而得。

(三) 建構四項式定理的幾何圖形-正四邊形

在 $(a+b+c+d)^n$ 展開式中，是否可建構幾何圖形表示？也能表達巴斯卡三角形係數呢？經過我們研究歷程得到以下結果：

性質 3：證明四項式 $(a+b+c+d)^0=1$ 乘積項係數推算 $(a+b+c+d)^1$ 乘積項係數，且可建構出幾何圖形-正四邊形來表示。

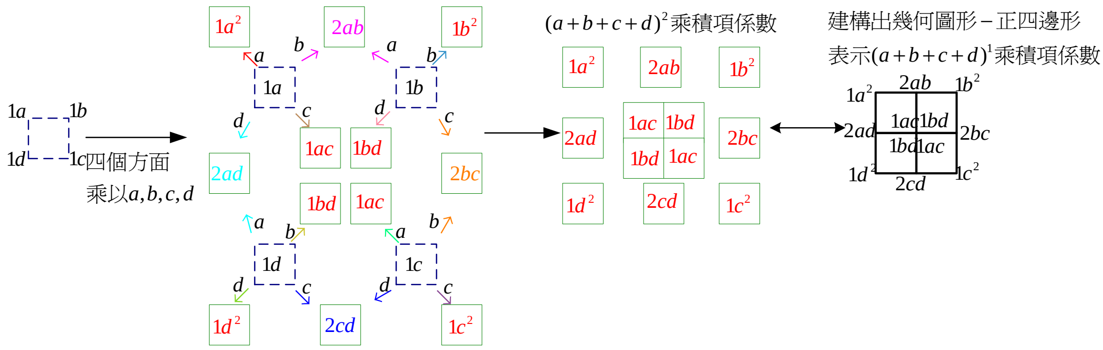
【證明】由四項式 $(a+b+c+d)^0=1$ 為中心層分別以四個方向順時鐘乘以 a,b,c,d 再依照巴斯卡三角形的規則，推算四項式 $(a+b+c+d)^1$ 乘積項係數，進而**建構出幾何圖形-正四邊形來表示 $(a+b+c+d)^1$ 乘積項係數**如下圖四所示：



圖四：建構出正四邊形來表示 $(a+b+c+d)^1$ 乘積項係數[3]「**葉偉文、2002**」

性質 4：證明四項式 $(a+b+c+d)^1=a+b+c+d$ 乘積項係數推算 $(a+b+c+d)^2$ 乘積項係數，且可建構出幾何圖形-正四邊形來表示。

【證明】由四項式 $(a+b+c+d)^1=a+b+c+d$ 爲中心層分別以四個方向順時鐘乘以 a,b,c,e 再依照巴斯卡三角形的規則，推算四項式 $(a+b+c+d)^2$ 乘積項係數，進而**建構出幾何圖形-正四邊形來表示** $(a+b+c+d)^2$ **乘積項係數**如下圖五所示：



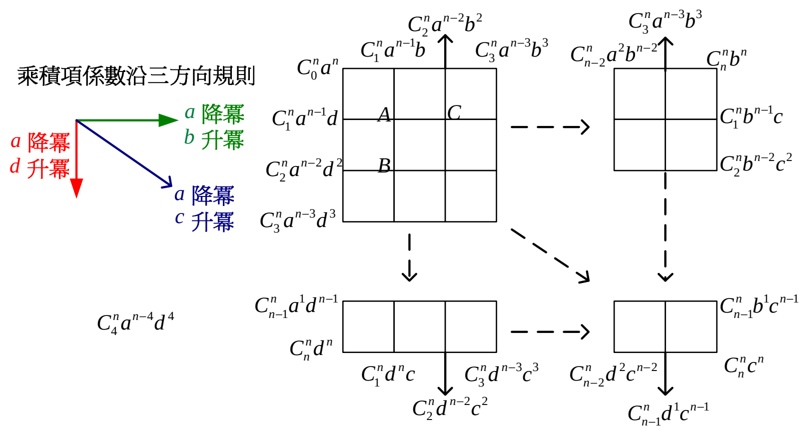
圖五：建構出正四邊形來表示 $(a+b+c+d)^2$ 乘積項係數[3]「**葉偉文、2002**」

引理 2：證明四項式 $(a+b+c+d)^n$ 乘積項係數可建構出幾何圖形-正四邊形來表示且四邊形各邊與對角線都「層」出巴斯卡三角形係數。

【**證明**】由**性質 3** 與**性質 4** 方式可推建構出**幾何圖形-正四邊形**來表示

得到**建構出幾何圖形-正四邊形沿著正右方、正下方與右下方等三個方向前進，其規律爲(1)正右方乘積項係數 a 降冪且 b 升冪；(2)正下方乘積項係數 a 降冪且 d 升冪；(3)右下方乘積項係數 a 降冪且 c 升冪**

說明如下圖六所示：



圖六：建構出幾何圖形-正四邊形沿著三個方向規律前進[3]「**葉偉文、2002**」

其中正四邊形內點代表四項式乘積項係數的生成規律爲

(1)正右方乘積項係數 a 降冪且 b 升冪

(2)正下方乘積項係數 a 降冪且 d 升冪

(3)右下方乘積項係數a降冪且c升冪

因爲四邊形各邊與對角線分別爲

$(a+b)^n,(b+c)^n,(c+d)^n,(a+d)^n,(a+c)^n,(b+d)^n$ **展開係數呈巴斯卡三角形係數**

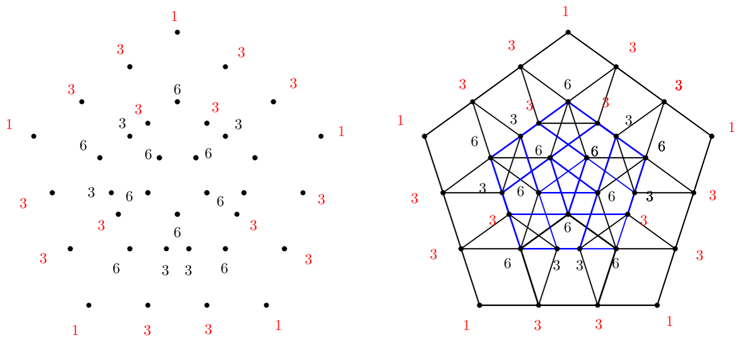
故幾何圖形-正四邊形各邊與對角線都「層」出巴斯卡三角形係數。

四、建構n次多項式定理的幾何圖形-正k邊形

在五項式$(a+b+c+d+e)^n$展開式中，是否可建構幾何圖形表示？也能表達巴斯卡三角形係數呢？說明如下：

引理 3：證明五項式$(a+b+c+d+e)^n$乘積項係數可建構出幾何圖形-正五邊形來表示且五邊形各邊與對角線都「層」出巴斯卡三角形係數。

【證明】由引理 1 與引理 2 方式可推**五項式$(a+b+c+d+e)^n$乘積項係數**建構出**幾何圖形-正五邊形**來表示，得三次五項式乘積項係數如下圖所示：



圖七：三次五項式乘積項係數建構出正五邊形 [3]「**葉偉文、2002**」

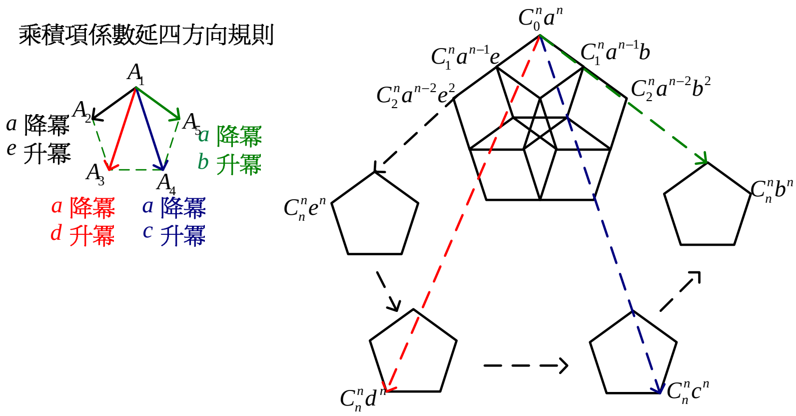
再推廣發現**建構出幾何圖形-正五邊形以A_1點出發沿著**

$\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4},\overline{A_1A_5}$ **等四個方向前進，其規律爲(1)$\overline{A_1A_2}$方向乘積項係數**

a降冪且e升冪；(2)$\overline{A_1A_3}$方向乘積項係數a降冪且d升冪；(3)$\overline{A_1A_4}$方向

乘積項係數a降冪且c升冪；(4)$\overline{A_1A_5}$方向乘積項係數a降冪且b升冪

說明如下圖八所示：



圖八：建構出幾何圖形-正五邊形沿著四個方向規律前進

因爲正五邊形各邊與對角線分別爲 $(a+b)^n,(b+c)^n,(c+d)^n,(d+e)^n$ $(a+e)^n,(a+c)^n,(a+d)^n,(b+d)^n,(b+e)^n,(c+e)^n$ **展開係數呈巴斯卡三角形係數故正五邊形各邊與對角線都「層」出巴斯卡三角形係數。**

定理：證明 n **次多項式** $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}+a_k)^n$ **乘積項係數可建構出幾何圖形-正** k **邊形來表示且正** k **邊形各邊與對角線都「層」出巴斯卡三角形係數。**

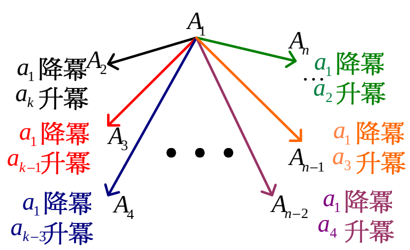
【證明】由引理 1~引理 3 推廣當 n 次多項式 $(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}+a_k)^n$ 乘積項係數可建構出幾何圖形-正 k 邊形來表示且正 k 邊形各邊與對角線都「層」出巴斯卡三角形係數。

我們仔細觀察，**建構出幾何圖形-正** k **邊形以** A_1 **點出發沿著**

$\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4},\ldots,\overline{A_1A_n}$ **等** $k-1$ **個方向前進，其規律爲**

$\overline{A_1A_2}$ **方向乘積項係數** a_1 **降冪且** a_k **升冪；** $\overline{A_1A_3}$ **方向乘積項係數** a_1 **降冪且** a_{k-1} **升冪；** $\overline{A_1A_4}$ **方向乘積項係數** a_1 **降冪且** a_{k-2} **升冪；以此類推得** $\overline{A_1A_n}$ **方向乘積項係數** a_1 **降冪且** a_2 **升冪**

說明如下圖九所示：



圖九：建構出幾何圖形-正 n 邊形沿著 $n-1$ 個方向規律前進[3]「**葉偉文、2002**」

因爲正k邊形各邊與對角線爲$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}, a_k$的每個二項式展開係數呈現巴斯卡三角形係數

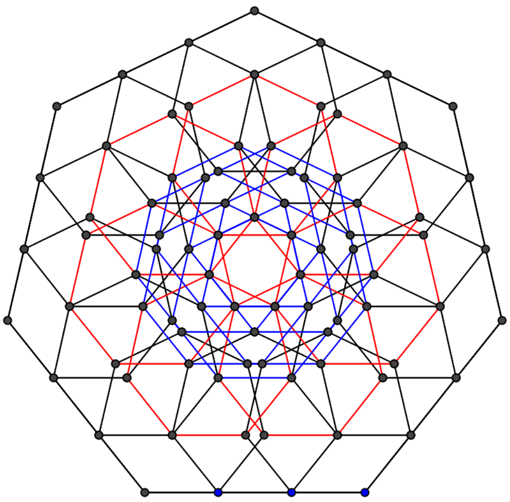
故正k邊形各邊與對角線都「層」出巴斯卡三角形係數。

參●結論與未來展望

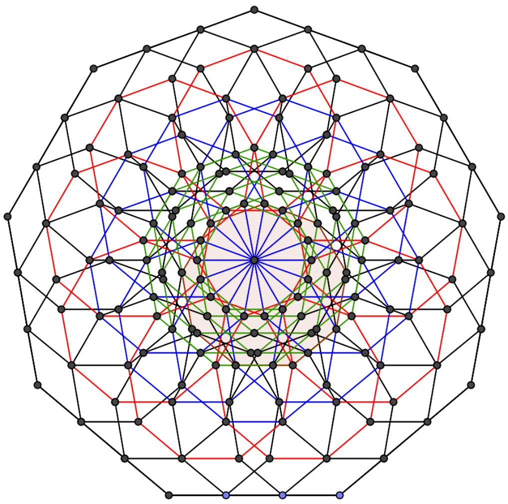
本篇研究以「多項式定理」爲主體發想，建構了多項式定理的幾何圖形-正k邊形，描述多項式定理展開係數間的關係，串聯起代數與幾何間的橋樑。

陽光的燦爛，展現於花兒盛開的瞬間，而巴斯卡三角形的美好，竟綻放於多項式圖形中層層堆疊的好奇探索中，我們看到的是正k邊形的無限希望和多項式定理的精彩激盪。

我們觀察正k邊形其圖形不斷的重覆，當次方數不斷的增加也不會改變圖形的結構性與完備性，充份展現數與形的完美搭配，也呈現頂點與邊微妙的幾何價值，如下圖十爲三次七項式建構出幾何圖形-七邊形；如下圖十一爲三次九項式建構出幾何圖形-九邊形所示：



圖十:建構幾何圖形-七邊形



圖十一:建構幾何圖形-九邊形

而在此研究下，我們已看到「多項式定理」理論下的數學之美與無窮可能變化，都來自於那千變萬化頂點與邊的關係。我們深深體會當正k邊形k很大時，頂點與邊微妙的關係，難度便提高很多，其千變萬化的規律感與延續性是我們未來努力的方向，相信必能有出乎意料的驚喜。

肆●引註資料

1.徐清朗(2013)。**徐氏高中數學規劃排列組合**。台北市：光朗出版社。

2.許志農(2013)。**數學2與數學3**。新北市：龍騰書局。

3.葉偉文(2002)。**典雅的幾何**。台灣省：天下文化出版社。