投稿類別：數學類

篇名：帕斯卡三角形中哪一排完全沒有三的倍數

王三福。市立內湖高中。二年八班
朱加宏。市立內湖高中。二年八班
游文廷。市立內湖高中。二年八班

指導老師:曹昌東

壹●前言

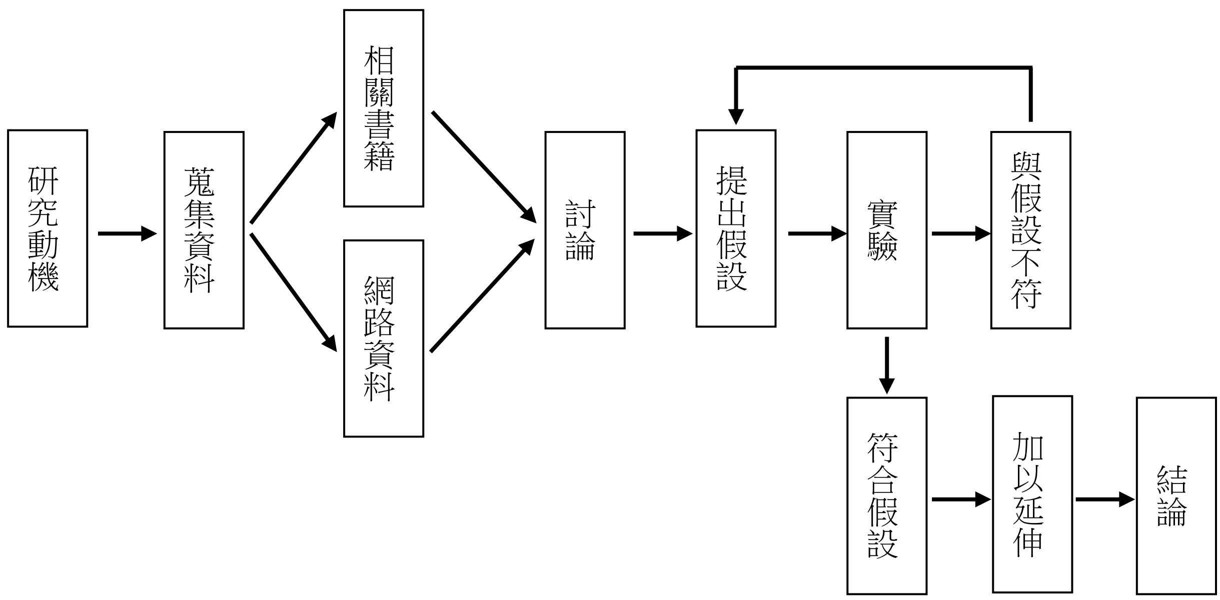
一、研究動機

在過去，我們知道布萊茲·帕斯卡是著名的法國數學家，他在1653年的《論算術三角》中描述了一個二項式係數的表格，表中的每個數都等於其向上的兩個數的和，現在被稱作帕斯卡三角形。而現今我們知道巴斯卡三角形係數以二進位制表示與它的排數存在著某種關係，因此，我們將巴斯卡三角形做適當的變化。希望能得到一些規律與性質，而能使我們更加了解帕斯卡三角形最真實的面貌，以及幫助未來演算的進步。

二、研究目的

我們在論文當中發現其中某些列都是奇數，所以我們想把這概念做進一步的研究：更進一步的了解如何使用進位法，並且證明帕斯卡三角形是否會有一排全都沒有3的倍數，找出究竟哪一列都不是三的倍數。

三、研究方法



貳●正文

一、帕斯卡三角形

在找尋是否會有一排全都沒有3的倍數前，我們必須先介紹帕斯卡三角形的基本性質，以便於我們等一下我們的證明。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

帕斯卡三角形，是二項式係數在三角形中的一種幾何排列，因此它的第 $n+1$ 列，代表 $(x+1)^0$ 依照降冪(或升冪)排列時的係數，如(表一)。

$(x+1)^0=$	1	1
$(x+1)^1=$	$x+1$	1 1
$(x+1)^2=$	$1x^2+2x+1^2$	1 2 1
$(x+1)^3=$	$1x^3+3x^2+3x+1^3$	1 3 3 1
$(x+1)^4=$	$1x^4+4x^3+6x^2+4x+1^4$	1 4 6 4 1
$(x+1)^5=$	$1x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1^5$	1 5 10 10 5 1
$(x+1)^6=$	$1x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1^6$	1 6 15 20 15 6 1

(表一)

我們可以發現以組合的方式來看 $(x+1)^n$ 中 x^k 的係數 $(k\in\{0.1.2.3\ldots n\})$，$(x+1)^n$ 表示有 n 個 $(x+1)$ 連續相乘，如果 n 個括號中有 k 個選取 x，$n-k$ 個選取 1，則會產生 x^k 項，所以 x^k 的係數恰為 C^n_{n-k} (或 C^n_k)，如下(圖二)：

$$
\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_0^1 \quad C_1^1 \\
C_0^2 \quad C_1^2 \quad C_2^2 \\
C_0^3 \quad C_1^3 \quad C_2^3 \quad C_3^3 \\
C_0^4 \quad C_1^4 \quad C_2^4 \quad C_3^4 \quad C_4^4 \\
\vdots \\
C_0^n \quad C_1^n \quad C_2^n \quad C_3^n \quad C_4^n \quad \cdots \quad C_{n-1}^n \quad C_n^n
\end{array}
$$

(圖二)

二、進位法

在介紹完帕斯卡三角形後我們發現如果要探討有無三的倍數，要使用一個在日常之中最為使用的東西，那就是進位法。

在十進位制中，十個數碼符號0，1，2，...，9是用來表示零和前九個正整數。對於像372這樣較大的整數我們以這樣 $300+70+2=3\times10^2+7\times10+2$ 上述的表述方式均適用於1~1000以上或更大的整數，如果我們可以用一個單一的公式來表示一個完整普遍性的結果，那將很有幫助。為此我們讓單一的字母 a 戴上不同的「下標」$a_0a_1a_2a_3\cdots$，來表示各個不同的係數 b ，c ，d ，...，同時最高用10n 次來表示，這裡的 n 可以代表任何一個整數那麼一個十進位制的表示方式便如下所示: $z=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_1 10+a_0$ 。

在十進位制中，10這一個數是被挑出來的基底。一般人或許不曉得以10為基底並非絕對必要，以任何一個大於1的整數都可以符合這個目的，因此以 p 進位系統表示的任何一個整數Z就可以用下列公式表示：$z=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$ 。

三、不需借位減數

定義:不需借位減數

不須借位減數是在進位法中的特性,其性質主要是數字相減時每一位不須和其他位數字借數,也可以說是每位數字在相減時期對位數字都不大於其數,例如下式。

```
  123456789
-)   1234560
  122222229
```

由上式得之不會發生某一位不夠減，得向高一位借 1 的情形，我們也可以以數學的寫法寫成: $n_1 \geq N_2, m_1 \geq M_2 \cdots$

在此定義 n 跟 M 為各位數字，大小寫英文為相對應數字。

$s(n)$ 為三進位中，不為零的數。

設 $s_1(n)$ 為 n 表示成三進位中，1出現的個數

$s_2(n)$ 為 n 表示成三進位中，2出現的個數

$s(n) = s_1(n) + 2s_2(n)$

將n表示成3的冪次

$n = a_l \times 3^l + a_{l-1} \times 3^{l-1} + \cdots + a_l \times 3 + a_0$

自然數n的3進位表示法為

$s(n) = a_l + a_{l-1} + \cdots + a_1 + a_0$

最高冪次就是在 $n!$ 中，含因子 3 的個數為 $\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{3^2}\right] + \left[\frac{n}{3^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{3^l}\right]$ 指出對於一個確定的自然數來說，上面的式子並不包含無窮多項。

因為對於固定數n，一定存在一個自然數 k ，使 $3^k \leq n < 3^{k+1}$，這時對一切 $p \geq k+1$，有

$\left[\frac{n}{2^p}\right] = 0$ ，所以上式中實際上只有k個加項。

求證: $n!$ 中包含因子3的最高方冪為 $\frac{1}{2}(n - s(n))$

$$\left[\tfrac{n}{3^1}\right] = a_l \times 3^{l-1} + a_{l-1} \times 3^{l-2} + a_{l-2} \times 3^{l-3} + \cdots + a_1$$
$$\left[\tfrac{n}{3^2}\right] = a_l \times 3^{l-2} + a_{l-1} \times 3^{l-3} + a_{l-2} \times 3^{l-4} + \cdots + a_2$$
$$\left[\tfrac{n}{3^3}\right] = a_l \times 3^{l-3} + a_{l-1} \times 3^{l-4} + a_{l-2} \times 3^{l-5} + \cdots + a_3$$
$$\vdots$$
$$\left[\tfrac{n}{3^l}\right] = a_l$$

$n!$中3的最高冪次可以寫成

$$\left[\tfrac{n}{3}\right] + \left[\tfrac{n}{3^2}\right] + \left[\tfrac{n}{3^3}\right] + \cdots + \left[\tfrac{n}{3^l}\right]$$

展開相加

$$a_l 3^{l-1} + a_{l-1} 3^{l-2} + a_{l-2} 3^{l-3} + \cdots + a_1 +$$
$$a_l 3^{l-2} + a_{l-1} 3^{l-3} + a_{l-2} 3^{l-4} + \cdots + a_2 +$$
$$a_l 3^{l-3} + a_{l-1} 3^{l-4} + a_{l-2} 3^{l-5} + \cdots + a_3 +$$
$$\vdots$$
$$a_l$$

整理後

$$a_l (1+3+\cdots+3^{l-1}) + a_{l-1}(1+3+\cdots+3^{l-2}) + \cdots + a_3 (1+3+3^2) + a_2 (1+3) + a_1$$
$$= a_l \times \tfrac{(3^l-1)}{2} + a_{l-1} \times \tfrac{(3^{l-1}-1)}{2} + a_{l-2} \times \tfrac{(3^{l-2}-1)}{2} + \cdots + a_1 \times \tfrac{(3-1)}{2} + a_0 \times \tfrac{(1-1)}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_l \times 3^l + a_{l-1} \times 3^{l-1} + \cdots + a_1 \times 3 + a_0 +) - \tfrac{1}{2}(a_l + a_{l-1} + \cdots + a_1 + a_0)$$
$$= \tfrac{1}{2}(n - s(n))$$

因此$n!$中3的最高冪次為$\tfrac{1}{2}(n-s(n))$

因為巴斯卡三角形中的$c_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

可以表示成下式

$$\tfrac{1}{2}(n-s(n)) - \tfrac{1}{2}(k-s(k)) - \tfrac{1}{2}(n-k-s(n-k))$$
$$= \tfrac{1}{2}(-s(n) + s(k) + s(n-k))$$

c_k^n的最高冪次等於$\tfrac{1}{2}(s(k)+s(n-k)) = \tfrac{1}{2}s(n)$

所以對於n的不須借位整數的個數，若某個數$a_i = 0$，則同一數位上的$b_i = 0$，否則（即$b_i = 1$）就出現“不夠減”的情況。現在問；ｎ一共有多少個不須借位的減數呢？這是很容易知道的，因為若$a_i = 2$時，b_i可以為０、１或是２，故有３種可能的選擇，

即有3^{a_1}個選擇，若$a_i=1$時，b_i可以為０或是１，故有２種可能的選擇，即有$2^{a_1}\times 3^{a_1}$個選擇，若$a_i=0$時，b_i只能０，故有１種選擇，也就是$2^{a_1}\times 3^{a_1}$種選擇，由此可見，n的不須借位減數的總個數為$2^{s_1(n)}\times 3^{s_2(n)}=n+1$

由觀察發現，此數正好是$2\times 3^{s_2(n)}$或$3^{s_2(n)}$，最後我們求證巴斯卡三角形中，哪一排完全沒有3的倍數。

在這裡介紹完之後一開始所需具備的工具大致都有了，接下來就進入到大膽的觀察。

三、觀察

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

我們發現在在上面的三角形中第1、2、3、6、9排並沒有出現3的倍數。
我們如果將1、2、3、6、9轉為3進位，將得到1、2、10、20、100，所以我們推測在3進位的時候，會以1、2、10、20、100、200、1000、2000、10000的規律，出現一排完全不含3的倍數，這也是我們在最後一步必要的關鍵。

求證：巴斯卡三角形的第$n+1$行中$c_0^n, c_1^n, \cdots, c_n^n$都是不是三的倍數的必要充分條件是：

存在非負整數k，使$n=2^{s_1(n)}\times 3^{s_2(n)}-1$。

證明1)必要性。設這$n+1$個組合數都是不是3的倍數，因此，由上述定理

得知$n+1=2^{s_1(n)}\times 3^{s_2(n)}$。令$x=s_1(n)$、$y=s_2(n)$，於是$n=2^x\times 3^y-1$。

2)充分性。設$n=2^0\times 3^y-1$，於是$n=2+2\times 3+2\times 3^2+\cdots+2\times 3^{y-1}+3^y$，由此可知，n的3進位制表示是$\underbrace{22\cdots 22}_{y個}$於是$s_2(n)=y$、$s_1(n)=0$。

設$n=2^1\times 3^{y-1}$，於是$n=2+2\times 3+2\times 3^2+\cdots+2\times 3^{y-1}+3^y$，由此可見，n 的三進位制表示是$\underbrace{1}_{x個}\underbrace{222\cdots 22}_{y個}$，於是$s_1(n)=1=x$、$s_2(n)=y$。所以楊輝三角形的第 n+1 行中非三的倍數的個數為

$2^0\times 3^{s_2(n)}=3^y=n+1$、$2^1\times 3^{s_2(n)}=2\times 3^y=n+1$，這說明這一行中每一個數都不是三的倍數。

證完。

那如果$s_1(n)\geq 3$呢？
先假設$s_1(n)\geq 3$的情況下

求證：巴斯卡三角形的第$n+1$行中$c_0^n,c_1^n,\cdots,c_n^n$都是不是三的倍數的必要充分條件是：存在非負整數k，使$n=2^3\times 3^{s_2(n)}-1$

證明1)必要性。設這$n+1$個組合數都是不是三的倍數，因此，由上述定理

得知$n+1=2^3\times 3^{s_2(n)}$。令$s_1(n)=3=x$、$y=s_2(n)$，於是$n=2^3\times 3^{s_2(n)}-1$。

2)充分性。設$n=2^3\times 3^y-1$，於是$n=2+2\times 3+2\times 3^2+\cdots+2\times 3^{y-1}+3^{y+1}$，由此可知，$n$的 3 進位制表示是$\underbrace{10}_{1}\underbrace{222\cdots 22}_{y個}$於是$s_2(n)=y$，但$s_1(n)\neq 2$。

設$n=2^1\times 3^{y-1}$，於是$n=2+2\times 3+2\times 3^2+\cdots+2\times 3^{y-1}+3^y$，由此可見，$n$的三進位制表示是$\underbrace{1}_{x個}\underbrace{222\cdots 22}_{y個}$，於是$s_2(n)=y$、但$s_1(n)\neq 2$，得證。

而之後$s_1(n)$數愈大，加的 3 進位差距也愈大，故得證。

參●結論

帕斯卡三角形雖然已經被前人研究出了不少理論，但是此次研究可以看出，我們只根據帕斯卡三角形每行係數就做出了延伸，這表示帕斯卡三角行裡面還有許多重要的性質尚未被人研究出來，我們希望在未來可以找出這些性質關聯性，進而求出帕斯卡三角形最真實的樣貌，增進未來運算以及搜尋數列上的進步。

一開始做這篇小論文時，本以為是一篇平凡無奇的題目，但是一做才發現帕斯卡三角形神奇的性質深深吸引了我們，所以我們將數字與進位法用心的準備了一番，雖然數次遇到瓶頸，但最終仍讓我們在努力以及老師的用心指導下順利完成這一篇小論文。

肆●引註資料

註一：維基百科
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B7%B4%E6%96%AF%E5%8D%A1%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2 (網路資料)。

註二：常庚哲，蘇淳著。奇數與偶數。九章出版社。1994。

註三：容士毅(譯)。數學是什麼。左岸文化出版。2010。

註四：高中第二冊數學課本。龍騰出版。

註五：巴斯卡三角形的幾個性質，科學教育月刊，第 275 期。2004 年 12 月。