投稿類別：數學組

篇名：棋盤棋子排列問題

作者：
高亮家。市立高雄中學。高一 14 班
葉柏輝。市立高雄中學。高一 10 班
邱湘涵。市立高雄女中。高一 05 班

指導老師：黃仁杰

壹、前言

一、研究動機

因為對數學的好奇與濃烈的興趣，我們時常在課餘時間去找老師請教數學相關問題，而老師給予了我們許多不同的建議與想法，其中最讓我們感興趣的就是棋盤棋子排列問題——在正方形棋盤上，每行每列都必須有同數量的棋子並計算其排列組合總量。

我們發現，正方形棋盤的邊格數與不同排列組合的總量似乎有一定的關聯性。因而激起我們的好奇心，想探討棋盤的格數與排列組合總量是否具有關聯性？

二、研究目的

探討棋盤棋子排列問題中組合數與邊格數的關聯性

三、名詞解釋

(一)邊格數 m：棋盤為正方形，邊長的格數。
(二)有效組合：若每行、每列皆有 2 個棋子。
(三)組合數 A：每一邊格數下所有有效組合的數量。
(四)行：由上而下分別為第 1 行、第 2 行、第 3 行……。
(五)列：由左而右分別為第 1 列、第 2 列、第 3 列……。
(六)$f_2(m)$：邊格數為 m 下，每行每列放 2 個下的組合數。

貳、正文

一、探討方式

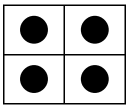
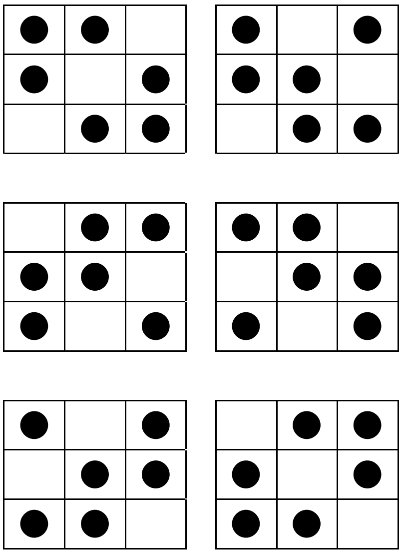
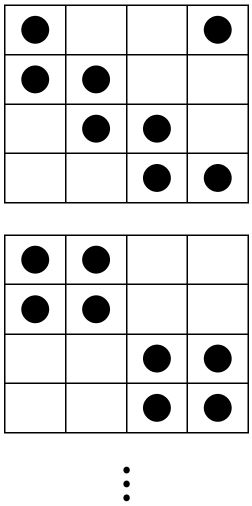
我們先將問題簡化成方便研究的形式後，再進行組合數的分析，最後整理結論。

並通過實際棋盤與程式數據對結論進行驗證。

二、問題簡化

首先觀察邊格數增加時，有效組合的數量及排列方式，如下表：

表 1：m=2 到 m=4 的排列變化：

m=2	m=3	m=4
		

當邊格數增加時，排列的組合便越來越多，於是我們便開始思考如何簡化問題。透過取捨原理與城堡多項式(林延輯，2011)，我們發想可以透過重新排列行跟列，並思考如何計算，使問題變得更加簡單，如圖 1。

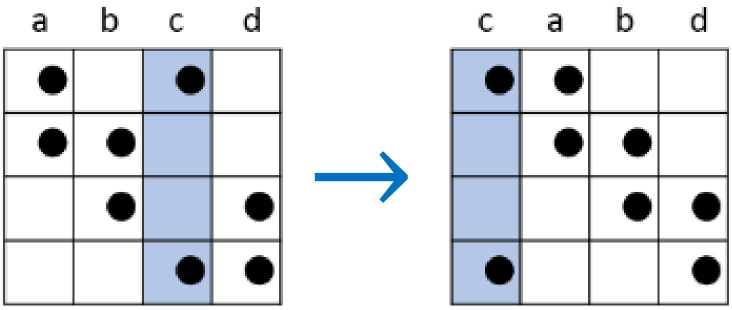


圖 1：重新排列直列

我們發現重新排列前，第一列的方格總共有C_2^m種排列方式。

首先，我們重新排列直列，將第一列有棋子的方格都集中到左上角，如圖 1。接下來，我們將第一列固定後，重新排列橫行，如圖 2。

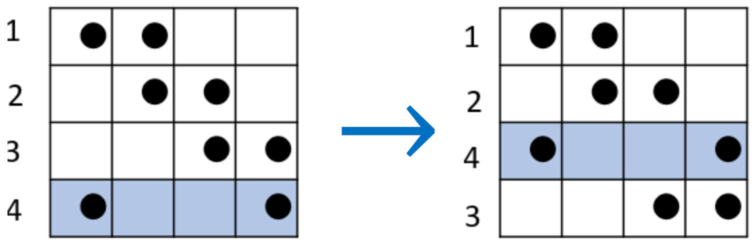
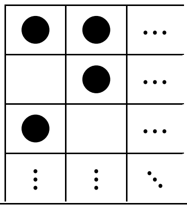
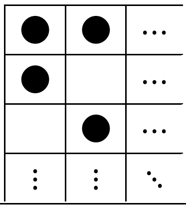
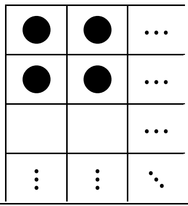


圖 2：重新排列橫行

我們觀察結果後得知重新排列後，左上角呈以下三種型式，見表 2。

表 2：三種型式：

型式 I	型式 II	型式 III
		

由於每橫行只能存在兩個棋子，所以型式 I、II、III 的第 1、2 列的棋子位置都已經確定；型式 I、II 的第 1 行已經確定；型式 III 的第 1、2 行已經確定。型式 I 的第 1、2 列經過調換後會與型式 II 相同，所以我們便將棋盤都整理成型式 II、III，方便進行分析。

若棋盤的邊格數為 3，則棋盤只可能呈現型式 II，又透過有效組合的規定得知剩餘的棋子只有一種排列方式，所以我們便將左上角為型式 II 的組合數定義為$g_2(m)$，且$g_2(3) = 1$。

三、組合數分析

由於第 1 列的棋子共有C_2^m種排列方式，所以我們求出型式 II 重新排列前的組合數(A_{II})和型式 III 重新排列前的組合數(A_{III})總和後，就可以透過式 1 求出總組合數：

式 1：$f_2(m) = (A_{II} + A_{III}) \cdot C_2^m = A_{II} \cdot C_2^m + A_{III} \cdot C_2^m$

(一)型式 III 的分析

我們發現型式 III 的前二行、列都已經確定(如圖 3)，所以只要先求出邊格數為$m-2$棋盤的組合數、再計算橫行的排列組合，便可得到A_{III}，如式 2：

式 2：$A_{III} = f_2(m-2) \cdot (m-1)$

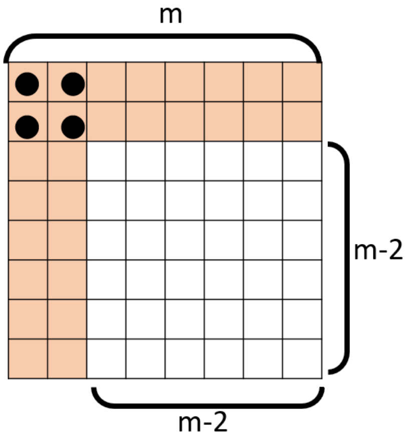


圖 3：型式 III 分析

(二)型式 II 的分析

我們已將型式 II 的組合數定義為$g_2(m)$，所以我們只要計算重新排列橫行的組合、再乘以 2(型式 I+型式 II)，便可以得到A_{II}，如式 3：

$$式 3：A_{II} = g_2(m) \cdot C_2^{m-1} \cdot 2$$

(三)$g_2(m)$分析

我們發現可以使用問題簡化的方式進行整理。我們將圖 4-1 的綠色方格區域進行直列的重新排列，最後的結果，如圖 4。

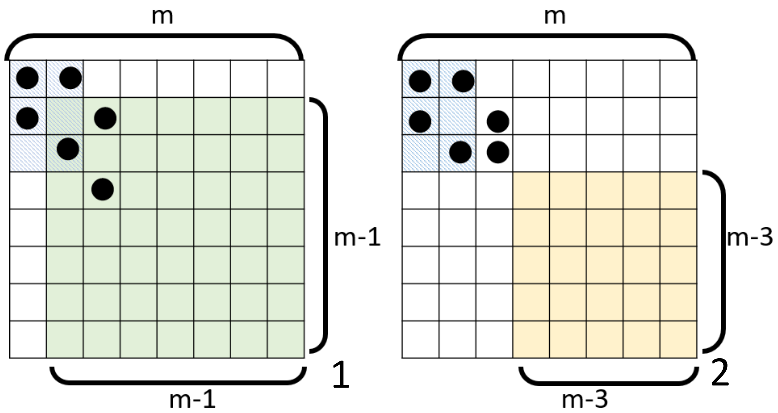
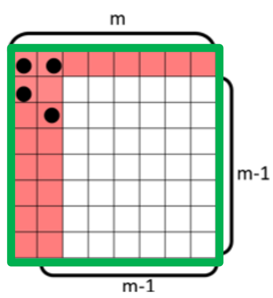
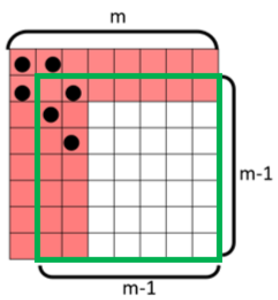
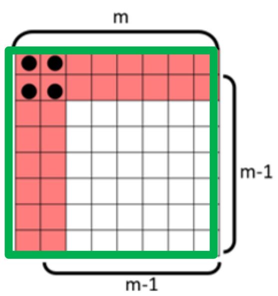
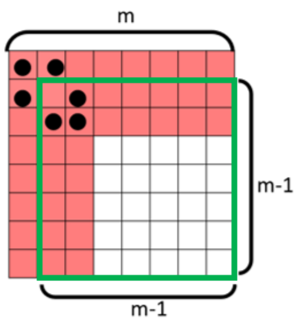


圖 4：$g_2(m)$分析

我們把$g_2(m)$重新排列後，可以把它簡化成兩種型式，圖 4-1 為型式 A、圖 4-2 為型式 B。

我們先型式 A、B 排除第 1 列、第 1 行，之後比較型式 A、B 與型式 II、III，我們發現型式 A 與型式 II 相似、型式 B 與型式 III 相似，兩者的差異點只在綠色方框左上角的棋子有無，如表 3。

表 3：型式 II、III 與型式 A、B 比較

型式 II 型式 A		
型式 III 型式 B		

接著我們進行近一步的分析表 3，我們使用紅色網底表示已經放滿棋子的行與列。我們發現型式 II、A 和型式 III、B 綠色方框內的使用紅色網底的行與列皆完全相同，所以我們推論我們可以分別使用分析型式 II、III 來分析型式 A、B。所以我們大膽推論得到了式 4：

$$式 4：g_2(m) = f_2(m-3)\cdot(m-2) + g_2(m-1)\cdot C_2^{m-2}\cdot 2$$

(四)統整及討論

最後我們統整式 1、式 2、式 3：

$$\begin{aligned} f_2(m) &= (A_{II} + A_{III})\cdot C_2^m \\ &= A_{II}\cdot C_2^m + A_{III}\cdot C_2^m \\ &= [g_2(m)\cdot C_2^{m-1}\cdot 2]\cdot C_2^m + [f_2(m-2)\cdot(m-1)]\cdot C_2^m \\ &= f_2(m-2)\cdot(m-1)\cdot C_2^m + g_2(m)\cdot C_2^{m-1}\cdot 2\cdot C_2^m \end{aligned}$$

將式 4 帶入上式後可以得到以下結果，如式 5 所示：

$$\begin{aligned}\text{式 }5\text{：}f_2(m) = {} & f_2(m-2)\cdot(m-1)\cdot C_2^m + \\ & f_2(m-3)\cdot(m-2)\cdot C_2^m\cdot C_2^{m-1}\cdot 2^1 + \\ & f_2(m-4)\cdot(m-3)\cdot C_2^m\cdot C_2^{m-1}\cdot C_2^{m-2}\cdot 2^2 + \\ & f_2(m-5)\cdot(m-4)\cdot C_2^m\cdot C_2^{m-1}\cdot C_2^{m-2}\cdot C_2^{m-3}\cdot 2^3 + \\ & \vdots \\ & f_2(2)\cdot 3\cdot C_2^m\cdot C_2^{m-1}\cdot\cdots\cdot C_2^4\cdot 2^{m-4} + \\ & g(4)\cdot C_2^m\cdot C_2^{m-1}\cdot\cdots\cdot C_2^3\cdot 2^{m-3}\end{aligned}$$

又因為$g_2(m) = f_2(m-3)\cdot(m-2) + g_2(m-1)\cdot C_2^{m-2}\cdot 2$

$$\begin{aligned}\text{且}f_2(m-1) = {} & f_2(m-3)\cdot(m-2)\cdot C_2^{m-1} + \\ & f_2(m-4)\cdot(m-3)\cdot C_2^{m-1}\cdot C_2^{m-2}\cdot 2^1 + \\ & \vdots \\ & f_2(2)\cdot 3\cdot C_2^{m-1}\cdot C_2^{m-2}\cdot\cdots\cdot C_2^4\cdot 2^{m-5} + \\ & g(4)\cdot C_2^{m-1}\cdot C_2^{m-2}\cdot\cdots\cdot C_2^3\cdot 2^{m-4}\end{aligned}$$

所以我們發現：$g_2(m)\cdot C_2^{m-1} = f_2(m-1)$

$$\begin{aligned}\text{故我們得出：}f_2(m) &= [f_2(m-2)\cdot(m-1) + g_2(m)\cdot C_2^{m-1}\cdot 2]\cdot C_2^m \\ &= [f_2(m-2)\cdot(m-1) + f_2(m-1)\cdot 2]\cdot C_2^m\end{aligned}$$

整理過後，我們最後得到了一個簡化後的公式，如式 6。並定義：$f_2(1) = 0$(不可能存在有效組合)、$f_2(2) = 1$(僅有完全放滿的組合)。

$$\text{式 }6\text{：}f_2(m) = C_2^m\cdot[2\cdot f_2(m-1) + f_2(m-2)\cdot(m-1)],(\forall m\in\mathbb{Z}^+)\land(m\geq 3)$$

四、結果驗證

為驗證算式的結果，我們撰寫了一個 Python 程式驗證結果。我們將有放置棋子的棋格用數值 1 代表、沒有放置棋子的棋格用數值 0 代表。先計算出每一橫行可能出現的棋子組合，再計算棋子組合所有不同的排列方式，再從中挑選出有效、未重複的組合，之後計算數量，便可以得出所有有效組合的數量。如此便不會出現任何遺漏。

驗證後，我們確定$f_2(3)$～$f_2(5)$的結果無誤。

五、實際計算邊格數為 6 棋盤的組合數($f_2(6)$)

(一) 簡化為兩種型式

棋盤第 1 行可擺放兩個棋子，所以第 1 行棋子排列的組合總共有$C_2^6 = 15$組。我們將有放置棋子的直列移至第 1、2 列後，接著進行第 2 行的分析。

觀察第 1、2 列有棋子擺放的橫行，將他們移動到第 2、3 行，如圖 5。總共有兩種不同的型式，我們可將第 II 型的組合數計算為「邊格數為 6 的$g_2(m)$方格組合數×重新排列橫行的組合×(第 I 型+第 II 型)」，得到$A_{II} = g_2(6) \cdot C_2^{6-1} \cdot 2$；第 III 型的組合數可被計算為「邊格數為 4 棋盤組合數×重新排列橫行的組合」，得到$A_{III} = f_2(6-2) \cdot C_1^{6-1} = f_2(6-2)(6-1)$。統整兩種型式的組合後，我們可以獲得邊格數為 6 時的組合數為：$(A_{II} + A_{III}) \cdot 15 = [g_2(6) \cdot 10 \cdot 2 + f_2(4) \cdot 5] \cdot 15$。

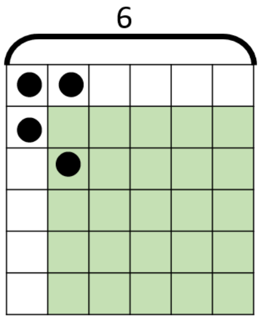


圖 5-1：第 II 型

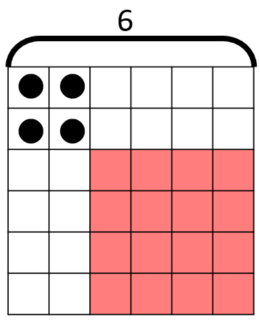


圖 5-2：第 III 型

(二) 繼續分析圖 5-1

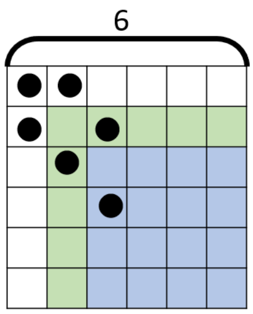


圖 6：分析圖 5-1

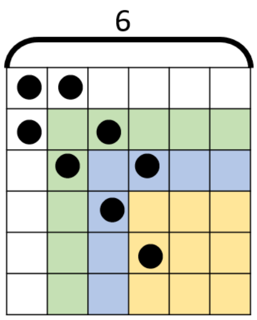


圖 7-1：型式一

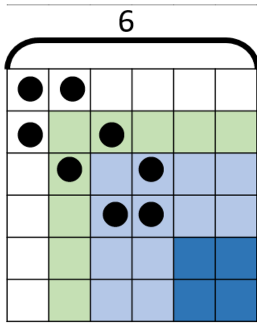


圖 7-2：型式二

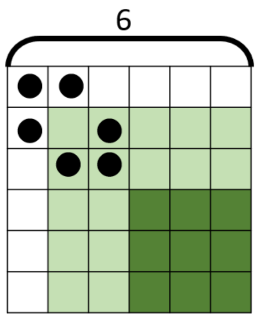


圖 7-3：型式三

我們可在其中圈出一個較小的棋盤，如圖 6 的藍色區域或圖 7-3 的綠色區域。我們將藍色區域進行重新排列行與列後，可以獲得兩種型式，如圖 7-1、7-2。

分析圖 7-1，可獲得一個較小的棋盤(黃色區域)，黃色區域邊格數為 3，又

$g_2(3)=1$，型式一的組合數為：$g_2(4-1)\cdot C_2^{4-2}\cdot 2\cdot C_2^{5-2}\cdot 2\cdot C_2^{6-2}\cdot 2=144$。

分析圖 7-2，可獲得一邊格數為 2 的方格，該方格只有唯一一種解，所以型式二的組合數為：$f_2(2)\cdot 3\cdot C_2^{6-2}\cdot 2=36$。

分析圖 7-3，我們發現深綠色區域的邊格數為 3，所以該型式下的組合數為：$f_2(3)\cdot 4=24$

據以上結果可知$g_2(6)$的組合數為：$g_2(6)=144+36+24=204$。

(三) 繼續分析圖 5-2

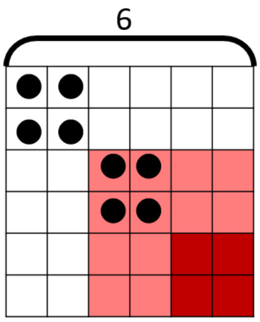


圖 8-1：型式α

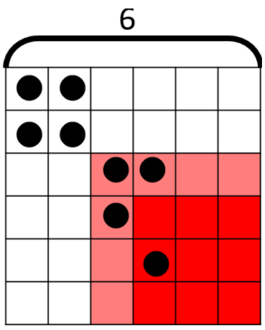


圖 8-2：型式β

已知第 III 型可切出一個邊格數為 4 的棋盤，如圖 8 的紅色區域，所以我們開始分析邊格數為 4 棋盤的組合數。我們發現在重新排列行與列後，棋盤會呈現兩種型式，如圖 8。

先對圖 8-1 進行分析，我們發現可再切分出一邊格數為 2 棋盤的棋盤(圖中的深紅色區域)，於是我們可以得到型式α的組合數為：$f_2(3)\cdot 3\cdot C_2^4=18$。

接著對圖 8-2 進行分析，我們發現可切分出邊格數為 3 的棋盤(圖中的亮紅色區域)，所以我們計算出型式β的組合數為：$g_2(4-1)\cdot C_2^{4-2}\cdot 2\cdot C_2^4=72$。

根據以上結果，我們整理得到：$f_2(4)=18+72=90$。

(四) 統整分析結果

$$
\begin{aligned}
f_2(6)&=(A_{II}+A_{III})\cdot C_2^6\\
&=[g_2(6)\cdot C_2^{6-1}\cdot 2+f_2(6-2)\cdot C_1^{6-1}]\cdot 15\\
&=[g_2(6)\cdot 10\cdot 2+f_2(4)\cdot 5]\cdot 15
\end{aligned}
$$

$$= \{[(4-1)\cdot C_2^{4-2}\cdot 2\cdot C_2^{5-2}\cdot 2\cdot C_2^{6-2}\cdot 2 + f_2(2)\cdot 3\cdot C_2^{6-2}\cdot 2 + f_2(3)\cdot 4]\cdot C_2^{5}\cdot 20 + [f_2(3)\cdot 3\cdot C_2^{4} + g_2(4-1)\cdot C_2^{4-2}\cdot 2\cdot C_2^{4}]\cdot 5\}\cdot 15$$
$$= (204\cdot 20 + 90\cdot 5)\cdot 15$$
$$= 67950$$

(五) 使用公式計算

透過$f_2(m) = C_2^m \cdot [2\cdot f_2(m-1) + f_2(m-2)\cdot(m-1)]$，
且已知$f_2(1) = 0$(不可能存在有效組合)、$f_2(2) = 1$(僅有完全放滿的組合)，
我們得到：

$$f_2(3) = C_2^3\cdot[2\cdot f_2(3-1) + f_2(3-2)\cdot(3-1)]$$
$$= 3\cdot[2\cdot f_2(2) + f_2(1)\cdot 2]$$
$$= 3\cdot[2\cdot 1 + 0\cdot 2]$$
$$= 6$$

$$f_2(4) = C_2^4\cdot[2\cdot f_2(3) + f_2(2)\cdot 3] = 90$$

$$f_2(5) = C_2^5\cdot[2\cdot f_2(4) + f_2(3)\cdot 4] = 2040$$

$$f_2(6) = C_2^6\cdot[2\cdot f_2(5) + f_2(4)\cdot 5] = 67950$$

(六) 討論

我們發現推導出的公式確實有符合實際的情形，所以未來可以使用公式就可快速地獲得結果，節省複雜的計算過程。

參、結論

我們透過城堡多項式中提及重新排列行與列的想法，發現了重新排列後就可以大大地簡化棋盤方格這項巧妙的構思，並獲得了以下結果：

1. 重新排列行與列，是簡化棋盤類問題的好方法，我們可以更加簡單的討論棋盤問題。
2. 棋盤旗子排列問題確實有公式存在，該公式為一個二階遞迴。如下式：

式 6：$f_2(m) = C_2^m\cdot[2\cdot f_2(m-1) + f_2(m-2)\cdot(m-1)], (\forall m\in\mathbb{Z}^+)\wedge(m\geq 3)$

未來我們希望可以探討棋盤棋子問題在不同棋子數下的情形，希望可以找到一個在二維空間下的通解。

除此之外，我們再撰寫程式時，發現棋子的有無可以使用 0、1 來代表、並以(x, y)表示棋子的平面位置。所以引發我們的興趣，我們推論在三維空間時可以使用(x, y, z)表示空間位置，而在n維空間中則可以使用$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$表示位置，再求出組合數，這留待我們進一步的探討研究。

肆、引註資料

1.林延輯(2011)。**取捨原理與城堡多項式**。2019 年 9 月 28 日，取自 http://web.hshs.ntpc.edu.tw/高中優質化/學生學習/數學培育/DOC/111129-h.pdf。

2.佩捷(1995)。**300 個最新世界著名數學智力趣題**。哈爾濱市：哈爾濱出版社。

3.葉名倉(編)(2013)。**普通高級中學一年級下學期數學課本**。南一書局。