

元 智 大 學

機械工程研究所

碩 士 論 文

貼覆與內埋壓電材料結構應力與撓曲分析

研 究 生：葉天嘯

指 導 教 授：何旭川 博士

中 華 民 國 九 十 七 年 七 月

貼覆與內埋壓電材料結構應力與撓曲分析

The Stress and Deflection Analysis of The Beam and Plate Induced by The  
Surface Bonded or Embedded Piezoelectric Actuators

研 究 生：葉 天 嘯 Student: Tien-Hsiao Yeh

指 導 教 授：何 旭 川 Advisor: Shih-Chuan Her

元 智 大 學

機 械 工 程 研 究 所

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering  
College of Engineering  
Yuan Ze University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master of Science  
in  
Mechanical Engineering  
July 2008  
Chungli, Taiwan, Republic of China.

中 華 民 國 九 十 七 年 七 月

# 貼覆與內埋壓電材料結構應力與撓曲分析

學生：葉天嘯

指導教授：何旭川博士

私立元智大學機械工程研究所

## 摘 要

本文以樑理論為基礎結合應變連續條件，推導貼覆與內埋壓電材料施加電壓對樑與板結構所產生之軸向力與彎曲力矩，計算樑與板結構沿厚度方向之應力分佈，再藉由參數分析瞭解材料性質與幾何尺寸對結構應力分佈之影響。另再以壓電材料對板結構所產生之彎矩為負載，應用板理論推導平板撓曲位移，並以三維有限元素分析結果比較，驗證理論推導之準確性。最後以例題說明陣列式壓電致動器控制結構變形與形貌之可行性。

關鍵字：壓電材料、彎曲力矩、撓曲位移、板理論、陣列式壓電致動器

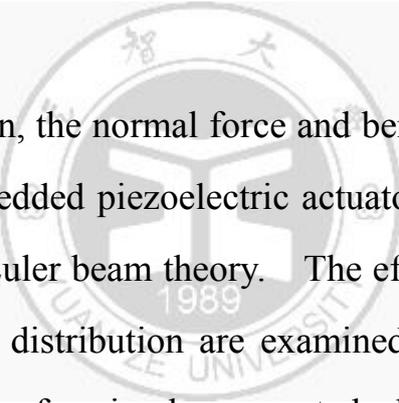
# The Stress and Deflection Analysis of The Beam and Plate Induced by The Surface Bonded or Embedded Piezoelectric Actuators

Student : Tien-Hsiao Yeh

Advisors : Shiuh-Chuan Her

Institute of Mechanical Engineering  
Yuan-Ze University

## ABSTRACT



In this investigation, the normal force and bending moment induced by the surface bonded or embedded piezoelectric actuators on the beam and plate are derived basing on the Euler beam theory. The effects of material property and thickness on the stress distribution are examined through a parametric study. The flexural deflection of a simply supported plate subjected to the bending moment is derived basing on the plate theory. The deflection is validated with the 3-D finite element results. Several examples are presented to demonstrate the capability of using the piezoelectric actuators to control the deformed shape of the plate.

Keywords : piezoelectric actuator, bending moment, deflection, plate theory

## 誌 謝

本文的撰寫研究得以順利完成，首先感謝指導教授 何旭川老師四年來的諄諄教誨與指導，對於本篇論文不僅費心審閱並且給予明確的修正建議，使得本篇論文得以完成。

這幾年於研究所的修業生涯中，感謝學長展緯、義川、志成，同學文斌、奕翔、志弘，學弟智閔、俊慶、順文、士傑、廷宇、政霖、涵鏞、守宸、治宇在生活、實驗與課業上的協助幫忙，以及好友亞淇、祥芳於精神上的鼓勵，於此致上最誠摯的感謝。

最後將本文獻給最愛的父親—大榮、母親—敏慧、大哥及大姐，感激給予生活上的照料以及精神上的支持，還有最重要精神支柱—琬珺與美粧，因為有妳們的照顧與扶持，才能使我能夠不停的在逆境中突破成長，得以完成學業，願以所有的成就與你們分享。

# 目錄

摘要.....	i
英文摘要.....	ii
致謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	vii
圖目錄.....	viii
第一章 序論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 研究動機.....	2
1.3 研究方法與內容.....	3
第二章 壓電原理.....	6
2.1 壓電效應.....	6
2.2 壓電方程式.....	7
第三章 含壓電層樑結構應力分析.....	13
3.1 貼覆壓電層樑結構軸向應力分析.....	13
3.2 內埋壓電層樑結構軸向應力分析.....	15
3.3 有限元素驗證.....	19
3.3.1 雙層樑結構.....	19

3.3.2 三層樑結構.....	21
3.4 影響參數分析.....	22
3.4.1 雙層樑結構厚度參數.....	22
3.4.2 雙層樑結構楊氏係數之影響.....	23
3.4.3 三層樑結構壓電材料內埋深度之影響.....	24
3.4.4 三層樑結構楊氏係數之影響.....	25
第四章 含壓電層之板結構應力分析.....	26
4.1 雙層板結構應力分析.....	26
4.2 三層板結構應力分析.....	28
4.3 有限元素驗證.....	32
4.3.1 雙層板結構.....	32
4.3.2 三層板結構.....	32
4.4 影響參數分析.....	34
4.4.1 雙層板結構厚度參數.....	35
4.4.2 雙層板結構楊氏係數之影響.....	36
4.4.3 三層板結構壓電材料內埋深度之影響.....	37
4.4.4 三層板結構楊氏係數之影響.....	38
第五章 平板貼覆壓電材料之撓曲分析.....	39
5.1 簡支撐平板撓曲位移.....	39

5.2 平板貼覆單片壓電材料.....	42
5.3 平板貼覆多片壓電材料.....	44
5.4 平板貼覆陣列式壓電片.....	45
第六章 平板內埋壓電材料之撓曲分析.....	47
6.1 平板內埋單片壓電材料.....	47
6.2 壓電材料內埋深度對平板結構之影響.....	49
6.3 平板內埋多片壓電材料.....	50
第七章 結論.....	51
※參考文獻.....	53



## 表目錄

表 3.1：各式等向性材料材料性質.....	55
表 3.2：各式壓電材料材料性質.....	56
表 3.3：等厚度結構基材層沿厚度方向之應力分佈.....	57
表 3.4：等厚度結構壓電層沿厚度方向之應力分佈.....	57
表 3.5：不等厚度結構基材層沿厚度方向之應力分佈.....	58
表 3.6：不等厚度結構壓電層沿厚度方向之應力分佈.....	59
表 4.1：不等厚度結構基材層沿厚度方向之應力分佈.....	60
表 4.2：不等厚度結構壓電層沿厚度方向之應力分佈.....	61
表 5.1：壓電片貼覆於平板不同位置 (5.11) 式與 ANSYS 計算所得最大撓 曲位移之比較.....	62
表 5.2：平板上方、中央、右側各貼覆壓電片施加不同電壓，(5.12) 式與 ANSYS 計算所得最大撓曲位移之比較.....	62

## 圖目錄

圖 2.1: 壓電效應.....	63
圖 2.2: 壓電現象各變數間之關係.....	64
圖 3.1: 雙層樑受壓電應變作用產生之負載自由體圖.....	65
圖 3.2: 三層樑結構圖.....	65
圖 3.3: 三層樑受壓電應變作用產生之負載自由體圖.....	66
圖 3.4: 雙層樑之網格示意圖.....	67
圖 3.5: 壓電材料貼覆鋼層沿鋼層中央軸向方向之軸向應力分佈.....	67
圖 3.6: 等厚度雙層樑結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (3.8) 式、 (3.9) 式解析解之比較.....	68
圖 3.7: 不同厚度雙層樑結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (3.8) 式、(3.9) 式解析解之比較.....	68
圖 3.8: 等厚度三層樑結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (3.27) 式、(3.28) 式、(3.29) 式解析解之比較.....	69
圖 3.9: 不同厚度三層樑結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (3.27) 式、(3.28) 式、(3.29) 式解析解之比較.....	69
圖 3.10: 雙層樑結構位置長度經規化於不同厚度比之軸向應力解析 解.....	70
圖 3.11: 雙層樑結構基材與壓電材料不同楊氏係數比之軸向應力分	

佈.....	70
圖 3.12：雙層樑結構在不同楊氏係數比 ANSYS 與公式 (3.8) 式、(3.9) 式計算所得基材與壓電層最大應力之比較.....	71
圖 3.13：壓電材料內埋深度計算.....	71
圖 3.14：三層樑結構壓電材料於不同內埋深度之軸向應力分佈.....	72
圖 3.15：三層樑結構壓電材料不同內埋深度以 ANSYS 解與公式計算所得上層基材與中間壓電層最大應力之比較.....	72
圖 3.16：內埋壓電材料於結構中央示意圖.....	73
圖 3.17：以公式計算內埋壓電材料於樑結構中央改變不同基材楊氏係數之應力分佈.....	73
圖 4.1：雙層板結構圖.....	74
圖 4.2：雙層板受壓電應變作用產生之剖面負載自由體圖.....	74
圖 4.3：三層板結構圖.....	75
圖 4.4：三層板受壓電應變作用產生之剖面負載自由體圖.....	76
圖 4.5：雙層板之 3D 網格示意圖.....	77
圖 4.6：不同厚度雙層板結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (4.9) 式、(4.10) 式解析解之比較.....	77
圖 4.7：上下兩層等厚度之三層板結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (4.26) 式、(4.27) 式、(4.28) 式解析解之比較.....	78

圖 4.8：上下兩層不同厚度之三層板結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (4.26) 式、(4.27) 式、(4.28) 式解析解之比較.....	78
圖 4.9：雙層板結構位置長度經規化於不同厚度比之軸向應力解析解.....	79
圖 4.10：雙層板結構基材與壓電材料不同楊氏係數比之軸向應力分佈.....	79
圖 4.11：雙層板結構在不同楊氏係數比 ANSYS 與公式 (4.9) 式、(4.10) 式計算所得基材與壓電層最大應力之比較.....	80
圖 4.12：三層板結構壓電材料於不同內埋深度之軸向應力分佈.....	80
圖 4.13：三層板結構壓電材料不同內埋深度以 ANSYS 解與公式(4.26)式、(4.27) 式計算所得上層基材與中間壓電層最大應力之比較.....	81
圖 4.14：以公式計算內埋壓電材料於板結構中央改變不同基材楊氏係數之應力分佈.....	81
圖 5.1：壓電片於平板之彎矩分佈.....	82
圖 5.2：壓電片置平板中央.....	83
圖 5.3：壓電片置平板右側.....	83
圖 5.4：壓電片置平板上方.....	83
圖 5.5：壓電片貼覆平板中央 ANSYS 之三維有限元素網格.....	84

圖 5.6：壓電片貼覆平板中央 (5.11) 式計算所得平板撓曲變形.....	85
圖 5.7：壓電片貼覆平板中央 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變形.....	85
圖 5.8：壓電片貼覆平板中央以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平 中線撓曲位移.....	86
圖 5.9：壓電片貼覆平板中央以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直 中線撓曲位移.....	86
圖 5.10：壓電片貼覆平板右側 (5.11) 式計算所得平板撓曲變形.....	87
圖 5.11：壓電片貼覆平板右側 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變 形.....	87
圖 5.12：壓電片貼覆平板右側以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平 中線撓曲位移.....	88
圖 5.13：壓電片貼覆平板右側以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直 中線撓曲位移.....	88
圖 5.14：壓電片貼覆平板上方 (5.13) 式計算所得平板撓曲變形.....	89
圖 5.15：壓電片貼覆平板上方 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變 形.....	89
圖 5.16：壓電片貼覆平板上方以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平 中線撓曲位移.....	90
圖 5.17：壓電片貼覆平板上方以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直	

中線撓曲位移.....	90
圖 5.18：簡支撐平板中央、上方與右側位置貼覆壓電片.....	91
圖 5.19：多片貼覆之疊加示意圖.....	92
圖 5.20：壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加相同電壓-100V 以 (5.12) 式計算所得平板撓曲變形.....	93
圖 5.21：壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加相同電壓-100V 以 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變形.....	93
圖 5.22：壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加相同電壓-100V 以 (5.12) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平中線撓曲位 移.....	94
圖 5.23：壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加相同電壓-100V 以 (5.12) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直中線撓曲位 移.....	94
圖 5.24：壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加電壓分別以 100V、 -200V 及 -100V 以 (5.12) 式計算所得平板撓曲變 形.....	95
圖 5.25：壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加電壓分別以 100V、 -200V 及 -100V 以 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變 形.....	95

圖 5.26：壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加電壓分別以 100V、 -200V 及-100V 以 (5.12) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平中線 撓曲位移.....	96
圖 5.27：壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加電壓分別以 100V、 -200V 及-100V 以 (5.12) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直中線 撓曲位移.....	96
圖 5.28：十二片壓電片陣列貼覆平板.....	97
圖 5.29：例題 1 壓電片陣列式貼覆對平板所產生之撓曲變形.....	98
圖 5.30：例題 2 壓電片陣列式貼覆對平板所產生之撓曲變形.....	98
圖 5.31：例題 3 壓電片陣列式貼覆對平板所產生之撓曲變形.....	99
圖 6.1：壓電片內埋深度計算方式.....	100
圖 6.2：壓電片內埋深度 2mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變 形.....	100
圖 6.3：壓電片內埋深度 2mm 於平板右側位置對平板所產生之撓曲變 形.....	101
圖 6.4：壓電片內埋深度 2mm 於平板上方位置對平板所產生之撓曲變 形.....	101
圖 6.5：壓電片內埋深度 2mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變 形.....	102

圖 6.6：壓電片內埋深度 1.5mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形.....	102
圖 6.7：壓電片內埋深度 1mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形.....	103
圖 6.8：壓電片內埋深度 0.5mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形.....	103
圖 6.9：壓電片內埋深度 0.1mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形.....	104
圖 6.10：平板最大撓曲位移與壓電片內埋深度關係曲線.....	104
圖 6.11：壓電片內埋深度 1.5mm 於平板中央、右側、上方三位置施加相同電壓-100V 對平板所產生之撓曲變形.....	105
圖 6.12：壓電片內埋深度 1.5mm 於平板中央、右側、上方三位置施加電壓分別為 100V、-200V 和 -100V 對平板所產生之撓曲變形.....	105

# 第一章 序論

## 1.1 前言

一般壓電材料具有出力大、位移小、響應快、能量轉換率高與姿態影響小等之優點，當壓電致動器給予結構物負荷時，感測器（Sensors）在感測結構物振動後提供訊息加以處理，再藉由致動器將此負荷對結構物所造成的影響，減至最輕的程度。而致動器或感測器便利用這些特性或效應來達成致動與感測之目的。若能適當應用將壓電材料置於適切位置可作為結構變形控制。

本文目的即在於推導出壓電材料與結構物之間的靜態響應，藉以瞭解壓電致動器如何影響結構物之變形後，可由相關控制科系人員設計一控制器，處理感測器所感測到的變形，並將運算後結果回授給致動器反制其變形。

## 1.2 研究動機

對於利用壓電材料作為致動器抑制結構物振動的概念，以下做簡單介紹。一般而言，當一外力作用在一結構物上時，其所引發的振動是包含多

個不同頻率，當振動頻率接近此結構之自然頻率（Natural frequency）時，其振幅則因共振而大增造成結構物永久性的損壞。振動對儀器及實驗設備與土木結構的傷害，包括降低機器工作精度，造成結構疲勞破壞縮短使用壽命，甚至產生噪音讓人感到不適。本文利用壓電材料的機械能與電能之間的轉換現象，作為致動器以產生變形，並選取各式材料為主結構，利用樑原理之概念，推導壓電致動器與結構層之間的力學關係，進而探討貼覆與內埋壓電致動器的靜態反應，藉以瞭解壓電材料對結構之致動。

### 1.3 文獻回顧

壓電材料於 18 世紀被發現、發展，至今仍被廣泛的討論與應用。1824 年 Brewster 即發現電氣石中的熱電效應或焦電效應，1880 年，Curie 兄弟發現了壓電效應，此後，便展開了對於利用壓電材料當作致動器以及感測器之研究。

吳朗[1]對於壓電效應以及其應用有基礎的說明，劉俊彥[2]與 Ugural[5]對板殼力學應用於簡支撐平板上有詳細的理論推導與說明，Johnson[3]對於壓電材料以有限元素分析軟體 ANSYS 分析有詳細的介紹與說明，Crawly, Luis[4]對於壓電片與一維樑結構之結合有詳細之推導，周卓明[6]對於壓電材料的特性及材料機電效應與轉換關係式有詳細說明，Ghosh 和 Batra[7]

以壓電元素來控制平板變形與形狀，Sadri 等[8]以基因演算法求得等向性平板貼覆壓電致動器的最佳位置，Ha 等[9]以有限元素分析含壓電感測器之複合材料結構，Baz 和 Poh[10]分析以壓電材料為致動器的主動式控制，Yan 和 Yam[11]探討壓電材料與複合材料結構相互影響的力學方法，Wang 等[12]利用貼覆壓電材料於樑的位置來控制樑結構振動變形的最佳化，Timoshenko[13]提出雙層樑結構受熱應力的解析模型，Liu 和 Pavlovic[14]提出簡支撐平板受到任意負載的撓曲位移解決方式，Brennan 等[15]解釋壓電致動器對樑結構之動態耦合響應，Gatti 等[16]利用貼覆壓電致動器對樑結構之振動控制。上述諸多文獻對內埋或貼覆壓電致動器智慧結構的探討，多以數值方法如有限元素法分析，本文將以樑結構理論推導貼覆與內埋壓電致動器對結構所產生的力或力矩，再利用板殼理論推導出平板四邊簡支撐的撓曲位移方程，再將前述壓電致動器所產生的力或力矩導入平板之撓曲位移方程求得其變形與位移，利用 ANSYS 有限元素分析與理論推導所得做比較，驗證分析模型的準確性。

#### 1.4 研究方法及內容

本文將以結構力學推導貼覆式和內埋單層壓電致動器對板結構所產生的軸向力或力矩，壓電材料為 d 型態的壓電片。並將以 ANSYS 有限元素分析軟體計算壓電致動器對各式材料主結構之靜態響應，再與理論推導所

得比較，驗證分析模型的準確性。

第一章序論主要敘述壓電材料在智慧型結構上的應用，並闡述本篇論文目的與本文研究方法。

第二章概述壓電基本原理，並且介紹四種不同型態壓電材料之壓電方程式。

第三章概述利用彈性力學理論推導壓電材料貼覆於結構間的負載，並以 ANSYS 之有限元素驗證理論之準確性，針對不同參數對結構的影響加以分析。

第四章概述利用彈性力學理論推導壓電材料內埋於結構間的負載，並以 ANSYS 之有限元素驗證理論之準確性，針對不同參數對結構的影響加以分析。

第五章應用板理論求解簡支撐之邊界條件平板，利用第四章所求得壓電材料貼覆於平板之彎矩負載，求得壓電材料於定電壓下對結構造成之撓曲變形與位移，再個別求得之撓曲位移以疊加法相加求得平板同時貼覆多片壓電片之撓曲變形與位移，並以 ANSYS 之有限元素驗證理論之準確性，最後以例題說明壓電片陣列式貼覆平板所造成之變形。

第六章利用第四章所求得壓電材料內埋於平板之彎矩負載，求得壓電材料於定電壓下對結構造成之撓曲變形與位移，再個別求得之撓曲位移以疊加法相加求得平板同時內埋多片壓電片之撓曲變形與位移，並討論不同

內埋深度下對結構撓曲位移之影響。

第七章為結論。



## 第二章 壓電原理

壓電系統與壓電材料的發現、發展或發明早十八世紀就開始了，至今仍然被廣泛運用。1824 年布魯斯特 (Brewster) 即發現電器石 (Tormaline) 中的熱電效應或焦電效應 (Pyroelectricity) 以及其中的結晶狀態。稍後勞德克爾文 (Lord Kelvin) 也證實電氣石的焦電效應係晶粒永久分極 (Polarization) 所導致的。

1880 年皮爾居里與賈克斯居禮兄弟 (Piere Curie and Jacques Curie) 從石英 (Quartz) 中發現壓電效應或鐵電效應 (Piezoelectricity or Ferroelectricity Effect)，而且更發現對石英施予不同方向的力或作不同方向的切割會產生不同的壓電效應。

### 2.1 壓電效應

壓電現象包含了正壓電效應 (Direct piezoelectric effect) 以及逆壓電效應 (Converse piezoelectric effect)，他們的基本工作現象可分述如下[1]：

- 正壓電效應：

當一機械應力加入一壓電材料時，材料的兩端會伴隨著產生一個與應力大小成比例的電荷 (或電壓)，如圖 2.1 b 所示，當應力方向相反

時，電荷(電壓)的極性，亦會隨之而逆反，如圖 2.1 c 所示。

- 逆壓電效應：

當一直流電場加入材料兩端時，材料的形變會隨著電場的大小來改變，如圖 2.1 d 所示。而當一電場方向逆反時，材料的形變也隨之改變，如圖 2.1 e 所示。若將電場改為交流電，材料的形變方向會隨著電場的正、負半週做收縮及膨脹的交互變化，如圖 2.1 f 所示，當交流電場的頻率等於材料本身的自然諧振頻率時 (natural resonance frequency)，形變的幅度為最大。



## 2.2 壓電方程式

壓電性基本上是一種機械能與電能之間的能量轉換現象，對一非壓電材料而言，加入機械應力  $T$  產生一機械應變  $\epsilon$ ，或加入一電場  $E$  產生電位移  $D$ ，有以下的關係：

$$S = sT \quad (2.1)$$

或  $T = cS \quad (2.2)$

$$D = \alpha E \quad (2.3)$$

或  $E = \beta D \quad (2.4)$

其中



- $e$  型態

$$\sigma = c^E \varepsilon - e_t E \quad (2.9)$$

$$D = e \varepsilon + \alpha^E E \quad (2.10)$$

- $h$  型態

$$\sigma = c^D \varepsilon - h_t D \quad (2.11)$$

$$E = -h \varepsilon + \beta^E D \quad (2.12)$$

其中  $d, g, e, h$  稱為壓電參數 (piezoelectric parameters)，而  $d_t, g_t, e_t, h_t$  則分別表示  $d, g, e, h$  的易位矩陣 (transport matrix)。而各參數之上標表示其邊界條件 (boundary condition)：

$s^E$	表示當電場為定值時所測量得到的韌性常數
$s^D$	表示當電位移為定值時所測量得到的韌性常數
$c^E$	表示當電場為定值時所測量得到的剛性常數
$c^D$	表示當電位移為定值時所測量得到的剛性常數
$\alpha^\sigma$	表示當應力為定值時所測量得到的介電常數
$\alpha^\varepsilon$	表示當應變為定值時所測量得到的介電常數
$\beta^\sigma$	表示當應力為定值時所測量得到的反誘電係數
$\beta^\varepsilon$	表示當應變為定值時所測量得到的反誘電係數

上述之壓電方程式，其各個自變數及應變數之間的關係，可參考圖 2.2 所

示。上述四個壓電參數並非獨立，通常可由其中兩個值求解另一值，它們之間的關係如下：

$$d = \alpha^\sigma g = es^E \quad (2.13)$$

$$g = \beta^\sigma d = hs^D \quad (2.14)$$

$$e = \alpha^\varepsilon h = dc^E \quad (2.15)$$

$$h = \beta^\varepsilon e = gc^D \quad (2.16)$$

壓電關係並非單純之純量關係，而為一有方向性的向量或張量關係，其中機械變數（應力及應變）為二階對稱張量，而介電變數（電場及電位移）為向量。由於壓電參數為機械變數與介電變數間的關係，所以其為三階張量，彈性參數表示兩個二階張量間的關係，故其為一四階張量，而介電參數表示兩個向量間的關係，故為一二階張量。本篇論文之推導過程，將使用  $d$  型態之壓電參數，其所涉及的應力( $\sigma$ )、應變( $\varepsilon$ )、電場(E)及電位移( $D$ )的關係，可以壓電方程式來表示：

$$D_i = \sum_{m=1}^6 d_{im} \sigma_m + \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}^\sigma E_j \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_m = \sum_{n=1}^6 s_{mn}^E \sigma_n + \sum_{i=1}^3 d_{im} E_i \quad (2.18)$$

其中下標  $i, j=1\sim 3$  ；  $m, n=1\sim 6$

表示成矩陣形式則為[1]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ D_{e1} \\ D_{e2} \\ D_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^E & S_{12}^E & S_{13}^E & S_{14}^E & S_{15}^E & S_{16}^E & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ S_{21}^E & S_{22}^E & S_{23}^E & S_{24}^E & S_{25}^E & S_{26}^E & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ S_{31}^E & S_{32}^E & S_{33}^E & S_{34}^E & S_{35}^E & S_{36}^E & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ S_{41}^E & S_{42}^E & S_{43}^E & S_{44}^E & S_{45}^E & S_{46}^E & d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ S_{51}^E & S_{52}^E & S_{53}^E & S_{54}^E & S_{55}^E & S_{56}^E & d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ S_{61}^E & S_{62}^E & S_{63}^E & S_{64}^E & S_{65}^E & S_{66}^E & d_{16} & d_{26} & d_{36} \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & \alpha_{11}^\sigma & \alpha_{12}^\sigma & \alpha_{13}^\sigma \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & \alpha_{21}^\sigma & \alpha_{22}^\sigma & \alpha_{23}^\sigma \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & \alpha_{31}^\sigma & \alpha_{32}^\sigma & \alpha_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

由矩陣對角對稱之關係，欲知壓電材料的特性必須求得 21 個彈性參數、18 個壓電常數及 6 個介電常數，總共有 45 個未知數待求。但實際上，因為結晶之對稱關係，使得部份參數不存，以 z 軸方向極化的壓電陶瓷而言，其壓電矩陣可簡化如下[1]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ D_{e1} \\ D_{e2} \\ D_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^E & S_{12}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ S_{12}^E & S_{11}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ S_{13}^E & S_{13}^E & S_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^E & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \alpha_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{11}^\sigma & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

若以方程式來表示，則以 d 型態為例，壓電陶瓷之壓電方程式可寫為：

$$\varepsilon_1 = S_{11}^E \sigma_1 + S_{12}^E \sigma_2 + S_{13}^E \sigma_3 + d_{31} V_3$$

$$\varepsilon_2 = S_{12}^E \sigma_1 + S_{11}^E \sigma_2 + S_{13}^E \sigma_3 + d_{31} V_3$$

$$\varepsilon_3 = S_{13}^E (\sigma_1 + \sigma_2) + S_{33}^E \sigma_3 + d_{33} V_3$$

$$\varepsilon_4 = S_{44}^E \sigma_4 + d_{15} V_2$$

$$\varepsilon_5 = S_{44}^E \sigma_5 + d_{15} V_1$$

$$\varepsilon_6 = S_{66}^E \sigma_6$$

$$D_{e1} = d_{15} \sigma_5 + \alpha_{11}^\sigma V_1$$

$$D_{e2} = d_{15} \sigma_4 + \alpha_{11}^\sigma V_2$$

$$D_{e3} = d_{31} (\sigma_1 + \sigma_2) + d_{33} \sigma_3 + \alpha_{33}^\sigma V_3 \quad (2.21)$$



### 第三章 含壓電層樑結構應力分析

壓電材料承受電壓產生變形的特性可作為控制結構變形之制動器，而壓電致動器對結構內部所產生的應力為本文研究重點。本章將壓電材料貼覆或內埋於樑結構，應用尤拉樑理論（Euler-beam theory）推導電壓作用於壓電層所產生的應力，並與有限元素分析所得比較以驗證理論推導之準確性。

#### 3.1 貼覆壓電層樑結構軸向應力分析

壓電層貼覆於樑表面並假設接合界面黏著良好（perfect bonding），滿足界面位移連續與軸向應變相等之連續條件。施加電壓於壓電層使整體結構產生彎曲變形，壓電層與樑具有相同曲率半徑，內部則承受軸向力  $P$  與彎矩  $M$  作用如圖 3.1 所示，其中  $E$ 、 $h$  分別代表樑之楊氏係數與厚度，下標 1 與 2 分別代表上層樑與下層樑。將雙層樑結構自中間區域切開畫自由體圖如圖 3.1 所示，上層為樑之主結構、下層為貼覆之壓電層，承受之軸向力分別為  $P_1$  和  $P_2$ ，彎矩分別為  $M_1$  和  $M_2$ ，由力與彎矩平衡關係式可得：

$$P_1 = P_2 = P \quad (3.1)$$

$$M_1 + M_2 = \frac{Ph_1}{2} + \frac{Ph_2}{2} \quad (3.2)$$

彎矩與曲率之關係式：

$$M_1 = \frac{E_1 I_1}{\rho} \quad ; \quad M_2 = \frac{E_2 I_2}{\rho} \quad (3.3)$$

將 (3.3) 式代入 (3.2) 式，可得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{P(h_1+h_2)}{2(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \quad (3.4)$$

再由上、下樑介面應變連續關係可得

$$\frac{P}{E_1 b h_1} + \frac{h_1}{2\rho} = \frac{d_{31} V}{h_2} - \frac{P}{E_2 b h_2} - \frac{h_2}{2\rho} \quad (3.5)$$

$\frac{P}{E_1 b h_1}$	;	$\frac{P}{E_2 b h_2}$	為軸向力所造成之應變
$\frac{h_1}{2\rho}$	;	$\frac{h_2}{2\rho}$	為彎矩所造成之應變
$\frac{d_{31} V}{h_2}$			為壓電應變
$V$			為施加電壓
$d_{31}$			為壓電常數

將上下樑慣性矩  $I_1 = \frac{b h_1^3}{12}$  ;  $I_2 = \frac{b h_2^3}{12}$  代入 (3.4) 式，再與 (3.5) 式解聯

立可解出

$$P = \frac{d_{31} V}{h_2 K} \quad (3.6)$$

其中

$$K = \frac{(h_1^2 + h_2^2)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2)} + \frac{1}{E_1 b h_1} + \frac{1}{E_2 b h_2}$$

再將 (3.6) 式代入 (3.3) 式中求得彎矩  $M_1$  與  $M_2$

$$M_1 = \frac{d_{31} V h_1}{2 h_2 K} \quad ; \quad M_2 = \frac{d_{31} V}{2 K} \quad (3.7)$$

上下兩層軸向應力  $\sigma_1(y)$ 、 $\sigma_2(y)$

$$\begin{aligned}\sigma_1(y) &= \frac{P_1}{bh_1} - \frac{E_1 y}{\rho} \\ &= \frac{d_{31} V}{bh_1 h_2 K} - \frac{E_1 d_{31} V (h_1 + h_2) y}{2h_2 K (E_1 I_1 + E_2 I_2)}\end{aligned}\quad (3.8)$$

其中  $b$ 、 $h_1$  分別表上層樑寬與厚， $y$  表以上層樑中性軸為基準之厚度方向位置

$$\begin{aligned}\sigma_2(y) &= -\frac{P_2}{bh_2} - \frac{E_2 y}{\rho} \\ &= -\frac{d_{31} V}{bh_2^2 K} - \frac{E_2 d_{31} V (h_1 + h_2) y}{2h_2 K (E_1 I_1 + E_2 I_2)}\end{aligned}\quad (3.9)$$

其中  $b$ 、 $h_2$  分別表下層樑寬與厚， $y$  表以下層樑中性軸為基準之厚度方向位置

(3.8) 式與 (3.9) 式分別為雙層樑結構中間區域上下層沿厚度方向之軸向應力分佈。



### 3.2 內埋壓電層樑結構軸向應力分析

壓電材料內埋於樑如圖 3.2 所示之三層樑結構，中間層為壓電材料，上下層為一般材料形成複合樑結構，各層界面黏著度良好滿足位移連續與應變相等之連續條件，施加電壓於壓電層使三層樑結構產生彎曲變形曲率半徑  $\rho$  (radius of curvature)。將三層樑結構分解成上與中以及中與下兩個雙層樑結構如圖 3.3 所示，再依據 3.1 節推導雙層樑結構之方法，分別假設

此二雙層樑所受之負載，再將其加以疊加成一完整三層樑結構：此時必須滿足介面之應變、位移連續，中央層之整體負載必須做適當的疊加。將三層樑自中間區域切開畫自由體圖如圖 3.3 所示，結構上、中、下層截面間承受之軸向力分別為  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_3$ ，所受彎矩分別為  $M_1$ 、 $M_2$  和  $M_3$ ，其中

$$P_2 = -P_1 - P_3 \quad (3.10)$$

$$M_2 = M_2' - M_2'' \quad (3.11)$$

由彎矩平衡可得

$$\frac{P_1 h_1}{2} + \frac{P_1 h_2}{2} = M_1 + M_2' \quad (3.12)$$

$$\frac{P_3 h_2}{2} + \frac{P_3 h_3}{2} = M_2'' + M_3 \quad (3.13)$$

彎矩與曲率之關係式：

$$\frac{E_1 I_1}{\rho} = M_1 \quad (3.14)$$

$$\frac{E_2 I_2}{\rho} = M_2 = M_2' - M_2'' \quad (3.15)$$

$$\frac{E_3 I_3}{\rho} = -M_3 \quad (3.16)$$

將 (3.14) 式、(3.15) 式和 (3.16) 式相加並代入 (3.12) 式與 (3.13) 式

中可得

$$\frac{(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)}{\rho} = \frac{P_1 (h_1 + h_2)}{2} - \frac{P_3 (h_2 + h_3)}{2} \quad (3.17)$$

由層與層之間介面之應變連續關係式，得

$$\frac{P_1}{E_1 b h_1} + \frac{h_1}{2\rho} = \frac{d_{31} V}{h_2} - \frac{(P_1 + P_3)}{E_2 b h_2} - \frac{h_2}{2\rho} \quad (3.18)$$

$$\frac{d_{31} V}{h_2} - \frac{(P_1 + P_3)}{E_2 b h_2} + \frac{h_2}{2\rho} = \frac{P_3}{E_3 b h_3} - \frac{h_3}{2\rho} \quad (3.19)$$

再由 (3.17) 式、(3.18) 式、(3.19) 式解聯立求解得軸向力  $P_1$ 、 $P_3$  以及曲率半徑  $\rho$  如下

$$P_1 = \frac{d_{31}V}{K_1 h_2} - \frac{K_1 d_{31}V}{K_2 K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \quad (3.20)$$

$$P_3 = \frac{d_{31}V}{K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} = & \frac{(h_1+h_2)d_{31}V}{2K_1 h_2 (E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} - \frac{(h_2+h_3)d_{31}V}{2K_5 h_2 (E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \\ & - \frac{(h_1+h_2)K_1 d_{31}V}{2K_2 K_5 h_2 (E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

其中

$$K_1 = \frac{1}{E_1 b h_1} + \frac{1}{E_2 b h_2} + \frac{(h_1+h_2)^2}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)}$$

$$K_2 = \frac{1}{E_2 b h_2} - \frac{(h_1+h_2)(h_2+h_3)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)}$$

$$K_3 = \frac{1}{E_2 b h_2} + \frac{1}{E_3 b h_3} + \frac{(h_2+h_3)^2}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)}$$

$$K_4 = \frac{(h_1+h_2)(h_2+h_3)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} - \frac{1}{E_2 b h_2}$$

$$K_5 = K_3 + \frac{K_2 K_4}{K_1}$$

將 (3.20) 式、(3.21) 式代入 (3.10) 式可得

$$P_2 = \frac{K_1 d_{31}V}{K_2 K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \left(1 + \frac{K_2}{K_1}\right) - \frac{d_{31}V}{K_1 h_2} \quad (3.23)$$

將 (3.23) 式代入 (3.14) 式、(3.15) 式和 (3.16) 式可得作用於上、中、

下樑中間之截面彎矩如下

$$M_1 = \frac{h_1 d_{31}V}{K_1 h_2} - \frac{K_1 h_1 d_{31}V}{K_2 K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \quad (3.24)$$

$$M_2 = \frac{d_{31}V}{K_1} - \frac{K_1 d_{31}V}{K_2 K_5} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) - \frac{d_{31}V}{K_5} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \quad (3.25)$$

$$M_3 = -\frac{h_3 d_{31}V}{K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \quad (3.26)$$

上、中、下三層軸向應力  $\sigma_1(y)$ 、 $\sigma_2(y)$ 、 $\sigma_3(y)$

$$\begin{aligned}\sigma_1(y) &= \frac{P_1}{bh_1} - \frac{E_1 y}{\rho} \\ &= \frac{d_{31} V}{K_1 b h_1 h_2} - \frac{K_1}{K_2} \frac{d_{31} V}{K_5 b h_1 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) - \frac{E_1 y (h_1 + h_2) d_{31} V}{2 K_1 h_2} \\ &\quad + \frac{E_1 y (h_1 + h_2) K_1}{2 K_2} \frac{d_{31} V}{K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) + \frac{E_1 y (h_2 + h_3) d_{31} V}{2 K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right)\end{aligned}\quad (3.27)$$

其中  $b$ 、 $h_1$  分別表上層樑寬與厚， $y$  表以上層樑中性軸為基準之厚度方向位置

$$\begin{aligned}\sigma_2(y) &= -\frac{(P_1 + P_3)}{bh_2} - \frac{E_2 y}{\rho} \\ &= \frac{K_1}{K_2} \frac{d_{31} V}{K_5 b h_2^2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \left(1 + \frac{K_2}{K_1}\right) - \frac{d_{31} V}{K_1 b h_2^2} - \frac{E_2 y (h_1 + h_2) d_{31} V}{2 K_1 h_2} \\ &\quad + \frac{E_2 y (h_1 + h_2) K_1}{2 K_2} \frac{d_{31} V}{K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) + \frac{E_2 y (h_2 + h_3) d_{31} V}{2 K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right)\end{aligned}\quad (3.28)$$

其中  $b$ 、 $h_2$  分別表中央層樑寬與厚， $y$  表以中央層樑中性軸為基準之厚度方向位置

$$\begin{aligned}\sigma_3(y) &= \frac{P_3}{bh_3} - \frac{E_3 y}{\rho} \\ &= \frac{d_{31} V}{K_5 b h_2 h_3} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) - \frac{E_3 y (h_1 + h_2) d_{31} V}{2 K_1 h_2} + \frac{E_3 y (h_1 + h_2) K_1}{2 K_2} \frac{d_{31} V}{K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right) \\ &\quad + \frac{E_3 y (h_2 + h_3) d_{31} V}{2 K_5 h_2} \left(1 + \frac{K_4}{K_1}\right)\end{aligned}\quad (3.29)$$

其中  $b$ 、 $h_3$  分別表下層樑寬與厚， $y$  表以下層樑中性軸為基準之厚度方向位置

(3.27) 式、(3.28) 式與 (3.29) 式分別為三層樑結構中間區域上、中、下層沿厚度方向之軸向應力分佈。

### 3.3 有限元素驗證

壓電材料施予電壓產生應變(負壓電效應),或由機械應變產生電壓(正壓電效應),此壓電效應及應力應變和電場關係已詳述於第二章。壓電材料因電壓導致的應變,與傳統材料因溫度造成的熱應變相似,若材料受到拘束無法自由膨脹或收縮即產生熱應力,壓電材料黏貼結構施加電壓受到結構的拘束限制無法自由膨脹變形亦會產生應力。對含壓電材料之複合樑結構,本節應用 ANSYS 有限元素分析軟體,計算施加電壓於壓電層對此複合樑結構產生之應力,並與 3.1 節與 3.2 節推導之解析公式比較。選用 Plane13[3]為壓電材料元素,可輸入材料壓電與機械性質及電壓負載,主結構材料則選用 Plane42 元素。本節結合 Plane13 與 Plane42 兩種元素在平面應力(Plane-Stress)假設下,對含壓電材料之複合樑結構進行分析,並與上述 3.1 與 3.2 小節所得結果進行驗證。

#### 3.3.1 雙層樑結構

以鋼為材質之樑於其下表面貼覆壓電材料組成雙層樑結構如圖 3.1 所示,鋼層與壓電材料層(PZT-5H)厚度均為 1mm,材料性質如表 3.1 與表 3.2 所示。建構有限元素分析模型,為使元素在接觸面上之節點為同一位

置，使用 ANSYS 提供之指令 glue 將基材與壓電材料在同一位置的節點偶合成一新的節點，以確保位移連續。網格之切割在長厚度方向比為 2.5 比 1 如圖 3.4 所示，並於壓電層施加電壓負載為 200V，計算雙層樑結構在壓電負載作用下之應力分佈。圖 3.5 為有限元素分析所得基材（鋼層）中線沿長度方向之軸向應力分佈，顯示複合樑沿長度方向之應力大致為均勻分佈，僅在左右兩端（約一個厚度範圍）受自由邊效應產生變化。本文主要探討複合樑結構中間區域沿厚度方向之應力變化，而 3.1 節與 3.2 節之理論推導亦是針對複合樑之中間區域。現比較有限元素分析與 3.1 節之 (3.8) 式、(3.9) 式所得雙層樑結構中間區域沿厚度方向之軸向應力分佈如圖 3.6 所示。其中  $y$  軸為厚度方向位置， $y=0$  表雙層樑界面， $y>0$  為鋼層， $y<0$  為壓電層， $x$  軸為軸向應力，結果顯示 ANSYS 與 (3.8) 式及 (3.9) 式計算所得應力相當吻合，鋼層與壓電層沿厚度方向之應力分佈均為線性，鋼層應力由界面之最大張應力線性變化至上表面轉換為壓應力，壓電層應力則由界面之最大壓應力線性變化至下表面轉換為微小張應力。上述雙層樑結構之線性應力分佈可由 (3.8) 及 (3.9) 式解析公式加以解釋，(3.8) 式及 (3.9) 式內均包含兩項，其一為軸向力產生之應力均屬均勻分佈，另一則為彎矩應力屬線性分佈，且可由張應力變化至壓應力，此現象與圖 3.6 之應力分佈相當吻合。表 3.3 和表 3.4 分別為鋼層與壓電層沿厚度方向以 ANSYS 和 (3.8) 式、(3.9) 式計算所得應力之比較與誤差，結果顯示鋼層

應力誤差較小均在 5% 以內，壓電層應力誤差較大在 9% 以內，表中出現如鋼層厚度 0.6 mm 位置誤差達 49.1%，壓電層位置-0.8mm 誤差達 110.8%，主要原因為應力趨近零使數值計算相對誤差放大。另再改變鋼層厚度為 2mm 壓電層厚度仍維持 1mm，計算不同厚度雙層樑結構在中間區域沿厚度方向之軸向應力，圖 3.7 為 ANSYS 有限元素分析與 (3.8) 式、(3.9) 式計算所得之比較，表 3.5 和表 3.6 則為對應之應力值，結果顯示兩者相當吻合，鋼層應力誤差較小均在 5% 以內，壓電層應力誤差較大在 6% 以內，誤差較等厚度雙層樑結構更小，線性應力分佈趨勢則相同。

### 3.3.2 三層樑結構



壓電材料內埋於樑如圖 3.2 所示之三層樑結構，中間層為壓電材料 (PZT-5H)，上、下為鋼材，結構長寬分別為 20mm 和 1mm，各層厚度均為 1mm。施加電壓負載 200V 於壓電層，分別應用 ANSYS 有限元素軟體與 3.2 節推導之解析公式 (3.27) 式、(3.28) 式和 (3.29) 式，計算三層樑結構中間區域沿厚度方向之軸向應力分佈，圖 3.8 為計算所得之比較結果顯示兩者相當吻合，誤差小於 0.1%，各層樑僅承受軸向力且彎矩為零，故僅得均勻之應力分佈。現再改變各層樑厚度，上層鋼厚 0.5mm，中間壓電層厚 1mm，下層鋼厚 1.5mm，施加電壓 200V 於壓電層，由於下層樑厚度

大於上層樑，各層樑沿厚度方向為線性分佈，圖 3.9 所示為 ANSYS 有限元素分析與 (3.27)、(3.28) 和 (3.29) 式計算所得應力之比較，兩者亦相當吻合。

### 3.4 影響參數分析

本節將討論改變不同參數對複合樑結構內應力分佈之影響，包含材料參數與幾何參數，材料參數主要探討基材與壓電層楊氏係數比，幾何參數則著重於厚度比與內埋深度之比較。

#### 3.4.1 雙層樑結構厚度參數

壓電材料(PZT-5H)貼覆於鋼樑下表面組成雙層樑結構，施加電壓 200V 於壓電層，使雙層樑結構產生變形，本節應用 (3.8) 和 (3.9) 式計算沿厚度方向軸向應力分佈，並探討鋼層厚度  $h_1$  與壓電層厚度  $h_2$  比值對結構內應力之影響。將壓電層厚度固定為 1mm，選用六種不同之鋼層與壓電層厚度比 ( $h_1/h_2$ ) 分別為 0.1、0.2、1、2、5、10，基材厚度分別為 0.1mm、0.2mm、1mm、2mm、5mm 以及 10mm，圖 3.10 為計算所得上述六種不同厚度比沿厚度方向之軸向應力分佈，其中 x 軸表軸向應力，y 軸為沿厚度方向經規

化後之位置（位置除以該層樑厚度）， $y=0$  表雙層樑界面位置， $y=1$  和  $y=-1$  分別表鋼層上表面和下表面位置。結果顯示鋼層應力在  $\frac{h_1}{h_2}=1$  線性分佈最明顯，即彎矩效應最大，所得應力亦最大，隨著  $\frac{h_1}{h_2}$  從等於 1 逐漸增大或減小，鋼層應力均逐漸減少且趨近於均勻分佈，當  $\frac{h_1}{h_2}=1$  和 0.2，鋼層內部承受之應力均為張應力。壓電層應力亦在  $\frac{h_1}{h_2}=1$  線性分佈最明顯，並隨著  $\frac{h_1}{h_2}$  由 1 逐漸增大或減小趨近於均勻分佈，即彎曲變形逐漸減小，而壓電層承受之壓應力則隨著  $\frac{h_1}{h_2}$  增加而增加。

### 3.4.2 雙層樑結構楊氏係數之影響

本節討論雙層樑結構材料楊氏係數對結構內應力之影響，壓電材料貼覆於基材下表面固定為 PZT-5H，其材料性質如表 3.2 所示，楊氏係數  $E_2=60.6\text{GPa}$ ，選用六種不同基材楊氏係數  $E_1$  使  $\frac{E_1}{E_2}$  分別為 0.1、0.5、1、2、5、10，基材與壓電材料厚度均固定為 1mm。施加電壓 200V 於壓電材料使雙層樑結構產生變形，應用 (3.8) 式和 (3.9) 式計算雙層樑結構沿厚度方向之軸向應力，圖 3.11 為計算所得上述六種不同基材與壓電材料楊氏係數比 ( $\frac{E_1}{E_2}$ ) 沿厚度方向之軸向應力分佈。結果顯示基材應力隨著  $\frac{E_1}{E_2}$  增大線性分佈越明顯，即彎曲變形越大，應力亦越大；反之  $\frac{E_1}{E_2}$  越小，彎矩效應減弱，基材應力減小並趨近均勻分佈，壓電材料承受之壓應力亦隨著  $\frac{E_1}{E_2}$  減

小而減小。基材與壓電材料最大應力均出現在界面位置，圖 3.12 為 ANSYS 與 (3.8)、(3.9) 式計算所得基材與壓電材料在不同楊氏係數比  $E_1/E_2$  之最大應力，結果顯示 ANSYS 有限元素分析與 (3.8)、(3.9) 式理論值相當吻合，最大應力均隨  $E_1/E_2$  增加而增加，材料楊氏係數對基材應力之影響較為顯著。

### 3.4.3 三層樑結構壓電材料內埋深度之影響

壓電材料內埋於基材形成之三層樑結構如圖 3.2，本節探討內埋深度對結構內應力之影響，三層樑總厚度為 3mm，其中壓電材料厚度固定為 1mm，內埋深度以壓電材料上表面與三層樑結構上表面之距離  $d$  為計算標準如圖 3.13 所示，選用四種不同內埋深度分別為 0.2mm、0.5mm、0.7mm 以及 1mm。基材與壓電材料分別為鋼與 PZT-5H，材料性質如表 3.1、表 3.2，施加電壓 200V 於壓電材料使三層樑結構產生變形，應用 (3.27) 式、(3.28) 式和 (3.29) 式分別計算三層樑沿厚度方向之軸向應力，圖 3.14 為計算所得上述四種不同內埋深度之軸向應力分佈。結果顯示內埋深度越淺，三層樑結構向下彎曲變形越大，應力線性分佈越明顯亦越大，內埋深度為 1mm 時，三層樑結構具上下對稱性，僅承受軸向負載作用而無彎曲變形，故應力為均勻分佈。上層基材承受張應力最大應力出現在上表面，中間壓電材料承受壓應力最大應力出現在下表面，下層基材承受之應力由上表面之張

應力沿厚度方向逐漸減少趨近於零，在內埋深度 0.2mm 下層基材之下表面甚至出現壓應力。圖 3.15 為三層樑結構壓電材料不同內埋深度以 ANSYS 與 (3.27)、(3.28) 式計算所得上層基材與中間壓電層最大應力之比較，結果顯示兩者相當吻合，最大應力均隨內埋深度增加而逐漸減小，而內埋深度對基材應力之影響較壓電材料顯著。

#### 3.4.4 三層樑結構楊氏係數之影響

本節探討三層樑結構改變基材與壓電材料楊氏係數比對結構內應力之影響，將固定之壓電材料 PZT-5H 內埋於基材中央，使得整體結構成上下對稱如圖 3.16，三層樑總厚度為 3mm，基材與壓電材料厚度均固定為 1mm，楊氏係數  $E_2 = 60.6\text{GPa}$ ，選用六種不同基材楊氏係數  $E_1$  使  $\frac{E_1}{E_2}$  分別為 0.1、0.5、1、2、5、10。施加電壓 200V 於壓電材料使三層樑結構產生變形，應用 (3.27) 式、(3.28) 式和 (3.29) 式分別計算三層樑沿厚度方向之軸向應力結果如圖 3.17 所示；由於整體結構成上下對稱，結構並不受到彎矩作用影響，應力遂不隨著厚度位置作改變，上、下其材層均受到同一均勻張應力作用，中央壓電層則受到一均勻壓應力作用，結果顯示最大應力均隨  $\frac{E_1}{E_2}$  增加而增加，材料楊氏係數對基材應力之影響相當顯著。

## 第四章 含壓電層之板結構應力分析

本章探討以壓電材料貼覆或內埋於板結構中央，假設壓電材料完美貼覆（perfect bonding）於基材上，利用第三章結果推導施加電壓驅動壓電材料產生壓電應變而造成結構間之應力變化，並與有限元素分析所得比較以驗證理論推導之準確性。

### 4.1 雙層板結構應力分析

壓電材料貼覆於平板下方如圖 4.1 所示，假設壓電材料與基材於平面上為等向性，且界面黏著良好滿足界面位移連續與應變相等之連續條件，其中  $E$ 、 $h$  分別代表板之楊氏係數與厚度，下標 1 與 2 分別代表上層與下層板，施加電壓於壓電層使得整體結構產生彎曲變形曲率半徑  $\rho$ （radius of curvature）。將雙層板自中間區域分割自由體圖如圖 4.2 所示，上、下層間截面承受之軸向力分別為  $P_1$  與  $P_2$ ，彎矩分別為  $M_1$  與  $M_2$ ，由力與彎矩平衡關係式可得：

$$P_1 = P_2 = P \quad (4.1)$$

$$M_1 + M_2 = \frac{Ph_1}{2} + \frac{Ph_2}{2} \quad (4.2)$$

彎矩與曲率之關係式：

$$M_1 = \frac{E_1 I_1}{\rho} \quad ; \quad M_2 = \frac{E_2 I_2}{\rho} \quad (4.3)$$

將 (4.2) 式代入 (4.3) 式，整理後可得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{P(h_1+h_2)}{2(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \quad (4.4)$$

再由上、下層間介面應變連續關係可得

$$\frac{P}{E_1 b h_1} + \frac{h_1}{2\rho} - \nu_1 \left( \frac{P}{E_1 b h_1} + \frac{h_1}{2\rho} \right) = \frac{d_{31} V}{h_2} - \frac{P}{E_2 b h_2} - \frac{h_2}{2\rho} - \nu_2 \left( -\frac{P}{E_2 b h_2} - \frac{h_2}{2\rho} \right) \quad (4.5)$$

將 (4.4) 式代入 (4.5) 式可得

$$P = \frac{d_{31} V}{K h_2} \quad (4.6)$$

其中

$$K = (1-\nu_1) \left[ \frac{1}{E_1 b h_1} + \frac{h_1(h_1+h_2)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right] + (1-\nu_2) \left[ \frac{1}{E_2 b h_2} + \frac{h_2(h_1+h_2)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right]$$

$$\frac{P}{E_1 b h_1} \quad ; \quad \frac{P}{E_2 b h_2} \quad \text{為軸向力所造成之應變}$$

$$\frac{h_1}{2\rho} \quad ; \quad \frac{h_2}{2\rho} \quad \text{為彎矩所造成之應變}$$

$$\frac{d_{31} V}{h_2} \quad \text{為壓電應變}$$

$$V \quad \text{為施加電壓}$$

$$d_{31} \quad \text{為壓電常數}$$

再將 (4.6) 式代入 (4.3) 式中求得  $M_1$  與  $M_2$

$$M_1 = \frac{d_{31} V h_1}{2 h_2 K} \quad ; \quad M_2 = \frac{d_{31} V}{2 K} \quad (4.7)$$

壓電材料對整體結構造成之彎矩總和可由 (4.7) 式中求得之上下層彎矩相

加，整理後可得

$$M = M_1 + M_2 = \frac{d_{31} V h_1}{2 h_2 K} + \frac{d_{31} V}{2 K} \quad (4.8)$$

此時上下兩層軸向應力  $\sigma_1(z)$  與  $\sigma_2(z)$  [2]

$$\begin{aligned}\sigma_1(z) &= \frac{E_1 \varepsilon_1}{1 - \nu_1} \\ &= \frac{E_1 P}{E_1 b h_1} - \frac{E_1 z}{\rho}\end{aligned}\quad (4.9)$$

其中

$$\varepsilon_1 = (1 - \nu_1) \left( \frac{P}{E_1 b h_1} - \frac{z}{\rho} \right)$$

且  $b$ 、 $h_1$  分別表上層板寬與厚， $z$  表以上層板中性面為基準之厚度方向位置

$$\begin{aligned}\sigma_2(z) &= \frac{E_2}{1 - \nu_2} \left( \varepsilon_2 - \frac{d_{31} V}{h_2} \right) \\ &= -\frac{E_2 P}{E_2 b h_2} - \frac{E_2 z}{\rho}\end{aligned}\quad (4.10)$$

其中

$$\varepsilon_2 = \frac{d_{31} V}{h_2} - (1 - \nu_2) \left( \frac{P}{E_2 b h_2} + \frac{z}{\rho} \right)$$

且  $b$ 、 $h_2$  分別表下層板寬與厚， $z$  表以下層板中性面為基準之厚度方向位置

(4.9) 式與 (4.10) 式分別為雙層板結構中間區域上、下層沿厚度方向之軸向應力分佈。

## 4.2 三層板結構應力分析

壓電材料內埋於板中央如圖 4.3 所示，假設界面黏著良好滿足界面位

移連續與應變相等之連續條件，其中  $E$ 、 $h$  分別代表板之楊氏係數與厚度，下標 1、2 與 3 分別代表上層、中層與下層板，施加電壓於壓電層使得整體結構產生彎曲變形曲率半徑  $\rho$  (radius of curvature)。將三層板自中間區域切割成自由體圖如圖 4.4 所示，結構之上、中、下層截面間承受之軸向力分別為  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ ，所受彎矩分別為  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ ，其中

$$P_2 = -(P_1 + P_3) \quad (4.11)$$

$$M_2 = M_2' - M_2'' \quad (4.12)$$

由彎矩平衡可得

$$\frac{P_1 h_1}{2} + \frac{P_1 h_2}{2} = M_1 + M_2' \quad (4.13)$$

$$\frac{P_3 h_2}{2} + \frac{P_3 h_3}{2} = M_2'' + M_3 \quad (4.14)$$

彎矩與曲率之關係式：

$$\frac{E_1 I_1}{\rho} = M_1 \quad (4.15)$$

$$\frac{E_2 I_2}{\rho} = M_2 \quad (4.16)$$

$$\frac{E_3 I_3}{\rho} = -M_3 \quad (4.17)$$

將 (4.14) 式、(4.15) 式與 (4.16) 式相加並代入 (4.12) 式與 (4.13) 式

中可得

$$\frac{(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)}{\rho} = \frac{P_1 (h_1 + h_2)}{2} - \frac{P_3 (h_2 + h_3)}{2} \quad (4.18)$$

再由上、下層間介面應變連續關係可得

$$\frac{P_1}{E_1 b h_1} + \frac{h_1}{2\rho} - v_1 \left( \frac{P_1}{E_1 b h_1} + \frac{h_1}{2\rho} \right) = \frac{d_{31} V}{h_2} - \frac{(P_1 + P_3)}{E_2 b h_2} - \frac{h_2}{2\rho} - v_2 \left[ -\frac{(P_1 + P_3)}{E_2 b h_2} - \frac{h_2}{2\rho} \right] \quad (4.19)$$

$$\frac{d_{31}V}{h_2} - \frac{(P_1+P_3)}{E_2bh_2} + \frac{h_2}{2\rho} - \nu_2 \left[ -\frac{(P_1+P_3)}{E_2bh_2} + \frac{h_2}{2\rho} \right] = \frac{P_3}{E_3bh_3} - \frac{h_3}{2\rho} - \nu_3 \left( \frac{P_3}{E_3bh_3} - \frac{h_3}{2\rho} \right) \quad (4.20)$$

將 (4.17) 式代入 (4.18) 式與 (4.19) 式解聯立可得  $P_1$ 、 $P_3$  以及曲率半徑

$\rho$  如下

$$P_1 = \frac{(K_4 - K_2) \frac{d_{31}V}{h_2}}{K_1K_4 - K_2K_3} \quad (4.21)$$

$$P_3 = \frac{(K_1 - K_3) \frac{d_{31}V}{h_2}}{K_1K_4 - K_2K_3} \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{[(h_1+h_2)(K_4 - K_2) - (h_2+h_3)(K_1 - K_3)]d_{31}V}{2h_2(K_1K_4 - K_2K_3)(E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3)} \quad (4.23)$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= (1-\nu_1) \left[ \frac{1}{E_1bh_1} + \frac{h_1(h_1+h_2)}{4(E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3)} \right] + (1-\nu_2) \left[ \frac{1}{E_2bh_2} + \frac{h_2(h_1+h_2)}{4(E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3)} \right] \\ K_2 &= (1-\nu_1) \left[ -\frac{h_1(h_2+h_3)}{4(E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3)} \right] + (1-\nu_2) \left[ \frac{1}{E_2bh_2} + \frac{h_2(h_2+h_3)}{4(E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3)} \right] \\ K_3 &= (1-\nu_2) \left[ \frac{1}{E_2bh_2} - \frac{h_2(h_1+h_2)}{4(E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3)} \right] - (1-\nu_3) \left[ \frac{h_3(h_1+h_2)}{4(E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3)} \right] \\ K_4 &= (1-\nu_2) \left[ \frac{1}{E_2bh_2} + \frac{h_2(h_2+h_3)}{4(E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3)} \right] + (1-\nu_3) \left[ \frac{1}{E_3bh_3} + \frac{h_3(h_2+h_3)}{4(E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3)} \right] \end{aligned}$$

將 (4.20) 式、(4.21) 式代入 (4.10) 式可得

$$P_2 = \frac{(K_4 - K_2) \frac{d_{31}V}{h_2} + (K_1 - K_3) \frac{d_{31}V}{h_2}}{K_2K_3 - K_1K_4} \quad (4.24)$$

壓電材料對整體結構造成之彎矩總和可由 (4.23) 式代入 (4.14) 式、(4.15)

式與 (4.16) 式相加，整理後可得

$$M = \frac{[(h_1+h_2)(K_4 - K_2) - (h_2+h_3)(K_1 - K_3)]d_{31}V}{2h_2(K_1K_4 - K_2K_3)} \quad (4.25)$$

此時上、中、下三層軸向應力  $\sigma_1(z)$ 、 $\sigma_2(z)$ 、 $\sigma_3(z)$  [2]

$$\begin{aligned}\sigma_1(z) &= \frac{E_1 \varepsilon_1}{1 - \nu_1} \\ &= \frac{E_1 P_1}{E_1 b h_1} - \frac{E_1 z}{\rho}\end{aligned}\quad (4.26)$$

其中

$$\varepsilon_1 = (1 - \nu_1) \left( \frac{P_1}{E_1 b h_1} - \frac{z}{\rho} \right)$$

且  $b$  與  $h_1$  分別表上層板寬與上層板厚， $z$  表以上層板中性面為基準之厚度

方向位置

$$\begin{aligned}\sigma_2(z) &= \frac{E_2}{1 - \nu_2} \left( \varepsilon_2 - \frac{d_{31} V}{h_2} \right) \\ &= - \frac{E_2 (P_1 + P_3)}{E_2 b h_2} - \frac{E_2 z}{\rho}\end{aligned}\quad (4.27)$$

其中

$$\varepsilon_2 = \frac{d_{31} V}{h_2} + (1 - \nu_2) \left[ - \frac{(P_1 + P_3)}{E_2 b h_2} - \frac{z}{\rho} \right]$$

且  $b$  與  $h_2$  分別表中央層板寬與中央層板厚， $z$  表以上層板中性面為基準之

厚度方向位置

$$\begin{aligned}\sigma_3(z) &= \frac{E_3 \varepsilon_3}{1 - \nu_3} \\ &= \frac{E_3 P_3}{E_3 b h_3} - \frac{E_3 z}{\rho}\end{aligned}\quad (4.28)$$

其中

$$\varepsilon_3(z) = (1 - \nu_3) \left( \frac{P_3}{E_3 b h_3} - \frac{z}{\rho} \right)$$

且  $b$  與  $h_2$  分別表下層板寬與中央層板厚， $z$  表以上層板中性面為基準之厚

度方向位置

(4.21) 式、(4.21) 式與 (4.23) 式分別為三層板結構中間區域上、

中、下層沿厚度方向之軸向應力分佈。

### 4.3 有限元素驗證

壓電材料因電壓導致的應變，與傳統材料因溫度造成的熱應變相似，若材料受到拘束無法自由膨脹或收縮即產生熱應力，壓電材料因黏貼在各式材料層板，受到層板的拘束限制無法自由膨脹變形亦會產生應力。本節應用 ANSYS 為有限元素分析軟體，計算施加電壓於壓電材料對此複合層板結構產生之應力，並與上述 4.1 節與 4.2 節推導之解析公式作比較。選用 Solid5 耦合元素為壓電元素，可輸入材料壓電與機械性質及電壓負載，主結構材料則選用 Solid45 元素。結合 Solid5 耦合元素與 Solid45 元素在平面應力 (Plane-Stress) 的假設下，對含壓電材料之複合層板結構進行有限元素分析，並與上述 4.1 節與 4.2 節所得結果進行驗證。

#### 4.3.1 雙層板結構

壓電材料 (PZT-5H) 貼覆於鋼板下表面形成雙層板結構如圖 4.1 所示，結構長寬分別為 100mm、120mm，基材厚度為 2mm，壓電材料層之厚度為 1mm。由於整體結構為上下與左右對稱，因此只需建構出四分之一尺寸

的模型（長度與寬度均縮減一半），再於結構右側與下方的表面選取對稱邊界，選用網格尺寸為 4 比 1（長度與寬度方向比厚度方向）如圖 4.5 所示，為使元素在接觸面上之節點為同一位置，使用 ANSYS 提供之指令（merge）將基材與壓電材料在同一位置的節點偶合成一新的節點，以確保位移連續，並於壓電層施加電壓負載為 1V，求得雙層板結構於壓電負載作用下之應力分佈。比較有限元素分析與 4.1 節之（4.9）式、（4.10）式所得雙層板結構中間區域沿厚度方向之軸向應力分佈如圖 4.6 所示。其中  $y$  軸為厚度方向位置， $y=0$  表雙層板之界面， $y>0$  為鋼層， $y<0$  為壓電層， $x$  軸為軸向應力，結果顯示 ANSYS 與（4.9）式及（4.10）式計算所得應力相當吻合，鋼層與壓電層沿厚度方向之應力分佈均為線性，鋼層應力由界面之最大張應力線性變化至上表面轉換為壓應力，壓電層應力則由界面之最大壓應力線性變化至下表面轉換為較小壓應力。上述雙層板結構之線性應力分佈可由（4.9）式及（4.10）式加以解釋，其中的應變均包含兩項，其一為軸向力產生之應力均屬均勻分佈，另一則為彎矩應力屬線性分佈，且可由張應力變化至壓應力，此現象與圖 4.6 之應力分佈相當吻合。表 4.1 與表 4.2 分別為鋼層與壓電層沿厚度方向以 ANSYS 和（4.9）式、（4.10）式計算所得應力之比較與誤差，結果顯示鋼層應力誤差較小均在 8% 以內，壓電層應力誤差較大在 9% 以內，兩者應力分佈均呈線性且相當吻合。

### 4.3.2 三層板結構

壓電材料內埋於層板中如圖 4.3 所示之三層複合板結構，中央層為壓電材料 (PZT-5H)，上、下層為鋼材，結構長寬分別為 100mm、120mm，上下基材厚度均為 5mm，壓電材料層之厚度為 1mm。施加電壓負載 1V 於壓電層，分別應用 ANSYS 有限元素分析軟體與 4.2 小節推導之解析公式 (4.26) 式、(4.27) 式、(4.28) 式，計算三層板結構中間區域沿厚度方向之軸向應力分佈，圖 4.7 為計算所得之比較結果顯示兩者相當吻合，基材層之誤差值為 6.8%，壓電層之誤差值為 6.9%，各層樑僅承受軸向力且彎矩為零，故僅得均勻之應力分佈；現不改變壓電層之厚度，而將上層基材厚度改為 1mm，下層基材厚度改為 5mm，此時結構中央部份的應力分佈與 (4.26) 式、(4.27) 式、(4.28) 式比較結果如圖 4.8 所示，基材上層之誤差值均在 6% 以內，基材下層之誤差值均在 9% 以內，壓電層之誤差值均在 8% 以內，其中出現鋼層厚度 -4 mm 至 -4.3mm 位置誤差均大於 9.3%，主要原因為應力趨近零使數值計算相對誤差放大。

### 4.4 影響參數分析

本節將討論改變不同參數對複合板整體結構內應力分佈之影響，材料

參數主要探討基材與壓電材料之楊氏係數比，幾何材料則著重於厚度比與內埋深度之比較。

#### 4.4.1 雙層板結構厚度參數

壓電材料 (PZT-5H) 貼覆於鋼板下表面組成雙層板結構，施加電壓 1V 於壓電層，使雙層板結構產生變形，本節應用 (4.9) 和 (4.10) 式計算沿厚度方向軸向應力分佈，並探討鋼層厚度  $h_1$  與壓電層厚度  $h_2$  比值對結構內應力之影響。將壓電材料層之厚度固定為 1mm，選用六種不同鋼層與壓電層之厚度比 ( $\frac{h_1}{h_2}$ ) 分別為 0.1、0.2、1、2、5、10，基材厚度分別為 0.1mm、0.2mm、1mm、2mm、5mm 以及 10mm，圖 4.9 為計算所得上述六種不同厚度比沿厚度方向之軸向應力分佈，其中  $x$  軸表軸向應力， $y$  軸為沿厚度方向經規化後之位置 (位置除以該層樑厚度)， $y=0$  表雙層樑界面位置， $y=1$  和  $y=-1$  分別表鋼層上表面和下表面位置。結果顯示鋼層應力在  $\frac{h_1}{h_2}=1$  線性分佈最明顯，即彎矩效應最大，所得應力亦最大，隨著  $\frac{h_1}{h_2}$  從等於 1 逐漸增大或減小，鋼層應力均逐漸減少且趨近於均勻分佈，當  $\frac{h_1}{h_2}=1$  和 0.2，鋼層內部承受之應力均為張應力。壓電層應力亦在  $\frac{h_1}{h_2}=1$  線性分佈最明顯，並隨著  $\frac{h_1}{h_2}$  由 1 逐漸增大或減小趨近於均勻分佈，即彎曲變形逐漸減小，而壓電層承受之壓應力則隨著  $\frac{h_1}{h_2}$  增加而增加，當  $\frac{h_1}{h_2}$  大於 1 時，

壓電層內部承受之應力均為壓應力；雙層板結構亦得到與雙層樑結構相同之趨勢。

#### 4.4.2 雙層板結構楊氏係數之影響

本節旨在討論改變雙層板結構材料楊氏係數對結構內應力之影響，貼覆 PZT-5H 壓電材料於雙層板結構下表面如圖 4.1 所示，其材料性質如表 3.2 所示，楊氏係數  $E_2 = 60.6\text{GPa}$ ，基材厚度與壓電材料層之厚度均為 1mm，選用六種不同基材楊氏係數  $E_1$  使  $\frac{E_1}{E_2}$  分別為 0.2、0.5、1、2、5、10，應用 (4.9) 式和 (4.10) 式計算雙層樑結構沿厚度方向之軸向應力，圖 4.10 為計算所得上述六種不同基材與壓電材料楊氏係數比 ( $\frac{E_1}{E_2}$ ) 沿厚度方向之軸向應力分佈。當基材材料與壓電材料之楊氏係數的比值越大時，其最大張應力與最大壓應力亦越大，板結構亦得到與樑結構相同之趨勢。結果顯示基材應力隨著  $\frac{E_1}{E_2}$  增大線性分佈越明顯，即彎曲變形越大，應力亦越大；反之  $\frac{E_1}{E_2}$  越小，彎矩效應減弱，基材應力減小並趨近均勻分佈；壓電材料承受之壓應力亦隨著  $\frac{E_1}{E_2}$  減小而減小。基材與壓電材料最大應力均出現在界面位置，圖 4.11 為 ANSYS 與 (4.9)、(4.10) 式計算所得基材與壓電材料在不同楊氏係數比  $\frac{E_1}{E_2}$  之最大應力，結果顯示 ANSYS 有限元素分析與 (4.9)、(4.10) 式理論值相當吻合，最大應力均隨  $\frac{E_1}{E_2}$  增加

而增加，材料楊氏係數對基材應力之影響較為顯著。

#### 4.4.3 三層板結構壓電材料內埋深度之影響

內埋一層壓電材料於三層板結構中如圖 4.3 所示，整體結構厚度為 3mm，壓電材料層之厚度固定為 1mm，選用鋼(表 3.1)為結構基材，PZT-5H (表 3.2)為壓電材料，內埋深度以壓電材料上表面與三層板結構上表面之距離  $d$  為計算標準如圖 3.13 所示，選用四種不同內埋深度分別為 0.2mm、0.5mm、0.7mm 以及 1mm，施加電壓 1V 於壓電材料使三層板結構產生變形，應用 (4.26) 式、(4.27) 式、(4.28) 式分別計算三層板沿厚度方向之軸向應力，圖 4.12 為計算所得上述四種不同內埋深度之軸向應力分佈。結果顯示內埋深度越淺，三層板結構向下彎曲變形越大，應力線性分佈越明顯亦越大，內埋深度為 1mm 時，三層板結構具上下對稱性，僅承受軸向負載作用而無彎曲變形，故應力為均勻分佈。上層基材承受張應力最大應力出現在上表面，中間壓電材料承受壓應力最大應力出現在下表面，下層基材承受之應力由上表面之張應力沿厚度方向逐漸減少趨近於零，在內埋深度 0.2mm 下層基材之下表面甚至出現壓應力。圖 4.13 為三層板結構壓電材料不同內埋深度以 ANSYS 與 (4.26) 式、(4.27) 式、(4.28) 式計算所得上層基材與中間壓電層最大應力之比較，結果顯示兩者相當吻合，最大應

力均隨內埋深度增加而逐漸減小，而內埋深度對基材應力之影響較壓電材料顯著。

#### 4.4.4 三層板結構楊氏係數之影響

本節探討三層板結構改變基材與壓電材料楊氏係數比對結構內應力之影響，將固定之壓電材料 PZT-5H 內埋於基材中央，使得整體結構成上下對稱如圖 3.16，三層板總厚度為 3mm，基材與壓電材料厚度均固定為 1mm，楊氏係數  $E_2 = 60.6\text{GPa}$ ，選用六種不同基材楊氏係數  $E_1$  使  $\frac{E_1}{E_2}$  分別為 0.1、0.5、1、2、5、10。施加電壓 1V 於壓電材料使三層板結構產生變形，應用 (4.26) 式、(4.27) 式、與 (4.28) 式分別計算三層板沿厚度方向之軸向應力；由於整體結構成上下對稱，結構並不受到彎矩作用影響，應力遂不隨著厚度位置作改變，上與下層均受到同一均勻張應力作用，中央壓電層則受到一均勻壓應力作用，將計算所得與 ANSYS 於不同楊氏係數比  $\frac{E_1}{E_2}$  結果如圖 4.14 所示，結果顯示 ANSYS 有限元素分析與 (4.26) 式、(4.27) 式與 (4.28) 式理論值相當吻合，最大應力均隨  $\frac{E_1}{E_2}$  增加而增加，材料楊氏係數對基材應力之影響相當顯著。

## 第五章 平板貼覆壓電材料之撓曲分析

本章將分析貼覆壓電材料為致動器對平板結構所產生之撓曲變形，第四章已推導出單一壓電片貼覆表面對結構所產生之力矩。本章以此力矩為負載作用於平板，應用板殼力學理論推導平板之撓曲位移。本文選用四邊簡支撐為邊界條件，以第四章推導所得單位長度彎曲力矩 (4.8) 式為負載作用於平板，負載範圍則為壓電片覆蓋之區域如圖 5.1 所示，壓電片在定電壓作用下將對平板施加一固定彎曲力矩產生撓曲變形。

### 5.1 簡支撐平板撓曲位移

利用壓電致動器貼覆於結構上，施予電壓使得壓電致動器與結構間產生一力矩，其效應如同力矩作用於平板。平板承受內力矩 ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ) 及壓電致動器所造成之力矩如圖 5.1 所示，其中  $m_x$  與  $m_y$  分別表沿  $y$  方向與  $x$  方向每單位長度力矩作用於平板，依板殼理論可得平板控制方程式如下：

$$\frac{\partial^2(M_x - m_x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(M_y - m_y)}{\partial y^2} = 0 \quad (5.1)$$

將壓電致動器造成之力矩  $m_x$ ,  $m_y$  移至方程式右側視為外力，左側內力矩  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  可表為撓曲位移  $w$  的微分型態，則 (5.1) 式可改寫成：

$$\begin{aligned}
D\nabla^4 w &= P \\
&= \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中  $D$  為板的抗彎剛度 (flexural rigidity),  $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$

簡支撐平板的撓曲位移  $w(x,y)$  以傅立葉級數表示如下：

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{5.3}$$

其中  $W_{mn}$  為未知常數

(5.3) 式之位移表示式可滿足四邊簡支撐之邊界條件。為使其滿足板的彎曲基本微分方程式，其負載函數亦可用雙重傅立葉級數表示如下：

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{5.4}$$

其中的傅立葉級數  $P_{mn}$  如下：

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

將 (5.3)、(5.4) 式代入板的彎曲基本方程式 (5.2) 式可得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{5.5}$$

由於對任意點  $(x,y)$  上式都必須滿足，因此等號兩側對應項前面係數必相等，故

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{D \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} \tag{5.6}$$

將 (5.6) 式代入 (5.3) 式，則可得簡支撐板之撓曲位移

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{D[(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.7)$$

第四章以樑理論為基礎推導所得力矩如(4.8)式，將其中樑之厚度視為1，即可得到單位長度力矩  $m_x$  和  $m_y$  作用於平板，彎矩作用位置則與壓電片貼覆位置相同，可以步階函數  $h(\cdot)$  表示如下

$$m_x = m_y = (\frac{d_{31}Vh_1}{2h_2K} + \frac{d_{31}V}{2K})[h(x-x_1) - h(x-x_2)][h(y-y_1) - h(y-y_2)] \quad (5.8)$$

其中

$$K = (1-\nu_1) [\frac{1}{E_1h_1} + \frac{h_1(h_1+h_2)}{4(E_1I_1+E_2I_2)}] + (1-\nu_2) [\frac{1}{E_2h_2} + \frac{h_2(h_1+h_2)}{4(E_1I_1+E_2I_2)}]$$

忽略壓電片質量與剛度對結構之影響，僅將壓電片產生的力矩作用於平

板，可將(5.2)式改寫成

$$D\nabla^4 w = (\frac{d_{31}Vh_1}{2h_2K} + \frac{d_{31}V}{2K})[\delta'(x-x_1) - \delta'(x-x_2)][h(y-y_1) - h(y-y_2)] \\ + (\frac{d_{31}Vh_1}{2h_2K} + \frac{d_{31}V}{2K})[h(x-x_1) - h(x-x_2)][\delta'(y-y_1) - \delta'(y-y_2)] \quad (5.9)$$

負載函數則表示成

$$P(x, y) = (\frac{d_{31}Vh_1}{2h_2K} + \frac{d_{31}V}{2K})[\delta'(x-x_1) - \delta'(x-x_2)][h(y-y_1) - h(y-y_2)] \\ + (\frac{d_{31}Vh_1}{2h_2K} + \frac{d_{31}V}{2K})[h(x-x_1) - h(x-x_2)][\delta'(y-y_1) - \delta'(y-y_2)] \quad (5.10)$$

(5.7) 式貼覆壓電片之簡支撐平板撓曲位移可求得如下：

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{D[(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.11)$$

其中

$$\begin{aligned}
P_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_{x_2}^{x_1} \int_{y_2}^{y_1} \left( \frac{d_{31} V h_1}{2h_2 K} + \frac{d_{31} V}{2K} \right) \{ [\delta'(x-x_1) - \delta'(x-x_2)] [h(y-y_1) - h(y-y_2)] \\
&\quad + [h(x-x_1) - h(x-x_2)] [\delta'(y-y_1) - \delta'(y-y_2)] \} \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
&= \frac{4}{ab} \left( \frac{d_{31} V h_1}{2h_2 K} + \frac{d_{31} V}{2K} \right) \left[ - \frac{\gamma_m^2 + \gamma_n^2}{\gamma_m \gamma_n} (\cos \gamma_m x_1 - \cos \gamma_m x_2) (\cos \gamma_n y_1 - \cos \gamma_n y_2) \right] \\
\gamma_m &= \frac{m\pi}{a} ; \gamma_n = \frac{n\pi}{b}
\end{aligned}$$

## 5.2 平板貼覆單片壓電材料

壓電片貼覆於簡支撐平板下表面中央、右側與上方三個不同位置如圖 5.2、圖 5.3 與圖 5.4 所示，選用壓電片材料為表 3.2 中之 PZT-5H，平板材料則為表 3.1 中之鋼，壓電片的尺寸為 60mm×40mm×0.5mm，鋼板尺寸為 300mm×300mm×5mm。施加一直流定電壓 -100V 於壓電片上，應用 4.1 小節中推導 (4.8) 式求得壓電片制動於鋼板上之單位長度力矩  $m_x$  和  $m_y$ ，再將結果與貼覆平板位置代入 (5.8) 式中求得壓電片對結構產生之負載，最後再以 (5.11) 式計算出結構撓曲位移。利用有限元素軟體 ANSYS 三維分析求得平板撓曲位移及變形與推導之解析公式作為驗證，選用之壓電元素為 Solid 5，鋼板元素為 Solid 45，網格切割方式依長寬高比為 1:1:0.05，如圖 5.5 所示，平板之邊界條件為四邊簡支撐，遂將平板四周厚度 (z) 方向之位移固定住，再輸入一直流定電壓於壓電元素上，便可計算出結構撓曲變形位移。壓電片置平板中央以 (5.11) 式計算與 ANSYS 數值分析所得

之撓曲變形如圖 5.6 與圖 5.7，結果顯示兩者所得平板撓曲變形相當吻合，再擷取平板之水平中線  $y=0.15\text{m}$  與垂直中線  $x=0.15\text{m}$ ，比較 (5.11) 式與 ANSYS 計算所得撓曲位移如圖 5.8 與圖 5.9，(5.11) 式之解析解與 ANSYS 數值解幾乎相同。改變壓電片貼覆位置於平板上方，比較(5.11)式和 ANSYS 計算所得平板撓曲變形如圖 5.10 和圖 5.11，再擷取平板水平與垂直中線比較 (5.11) 式與 ANSYS 計算所得之撓曲位移如圖 5.12 與圖 5.13，結果顯示本文推導之撓曲位移解析解 (5.11) 式與 ANSYS 數值解相當吻合。再變更壓電片貼覆位置為平板右側如圖 5.3，分別以 (5.11) 式和 ANSYS 計算所得平板撓曲變形如圖 5.14 與圖 5.15，擷取平板水平與垂直中線比較(5.11) 式和 ANSYS 計算所得平板撓曲位移如圖 5.16 與圖 5.17 亦相當吻合。圖 5.8 至圖 5.17 之結果顯示壓電片貼覆不同位置對平板所產生之變形亦不相同，本節將壓電片貼覆於平板中央、右側與上方三個位置，平板最大撓曲位移位置分別為  $(0.15\text{m}, 0.15\text{m})$ 、 $(0.24\text{m}, 0.15\text{m})$  與  $(0.15\text{m}, 0.22\text{m})$ ，再比較 (5.11) 式與 ANSYS 計算所得最大撓曲位移如表 5.1，結果顯示壓電片貼覆中央所得撓曲位移最大，其次為貼覆於上方，而貼覆右側位置撓曲位移則最小，(5.11) 式與 ANSYS 比較誤差均在 3.3% 內，驗證本文理論推導之準確性。

### 5.3 平板貼覆多片壓電材料

將三片壓電片貼覆於平板下表面中央、右側與上方如圖 5.18 所示，壓電片的尺寸均為 60mm×40mm×0.5mm，鋼板尺寸為 300mm×300mm×5mm。將三片壓電片均施加電壓-100V 於壓電片上，應用 5.1 小節中推導 (5.11) 式分別求出各壓電片對結構造成之撓曲位移，再將個別求得之撓曲位移以疊加法相加如圖 5.19，可得平板同時貼覆多片壓電片之撓曲位移如下所示

$$w = \sum_{i=1}^n w_i \quad (5.12)$$

平板中央、右側與上方三位置各貼覆壓電片如圖 5.18 所示，以 (5.12) 式與 ANSYS 計算所得撓曲變形如圖 5.20 與圖 5.21，擷取平板之水平中線  $y=0.15\text{m}$  與垂直中線  $x=0.15\text{m}$ ，比較 (5.12) 式與 ANSYS 計算所得撓曲位移如圖 5.22 與圖 5.23。結果顯示 (5.12) 式與 ANSYS 計算所得平板撓曲位移相當吻合，最大撓曲位移均發生在  $x=0.15\text{m}$ ， $y=0.16\text{m}$  上，誤差為 2.2%。再變更施加於壓電片之電壓，分別施予電壓 100V、-200V 和-100V 於貼覆中央、右側與上方之壓電片，應用 (5.12) 式與 ANSYS 計算所得撓曲變形如圖 5.24 與圖 5.25，擷取平板水平與垂直中線比較(5.12)式與 ANSYS 計算所得撓曲位移如圖 5.26 和圖 5.27 亦相當吻合，最大撓曲位移均發生在  $x=0.24\text{m}$ ， $y=0.15\text{m}$ ，誤差為 3.4%。比較 (5.12) 式與 ANSYS 有限元素分析計算所得最大撓曲位移如表 5.2，結果顯示兩者相當吻合，驗證本文應用

疊加原理計算壓電材料多片貼覆對平板產生撓曲位移之可行性。

## 5.4 平板貼覆陣列式壓電片

將十二片壓電片以陣列方式貼覆於平板下表面，排列方式為三行四列，編號為 PZT11、PZT12、PZT13…如圖 5.28，尺寸均為  $60\text{mm}\times 40\text{mm}\times 0.5\text{mm}$ ，鋼板尺寸為  $300\text{mm}\times 300\text{mm}\times 5\text{mm}$ 。首先應用 5.1 節推導之 (5.11) 式計算單片壓電片對平板產生之撓曲位移，再應用 5.2 節所述疊加原理 (5.12) 式計算多片壓電片所產生之平板撓曲位移。本節將壓電片以陣列方式貼覆於平板，可藉由改變各壓電片之電壓達成控制平板變形之目的，亦即可以掌握平板外形之變化。本節以三個例題說明不同電壓作用於壓電片對平板撓曲變形之影響。

例題 1：圖 5.28 所示之 12 片陣列式壓電片其中編號 PZT11、PZT13、PZT41 與 PZT43 之壓電片施加電壓  $-100\text{V}$ ，編號 PZT12 與 PZT42 之壓電片施加電壓  $100\text{V}$ ，其餘壓電片不施加電壓。應用 (5.12) 式計算所得平板撓曲變形如圖 5.29。

例題 2：圖 5.28 所示之 12 片陣列式壓電片其中編號 PZT11、PZT22 與 PZT33

之壓電片施加電壓-100V，編號 PZT13、PZT31 與 PZT42 之壓電片施加電壓 100V，其餘壓電片不施加電壓。應用 (5.12) 式計算所得平板撓曲變形如圖 5.30。

例題 3：圖 5.28 所示之 12 片陣列式壓電片其中編號 PZT11、PZT13、PZT22、PZT31、PZT33 與 PZT42 之壓電片施加電壓-100V，編號 PZT12、PZT21、PZT23、PZT32、PZT41 與 PZT43 之壓電片施加電壓 100V。應用 (5.12) 式計算所得平板撓曲變形如圖 5.31。

綜合上述三例題，陣列式壓電致動器，可藉由改變各壓電致動器輸入之電壓，調整彎矩負載作用位置與大小，進而控制整體結構之變形與形狀。



## 第六章 平板內埋壓電材料之撓曲分析

本章將分析內埋壓電材料為致動器對平板結構所產生之撓曲變形，第四章已推導出單一壓電片內埋於結構內部對結構所產生之力矩，本章以此力矩為負載作用於平板，應用板殼力學理論推導平板之撓曲分析。選用四邊簡支撐為邊界條件，以第四章推導所得單位長度彎曲力矩 (4.25) 式為負載作用於平板，再代入 5.1 小節 (5.11) 式計算整體結構之撓曲位移，其負載範圍則為壓電片內埋之區域如圖 5.1 所示，壓電片在定電壓作用下將對平板施加一固定彎曲力矩產生撓曲變形。

### 6.1 平板內埋單片壓電材料

將壓電片內埋於簡支撐平板中央、右側與上方如圖 5.1、圖 5.2 與圖 5.3，內埋深度  $d$  之計算方式係從平板上表面制壓電片上表面如圖 6.1 所示。選用壓電片材料為表 3.2 中之 PZT-5H，平板材料則為表 3.1 中之鋼，壓電片的尺寸為  $60\text{mm}\times 40\text{mm}\times 0.5\text{mm}$ ，鋼板尺寸為  $300\text{mm}\times 300\text{mm}\times 5\text{mm}$ 。若壓電片內埋於平板厚度方向之中央位置，由於上下對稱，彎曲力矩為零，平板撓曲位移亦為零。本節壓電片內埋深度  $d$  為  $2\text{mm}$ ，施加直流定電壓  $-100\text{V}$  於壓電片上，首先應用第四章推導之力矩 (4.22) 式計算壓電片對板

結構產生之單位力矩如下所示

$$m_x = m_y = \frac{[(h_1+h_2)(K_4 - K_2) - (h_2+h_3)(K_1 - K_3)]d_{31}V}{2h_2(K_1K_4 - K_2K_3)} \quad (6.1)$$

$$[h(x-x_1) - h(x-x_2)][h(y-y_1) - h(y-y_2)]$$

其中

$$K_1 = (1-\nu_1) \left[ \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{h_1(h_1+h_2)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \right] + (1-\nu_2) \left[ \frac{1}{E_2 h_2} + \frac{h_2(h_1+h_2)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \right]$$

$$K_2 = (1-\nu_1) \left[ -\frac{h_1(h_2+h_3)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \right] + (1-\nu_2) \left[ \frac{1}{E_2 h_2} + \frac{h_2(h_2+h_3)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \right]$$

$$K_3 = (1-\nu_2) \left[ \frac{1}{E_2 h_2} - \frac{h_2(h_1+h_2)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \right] - (1-\nu_3) \left[ \frac{h_3(h_1+h_2)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \right]$$

$$K_4 = (1-\nu_2) \left[ \frac{1}{E_2 h_2} + \frac{h_2(h_2+h_3)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \right] + (1-\nu_3) \left[ \frac{1}{E_3 h_3} + \frac{h_3(h_2+h_3)}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \right]$$

再將 (6.1) 式代回 (5.11) 式可計算內埋壓電片對平板所產生之撓曲位移

如下：

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{D \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.2)$$

其中

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x_2}^{x_1} \int_{y_2}^{y_1} \frac{[(h_1+h_2)(K_4 - K_2) - (h_2+h_3)(K_1 - K_3)]d_{31}V}{2h_2(K_1K_4 - K_2K_3)} \{ [\delta'(x-x_1) - \delta'(x-x_2)][h(y-y_1) - h(y-y_2)]$$

$$+ [h(x-x_1) - h(x-x_2)][\delta'(y-y_1) - \delta'(y-y_2)] \} \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$= \frac{[(h_1+h_2)(K_4 - K_2) - (h_2+h_3)(K_1 - K_3)]d_{31}V}{2h_2(K_1K_4 - K_2K_3)} \left[ -\frac{\gamma_m^2 + \gamma_n^2}{\gamma_m \gamma_n} (\cos \gamma_m x_1 - \cos \gamma_m x_2)(\cos \gamma_n y_1 - \cos \gamma_n y_2) \right]$$

$$\gamma_m = \frac{m\pi}{a} ; \gamma_n = \frac{n\pi}{b}$$

圖 6.2、圖 6.3、圖 6.4 分別為 (6.2) 式計算所得壓電片內埋深度 2mm 於平板中央、右側與上方三種不同位置所得平板撓曲變形。最大撓曲位移位置依內埋中央、右側及上方分別位於 (0.15m, 0.15m)、(0.24m, 0.15m)

與 (0.15m, 0.22m) 處，其值分別為  $4.7129 \times 10^{-5}$ mm、 $3.5627 \times 10^{-5}$ mm 與  $4.2427 \times 10^{-5}$ mm。結果顯示內埋壓電片於中央可得到最大撓曲位移，其次是內埋壓電片於上方位置，而貼覆右側位置之撓曲位移量則最小。壓電片內埋與貼覆對平板所產生之撓曲位移其理論與計算方法均相同，主要差異在於彎曲力矩，貼覆壓電片可施加較大之彎矩於平板，產生之撓曲位移亦較大。本節內埋壓電片對平板所產生之撓曲變形與 5.2 節貼覆壓電片相似，僅在數據上有所不同。

## 6.2 壓電材料內埋深度對平板結構之影響

將壓電片內埋於鋼板中央如圖 5.1 所示，壓電片的尺寸為 60mm×40mm×0.5mm，鋼板尺寸為 300mm×300mm×5mm，五種不同內埋深度分別為 2mm、1.5mm、1mm、0.5mm 以及 0.1mm，以 (6.2) 式計算所得平板撓曲變形如圖 6.5、圖 6.6、圖 6.7、圖 6.8、圖 6.9 所示，最大撓曲位移均發生在  $x=0.15$ m,  $y=0.15$ m 位置，其值分別為  $4.7129 \times 10^{-5}$ mm、 $1.8486 \times 10^{-4}$ mm、 $4.6076 \times 10^{-4}$ mm、 $9.9593 \times 10^{-4}$ mm 與  $1.7269 \times 10^{-3}$ mm，再繪出平板最大撓曲位移與壓電片內埋深度之關係曲線如圖 6.10，由圖可以明顯地發現撓曲位移沿內埋深度減少而增加，亦即當壓電片內埋位置越靠近上表面時，結構所受彎矩效應越明顯，撓曲位移亦越大。

### 6.3 平板內埋多片壓電材料

將三片壓電片內埋於平板內部中央、右側與上方如圖 5.17 所示，壓電片的尺寸均為  $60\text{mm}\times 40\text{mm}\times 0.5\text{mm}$ ，內埋深度  $d$  均為  $1.5\text{mm}$ ，平板尺寸為  $300\text{mm}\times 300\text{mm}\times 5\text{mm}$ 。施加直流定電壓於壓電片，應用 6.1 小節中推導(6.2)式分別求出各壓電片對結構造成之撓曲位移，將分別求得之撓曲位移以疊加法相加如 (5.12) 式，可計算出同時貼覆三片壓電片對整體結構產生之變形。首先以施加相同直流定電壓  $-100\text{V}$  於三片壓電片上，施加於圖 5.17 所示中央、右側與上方三位置之壓電片，結合 (6.2) 式和 (5.12) 式計算三個壓電片對平板所產生之撓曲變形如圖 6.11，最大撓曲位移發生在  $x=0.15\text{m}$ ， $y=0.16\text{m}$  位置，其值為  $2.9284\times 10^{-4}\text{mm}$ 。再變更壓電片施加之電壓，其中內埋平板中央之壓電片電壓為  $100\text{V}$ ，內埋平板右側壓電片電壓為  $-200\text{V}$ ，內埋平板上方壓電片電壓為  $-100\text{V}$ 。結合 (6.2) 式和 (5.12) 式計算平板受此三個壓電片作用所產生之撓曲變形如圖 6.12，最大撓曲位移發生在  $x=0.24\text{m}$ ， $y=0.15\text{m}$  位置，其值為  $2.6224\times 10^{-4}\text{mm}$ 。貼覆與內埋壓電片於結構內均可利用施加不同電壓於不同位置之壓電片來致動整體結構至所需的變形，也就是說可以利用 (5.12) 式來控制整體結構之變形。

## 第七章 結論

本文以樑理論為基礎結合介面應變連續條件。推導貼覆與內埋壓電材料對樑與板結構所施加之軸向力與彎曲力矩，並計算沿厚度方向之應力分佈，探討材料楊氏係數、厚度與壓電材料內埋深度等參數對結構應力之影響。再以壓電材料對板結構所產生之彎矩為負載作用於平板，應用板理論推導四邊簡支撐平板撓曲位移，求得平板撓曲變形，並與 ANSYS 三維有限元素數值分析結果比較，驗證本文理論推導之準確性。當貼覆或內埋多片壓電材料時，可應用疊加原理將各不同位置壓電片對平板所造成之撓曲位移相加求得所有壓電材料對平板所造成的撓曲位移。將推導所得解析解與 ANSYS 有限元素數值解比較，結果顯示兩者相當吻合。探討壓電致動器對樑結構與板結構所產生之應力及平板撓曲變形，分析參數包含厚度、楊氏係數、內埋深度、位置與壓電致動器之數目等，其驗證結果得以下結論

- (1) 雙層樑與雙層板結構中，當基材層與壓電層之厚度比值為 1 時，應力之線性分佈最明顯，即彎矩效應最大，所得應力亦最大，隨著比值從等於 1 逐漸增大或減小。
- (2) 雙層樑、三層樑、雙層板與三層板結構中，基材應力隨著基材層與壓

電層之楊氏係數比值增大而線性分佈越明顯，即彎曲變形越大，應力亦越大；反之比值越小，彎矩效應減弱，基材應力減小並趨近均勻分佈；壓電材料承受之壓應力亦隨著比值減小而減小。材料楊氏係數對基材應力之影響較為顯著。

- (3) 三層樑結構、三層板結構與內埋壓電材料於簡支撐平板上，其內埋深度  $d$  計算方式分別如圖 3.13 與圖 6.1 所示，最大應力與最大撓曲位移均隨內埋深度增加而逐漸減小，而內埋深度對基材應力之影響較壓電材料顯著。
- (4) 貼覆與內埋壓電材料於簡支撐平板上，壓電片放置位置的不同將使得平板產生不同的撓曲變形，不論是貼覆或內埋則是以放置中央位置變形最大，其次是上方，變形最小則是放置於右側。
- (5) 貼覆與內埋多片壓電材料於簡支撐平板上，各別計算出不同位置以及不同負載電壓之壓電片所致動之撓曲位移，再將其以疊加法加總便可求得整體結構所受之撓曲位移。
- (6) 壓電片陣列式貼覆時，可利用疊加原理之計算方式，計算出個別壓電片受到不同電壓對簡支撐平板結構所產生之變形，利用此一結果便可進行對簡支撐平板結構的變形控制。

## 參考文獻

- [1] 吳朗，電子陶瓷壓電，全欣科技圖書，台北，1994.
- [2] 劉俊彥，壓電致動器對板結構之彎曲與振動分析，元智大學機械研究所論文，2003.
- [3] David H. Johnson, P.E., Penn State-Erie and Dharmendra Pal, Cybersonics, Inc., Simulation of an ultrasonic piezoelectric transducer
- [4] E.F. Crawley and J.de. Luis, Use of Piezoelectric actuators as element intelligent structures, AIAA Journal, 25(1987), 1373-1385
- [5] Ansel C Ugural, Stress in plates and shells, Mc Graw Hall International Editions, 1999
- [6] 周卓明，壓電力學，全華科技圖書，台北，2003.
- [7] K. Ghosh and R.C. Batra, Shape control and plates using piezoceramic elements, AIAA Journal, 33(1995), 1354-1357
- [8] A.M. Sadri, J.R. Wright and R.J. Wynne, Modeling and optimal placement of piezoelectric actuators in isotropic plates using genetic algorithms, Smart Mater Struct, 8(1999), 490-498
- [9] S.K. Ha, C. Keilers and F.K. Chang, Finite element analysis of composite structure containing distributed piezoceramic sensor and actuators, AIAA Journal, 30(1992), 772-780
- [10] A Baz and S. Poh, Performance of an active control system with piezoelectric actuators, J. Sound Vibr. 126, 327-343, 1988
- [11] Y.J. Yan and L.H. Yam, Mechanical interaction issues in piezoelectric composite structures, Composite Structures, 59(2003), 61-65
- [12] Q. Wang and C.M. Wang, A controllability index for optimal design of piezoelectric actuators in vibration control of beam structures, Journal of Sound and Vibration, 243(2003), 507-518
- [13] S.P. Timoshenko, Analysis of Bi-metal Thermostats, Journal of the Optical Society of America, 11(1925), 233-255
- [14] Y.G. Liu and M.N. Pavlovic, A generalized analytical approach to the buckling of simply-supported rectangular plates under arbitrary loads, Engineering Structures, 2007

- [15] M.J. Brennan, S. J. Elliott and R.J. Pinnington, The dynamic coupling between piezoceramic actuators and a beam, *Journal of the Acoustical Society of America* 102(1997), 1931-1942
- [16] Gianluca Gatti, M.J. Brennan and Paolo Gardonio, Active damping of a beam using a physically collocated accelerometer and piezoelectric patch actuator, *Journal of Sound and Vibration* 303(2007), 798-813



表 3.1 各式等向性材料材料性質

	鋼	銅	鋁	鎂
楊氏係數 $E$ (GPa)	207	110	70	44
浦松比 $\nu$	0.292	0.343	0.33	0.35
密度 $\rho$ ( $kg/m^3$ )	7870	8960	2700	1740

表 3.2 各式壓電材料材料性質

	PZT-5H	PZT-4	PVF <sub>2</sub>
楊氏係數 E1(GPa)	60.6	81.3	2
楊氏係數 E2(GPa)	60.6	81.3	2
楊氏係數 E3(GPa)	48.3	64.5	2
溥松比 $\nu_{12}$	0.34	0.33	0.33
溥松比 $\nu_{23}$	0.34	0.33	0.33
溥松比 $\nu_{13}$	0.34	0.33	0.33
密度 $\rho$ ( $kg/m^3$ )	7600	7280	2820
壓電參數 $d_{31}$ (m/V)	$-274 \times 10^{-12}$	$-123 \times 10^{-12}$	$-23 \times 10^{-12}$
壓電參數 $d_{32}$ (m/V)	$-274 \times 10^{-12}$	$-123 \times 10^{-12}$	$-23 \times 10^{-12}$
壓電參數 $d_{33}$ (m/V)	$593 \times 10^{-12}$	$289 \times 10^{-12}$	$-23 \times 10^{-12}$

表 3.3 等厚度結構基材層沿厚度方向之應力分佈

厚度位置 (mm)	ANSYS 基材層應力 (Pa)	(3.8)式解 (Pa)	誤差 (%)
1	-2949.7	-3015.3	2.2
0.9	-2190.4	-2246.62	2.5
0.8	-1430.74	-1477.94	3.2
0.7	-671.08	-709.26	5.4
0.6	88.58	59.42	49.1
0.5	848.60	828.10	2.5
0.4	1608.26	1596.78	0.7
0.3	2367.92	2365.46	0.1
0.2	3127.58	3134.14	0.2
0.1	3887.24	3902.82	0.4
0	4646.9	4671.5	0.5

表 3.4 等厚度結構壓電層沿厚度方向之應力分佈

厚度位置 (mm)	ANSYS 壓電層應力 (Pa)	(3.9)式解 (Pa)	誤差 (%)
0	-2142	-1953.28	8.8
-0.1	-1883.32	-1728.24	8.2
-0.2	-1624.64	-1503.21	7.5
-0.3	-1365.96	-1278.17	6.4
-0.4	-1107.28	-1053.14	4.9
-0.5	-848.60	-828.10	2.4
-0.6	-589.93	-603.06	2.2
-0.7	-331.26	-378.03	14.1
-0.8	-72.59	-152.99	110.8
-0.9	186.0888	72.04	61.3
-1	444.75	297.08	33.2

表 3.5 不等厚度結構基材層沿厚度方向之應力分佈

厚度位置 (mm)	ANSYS 基材層應力 (Pa)	(3.8)式解 (Pa)	誤差 (%)
2	-2643.8	-2642.37	小於 0.1
1.9	-2299.74	-2299.05	小於 0.1
1.8	-1955.68	-1955.72	小於 0.1
1.7	-1611.62	-1612.4	小於 0.1
1.6	-1267.56	-1269.08	0.1
1.5	-923.5	-925.755	0.2
1.4	-579.44	-582.433	0.5
1.3	-235.38	-239.11	1.6
1.2	108.68	104.2132	4.3
1.1	452.74	447.5361	1.2
1	796.8	790.859	0.8
0.9	1140.86	1134.182	0.6
0.8	1484.92	1477.505	0.5
0.7	1828.98	1820.828	0.4
0.6	2173.04	2164.151	0.4
0.5	2517.1	2507.475	0.4
0.4	2861.16	2850.798	0.4
0.3	3205.22	3194.121	0.3
0.2	3549.28	3537.444	0.3
0.1	3893.34	3880.767	0.3
0	4237.4	4224.09	0.3

表 3.6 不等厚度結構壓電層沿厚度方向之應力分佈

厚度位置 (mm)	ANSYS 壓電層應力 (Pa)	(3.9)式解 (Pa)	誤差 (%)
0	-2173.8	-2084.26	4.3
-0.1	-2057.76	-1983.75	3.7
-0.2	-1941.72	-1883.24	3.1
-0.3	-1825.68	-1782.74	2.4
-0.4	-1709.64	-1682.23	1.6
-0.5	-1593.6	-1581.72	0.8
-0.6	-1477.56	-1481.21	0.2
-0.7	-1361.52	-1380.7	1.4
-0.8	-1245.48	-1280.19	2.7
-0.9	-1129.44	-1179.68	4.3
-1	-1013.4	-1079.17	6.1

表 4.1 不等厚度結構基材層沿厚度方向之應力分布

厚度位置 (mm)	ANSYS 基材層應力 (Pa)	(4.9)式解 (Pa)	誤差 (%)
2	-9.233	-9.801	5.8
1.9	-7.953	-8.443	5.8
1.8	-6.672	-7.084	5.8
1.7	-5.392	-5.726	5.8
1.6	-4.111	-4.368	5.9
1.5	-2.831	-3.010	5.9
1.4	-1.551	-1.651	6.1
1.3	-0.270	-0.293	7.8
1.2	1.010	1.065	5.2
1.1	2.291	2.424	5.5
1	3.571	3.782	5.6
0.9	4.851	5.140	5.6
0.8	6.132	6.499	5.6
0.7	7.412	7.857	5.7
0.6	8.692	9.215	5.7
0.5	9.973	10.574	5.7
0.4	11.253	11.932	5.7
0.3	12.533	13.290	5.7
0.2	13.813	14.648	5.7
0.1	15.094	16.007	5.7
0	16.374	17.365	5.7

表 4.2 不等厚度結構壓電層沿厚度方向之應力分布

厚度位置 (mm)	ANSYS 壓電層應力 (Pa)	(4.11)式解 (Pa)	誤差 (%)
0	-19.087	-19.705	3.1
-0.1	-18.840	-19.546	3.6
-0.2	-18.593	-19.387	4.1
-0.3	-18.347	-19.228	4.6
-0.4	-18.100	-19.069	5.1
-0.5	-17.853	-18.910	5.5
-0.6	-17.606	-18.751	6.1
-0.7	-17.359	-18.592	6.6
-0.8	-17.112	-18.432	7.2
-0.9	-16.865	-18.273	7.7
-1	-16.618	-18.114	8.3

表 5.1 壓電片貼覆於平板不同位置 (5.11) 式與 ANSYS 計算所得最大撓

曲位移之比較

最大撓曲位移(mm) 貼覆位置	ANSYS 三維有限元 素解數值解	(5.11) 式解析解	誤差 (%)
中央	$-2.1276 \times 10^3$	$-2.1945 \times 10^3$	3.0
右側	$-1.6040 \times 10^3$	$-1.6589 \times 10^3$	3.3
上方	$-1.9132 \times 10^3$	$-1.9756 \times 10^3$	3.2

表 5.2 平板上方、中央、右側各貼覆壓電片施加不同電壓，(5.12) 式與

ANSYS 計算所得最大撓曲位移之比較

最大撓曲位移(mm) 壓電片 施加之電壓	ANSYS 三維有限元 素解數值解	(5.12) 式解析解	誤差 (%)
三片壓電片電壓均為-100V	$-3.0058 \times 10^3$	$-3.4765 \times 10^3$	2.2
上方壓電片電壓-100V 中央壓電片電壓 100V 右側壓電片電壓-200V	$-3.0058 \times 10^3$	$-3.1132 \times 10^3$	3.4

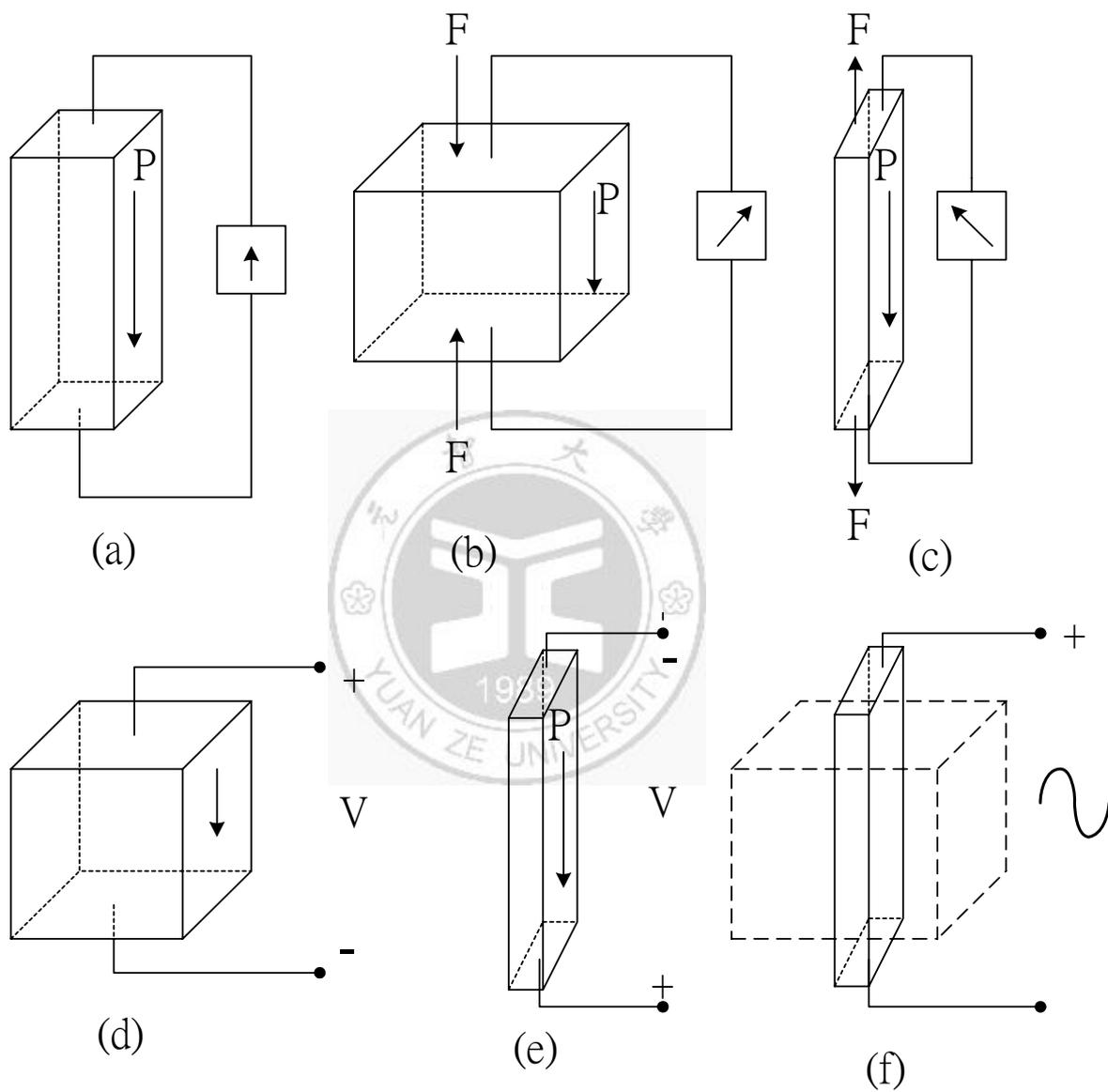


圖 2.1 壓電效應

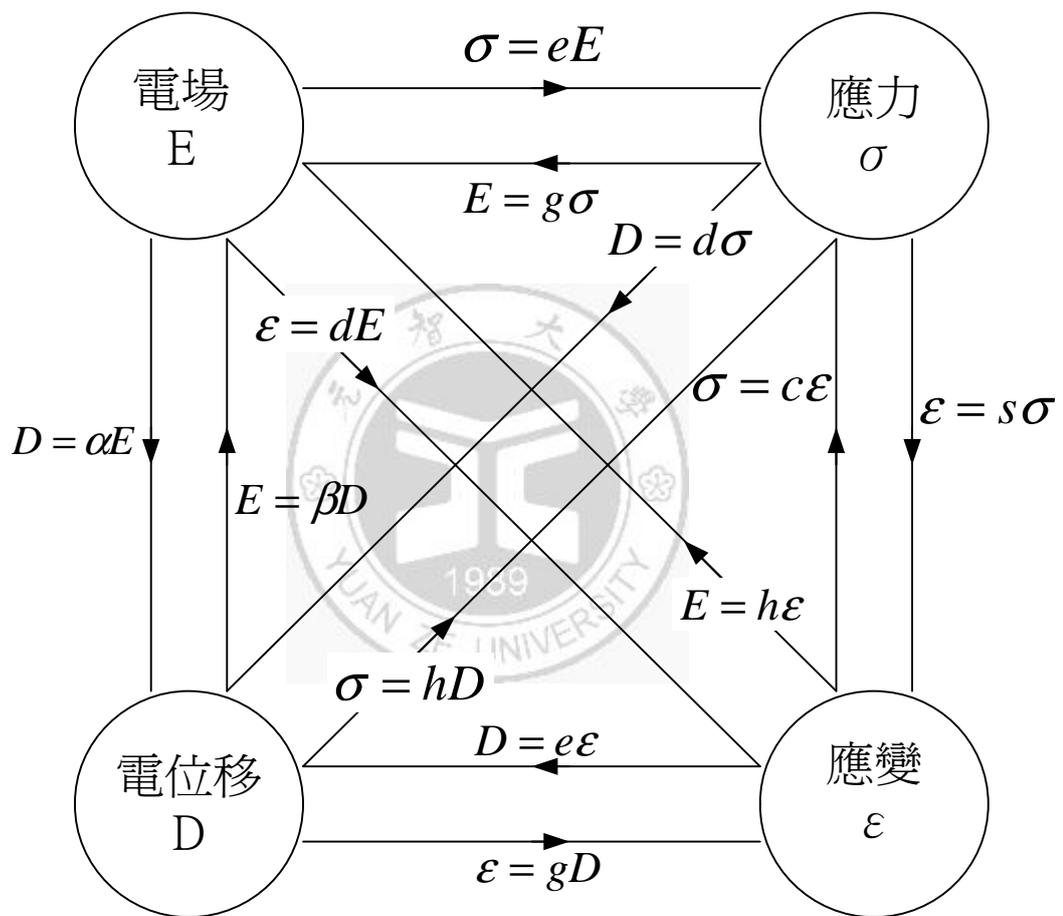


圖 2.2 壓電現象各變數間之關係

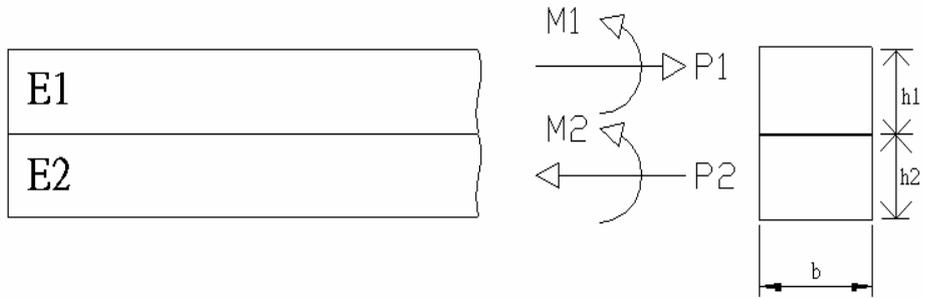


圖 3.1 雙層樑受壓電應變作用產生之負載自由體圖

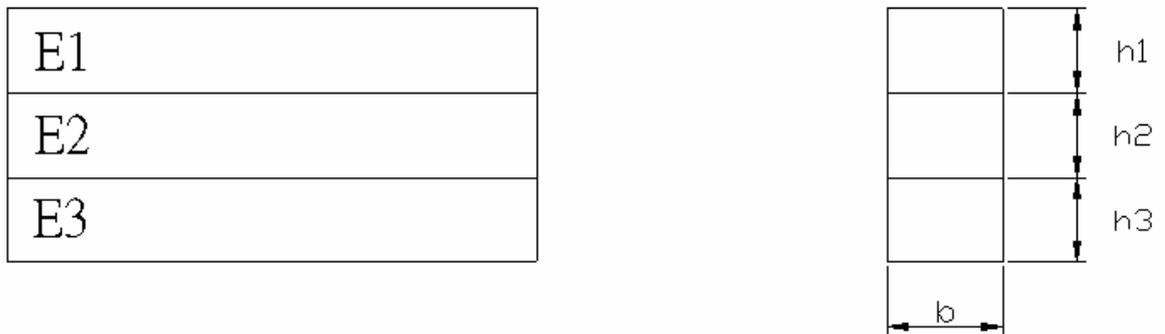


圖 3.2 三層樑結構圖

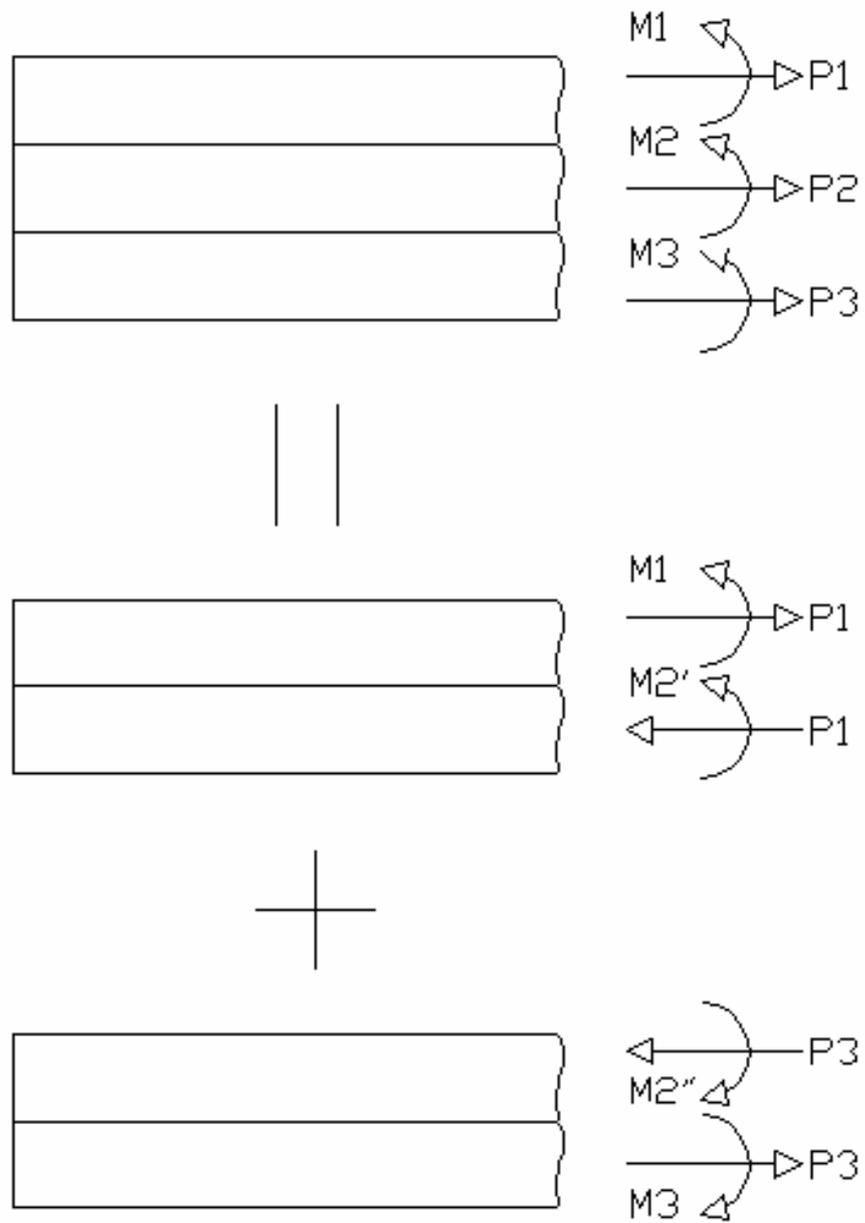


圖 3.3 三層樑受壓電應變作用產生之負載自由體圖

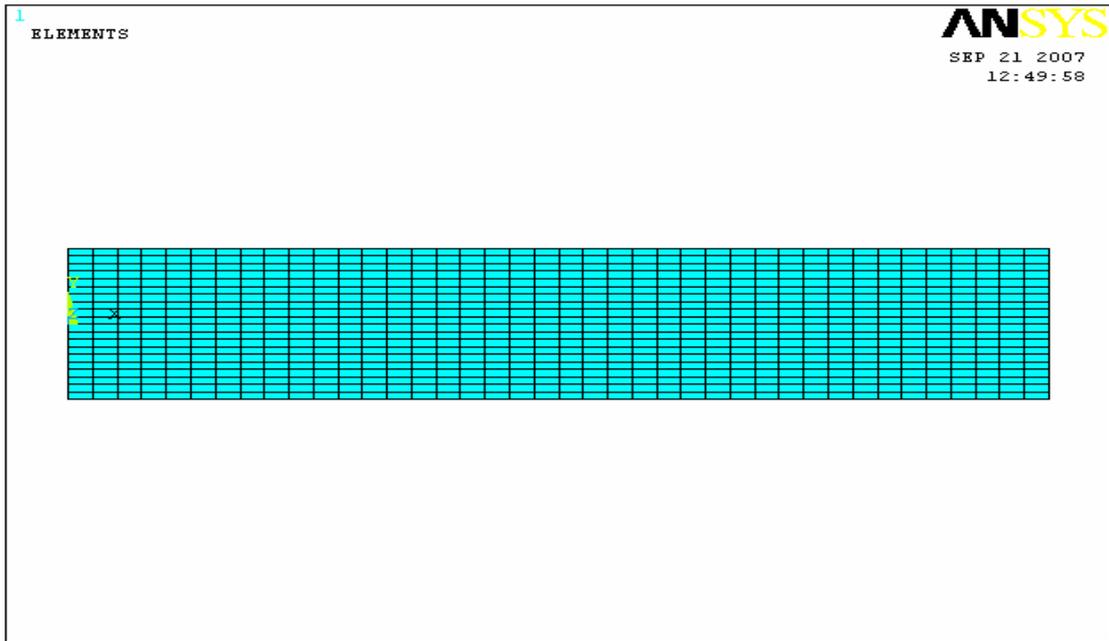


圖 3.4 雙層樑之網格示意圖

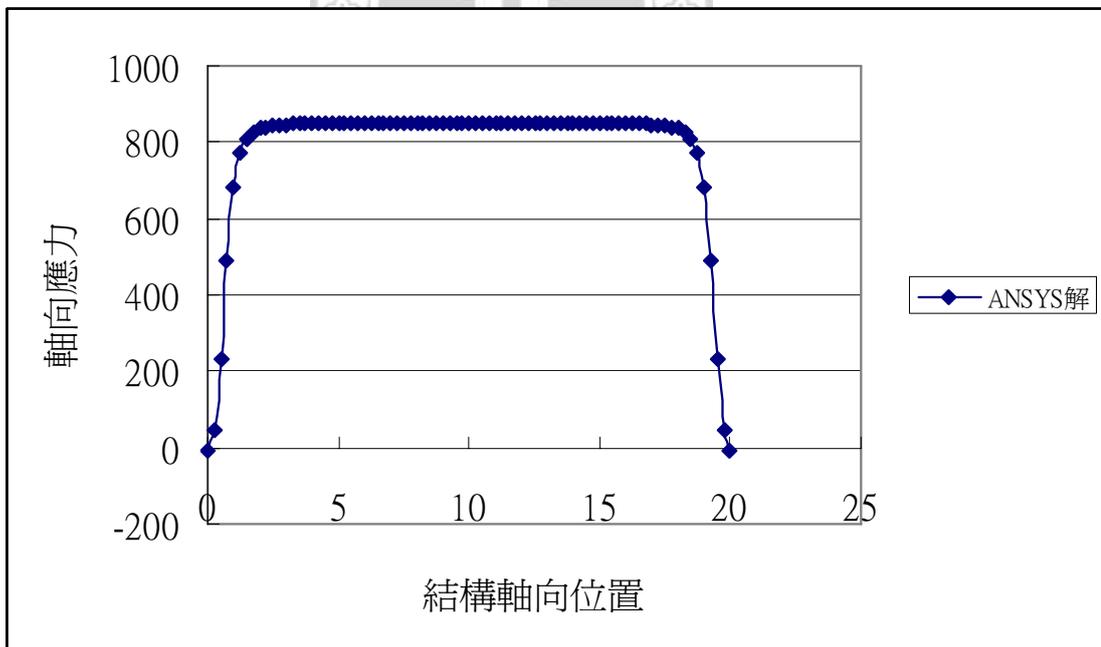


圖 3.5 壓電材料貼覆鋼層沿鋼層中央軸向方向之軸向應力分佈

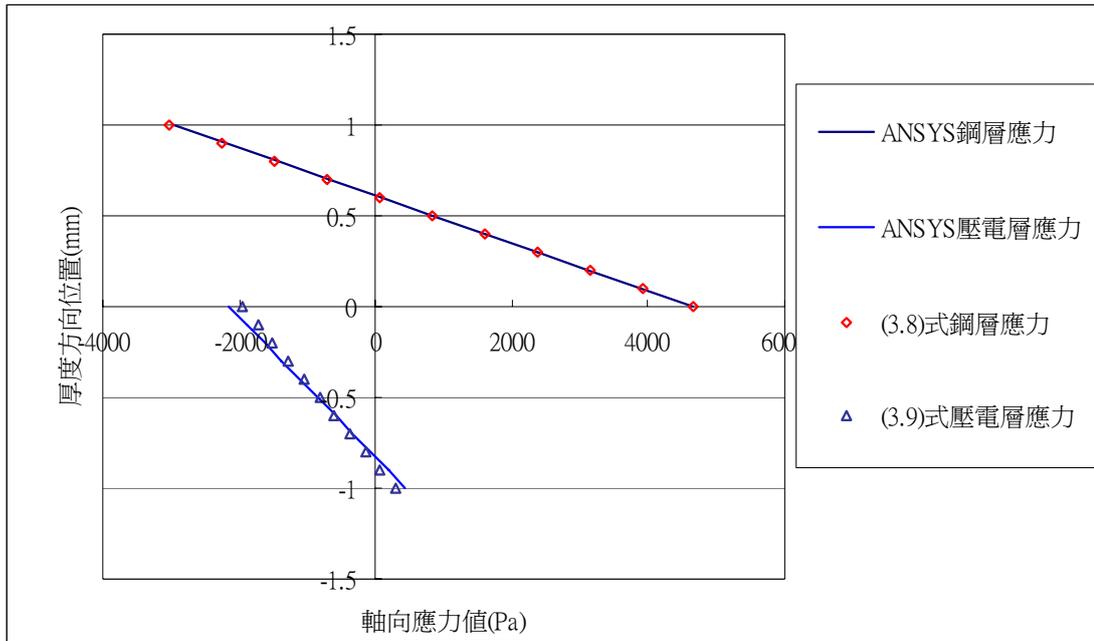


圖 3.6 等厚度雙層樑結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (3.8) 式、(3.9) 式解析解之比較

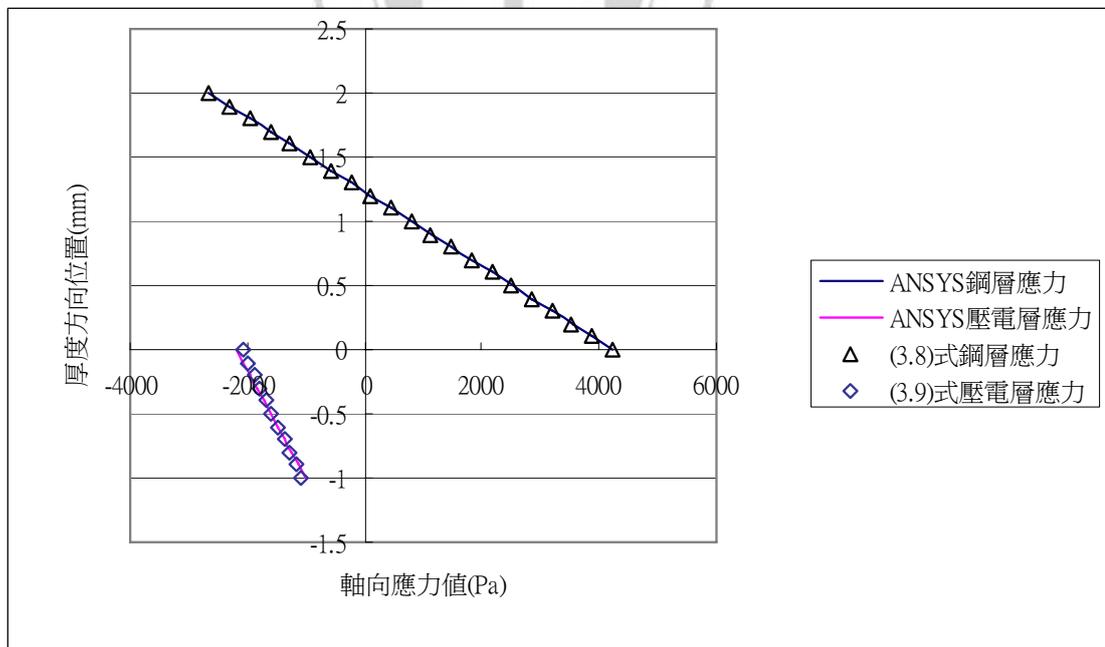


圖 3.7 不同厚度雙層樑結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (3.8) 式、(3.9) 式解析解之比較

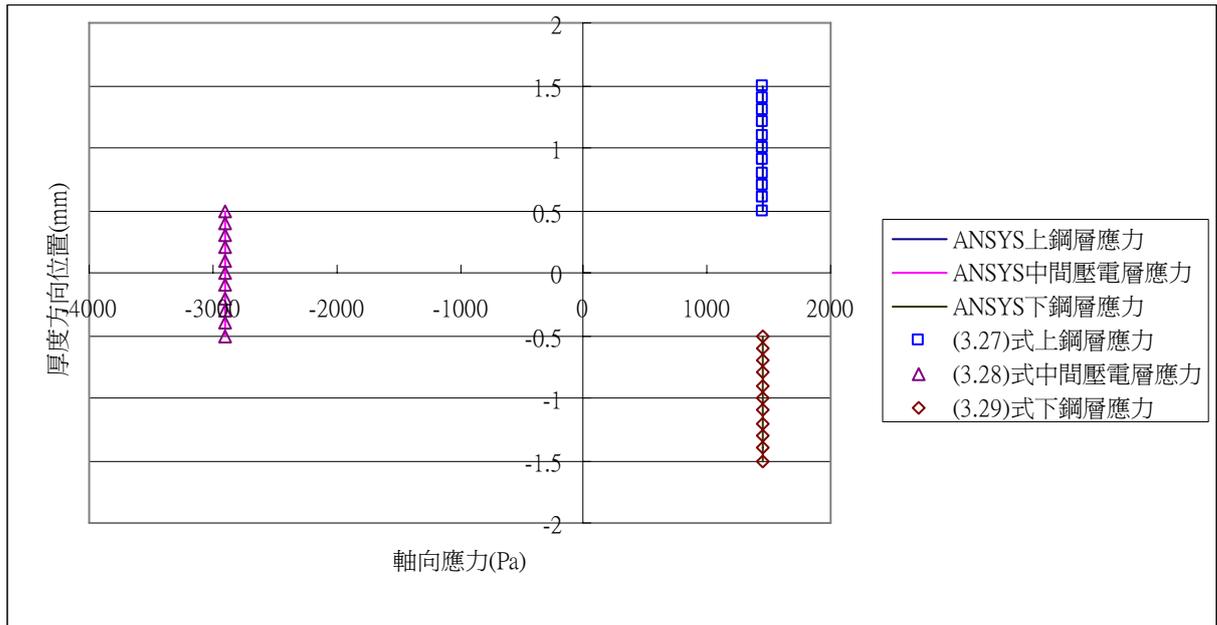


圖 3.8 等厚度三層樑結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (3.27)

式、(3.28) 式、(3.29) 式解析解之比較

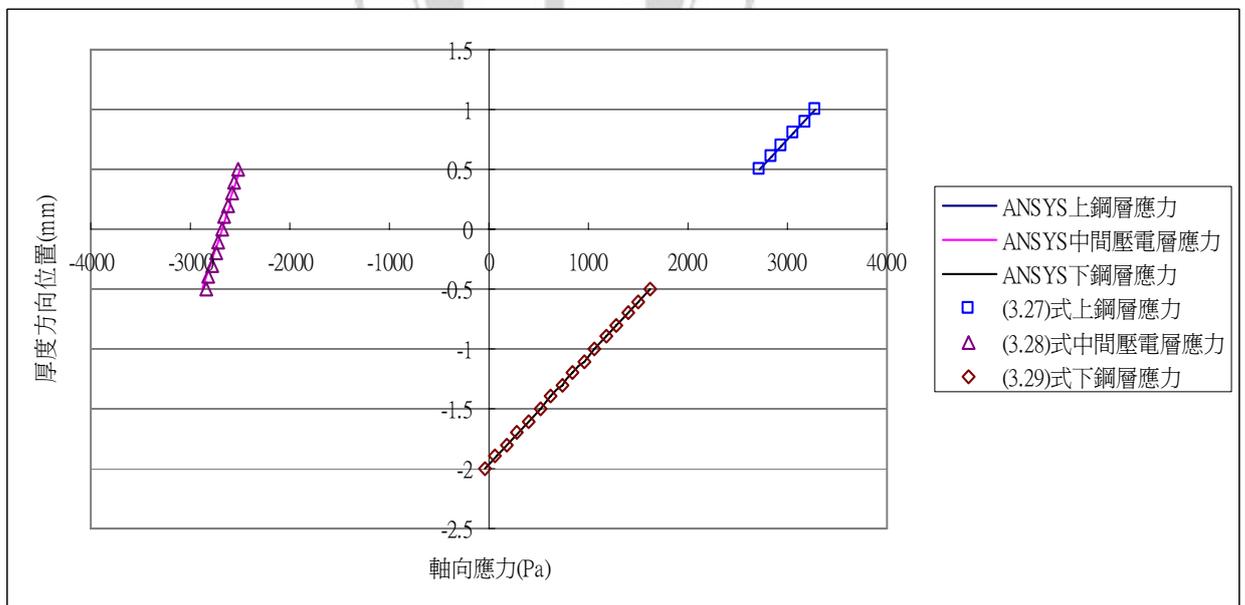


圖 3.9 不同厚度三層樑結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (3.27)

式、(3.28) 式、(3.29) 式解析解之比較

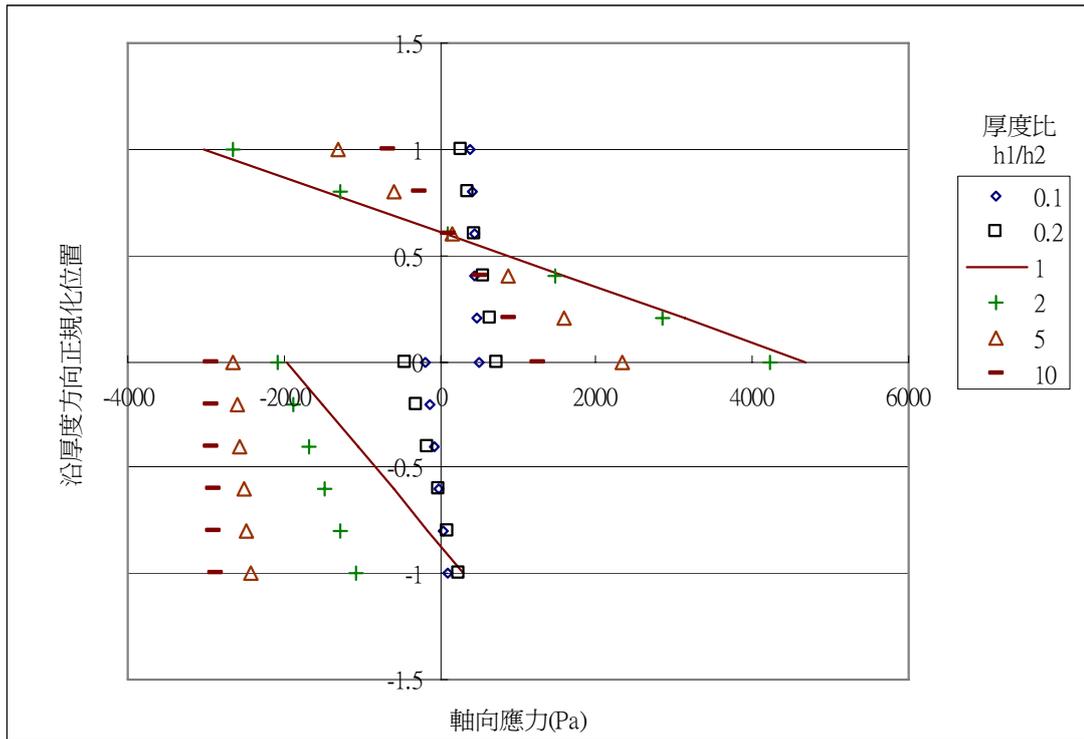


圖 3.10 雙層樑結構位置長度經規化於不同厚度比之軸向應力解析解

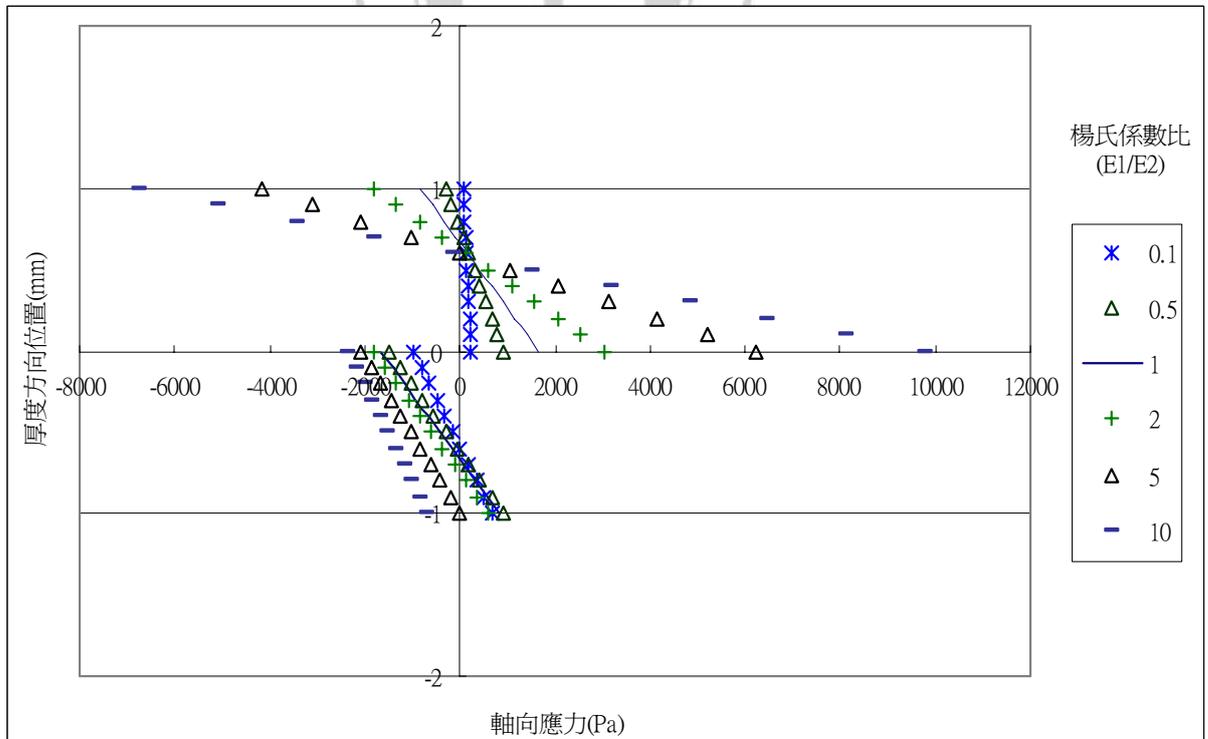


圖 3.11 雙層樑結構基材與壓電材料不同楊氏係數比之軸向應力分佈

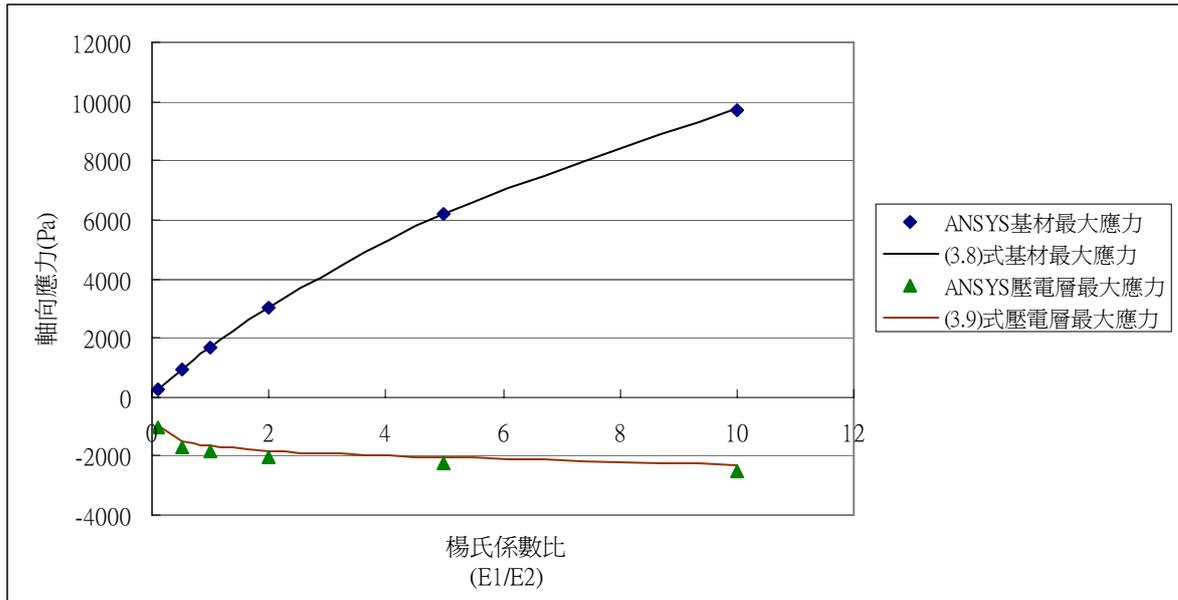


圖 3.12 雙層樑結構在不同楊氏係數比 ANSYS 與公式 (3.8) 式、(3.9) 式

計算所得基材與壓電層最大應力之比較

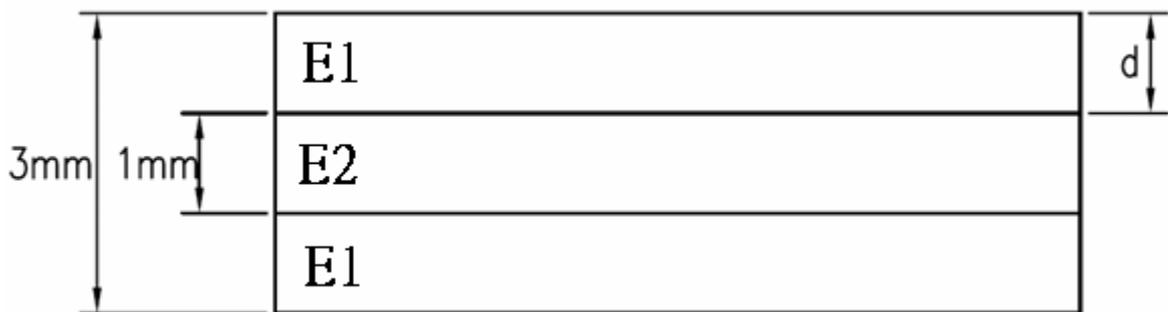


圖 3.13 壓電材料內埋深度計算

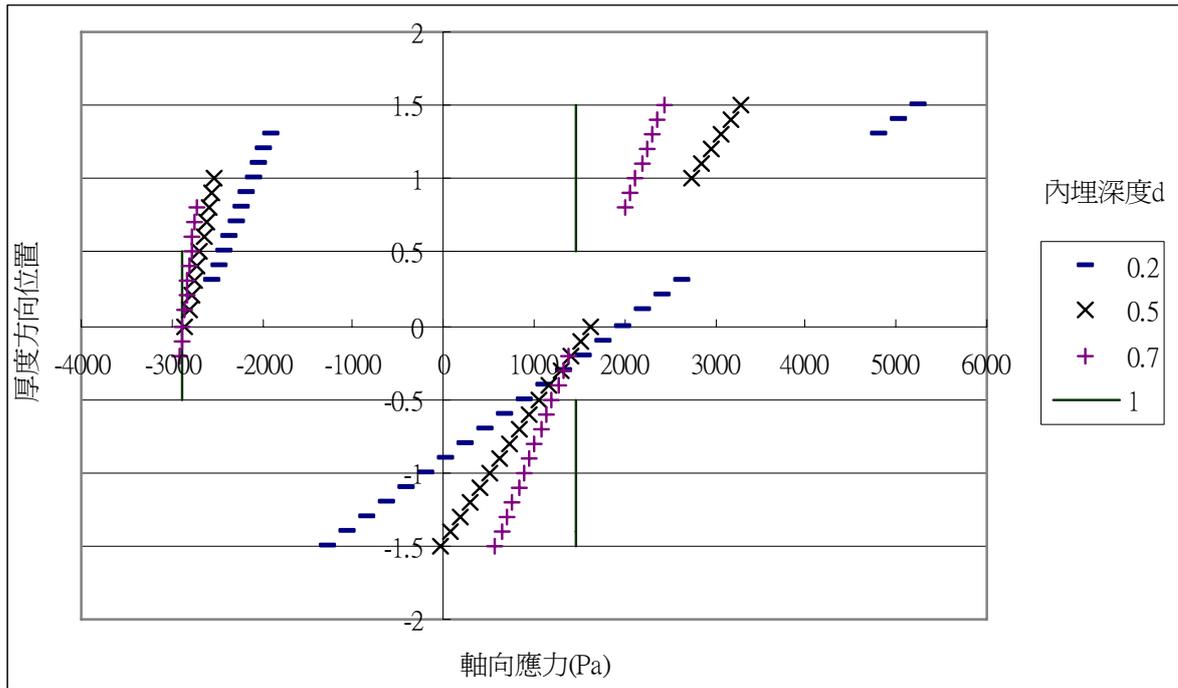


圖 3.14 三層樑結構壓電材料於不同內埋深度之軸向應力分佈

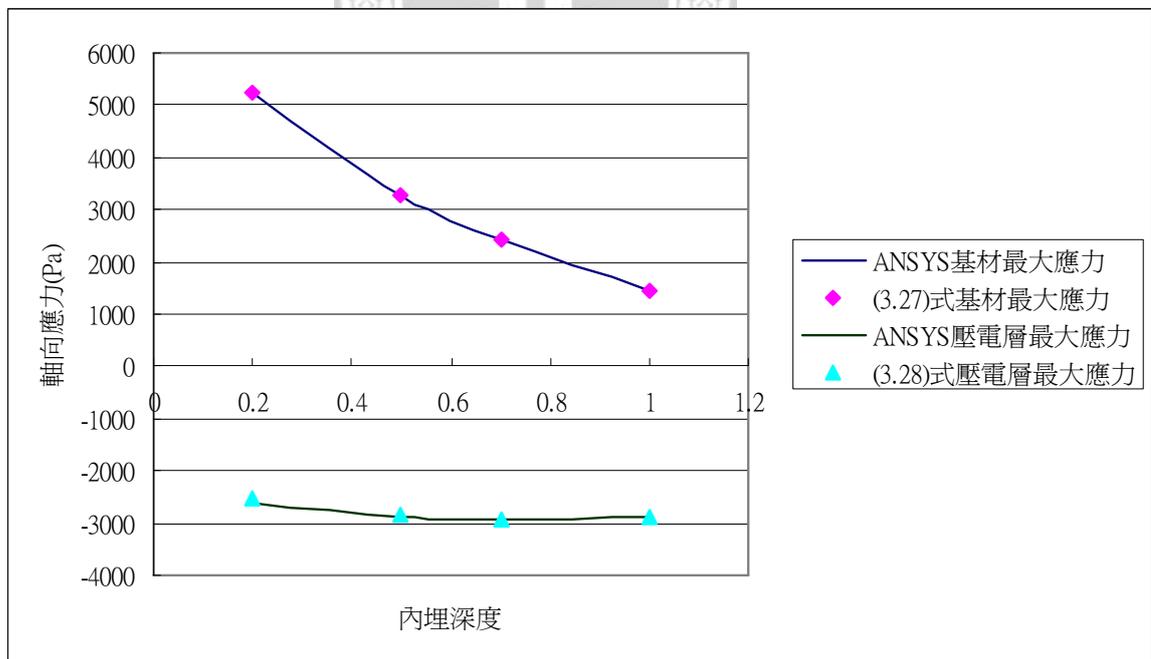


圖 3.15 三層樑結構壓電材料不同內埋深度以 ANSYS 解與公式計算所得上

層基材與中間壓電層最大應力之比較

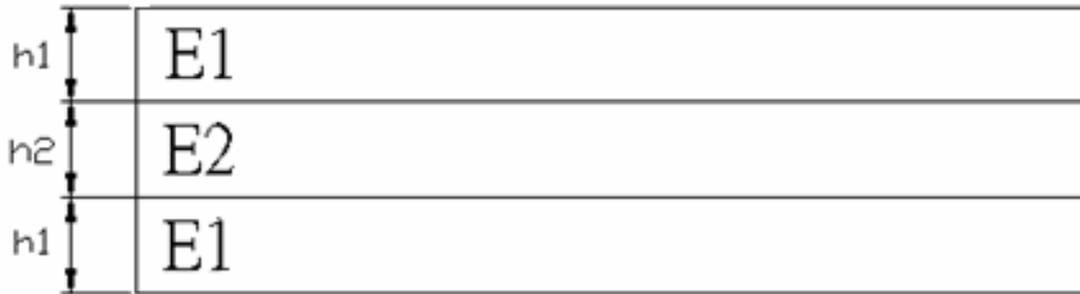


圖 3.16 內埋壓電材料於結構中央示意圖

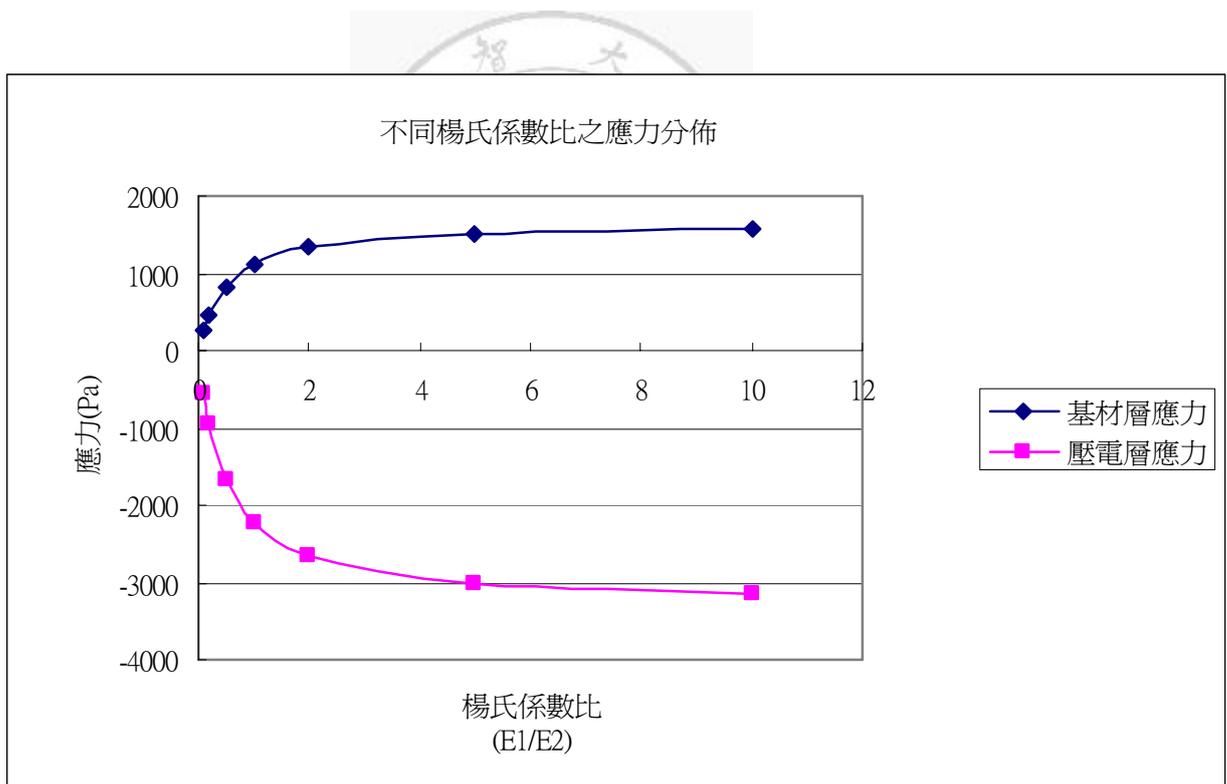


圖 3.17 以公式計算內埋壓電材料於樑結構中央改變不同基材楊氏係數之應力分佈

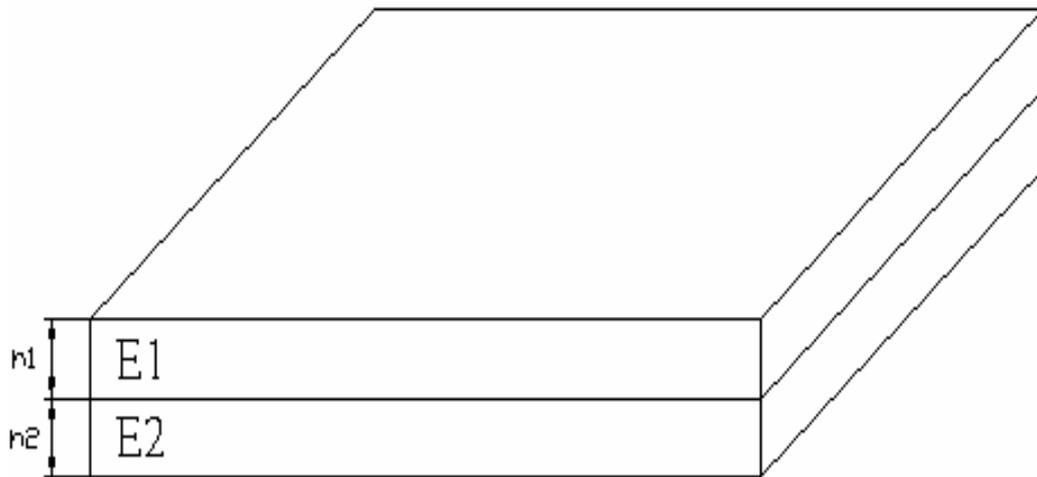


圖 4.1 雙層板結構圖

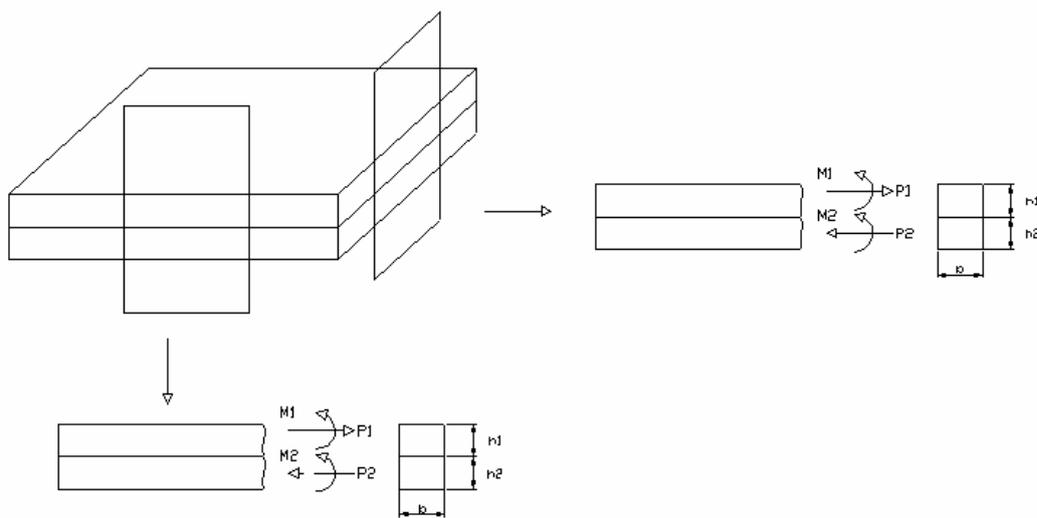


圖 4.2 雙層板受壓電應變作用產生之剖面負載自由體圖

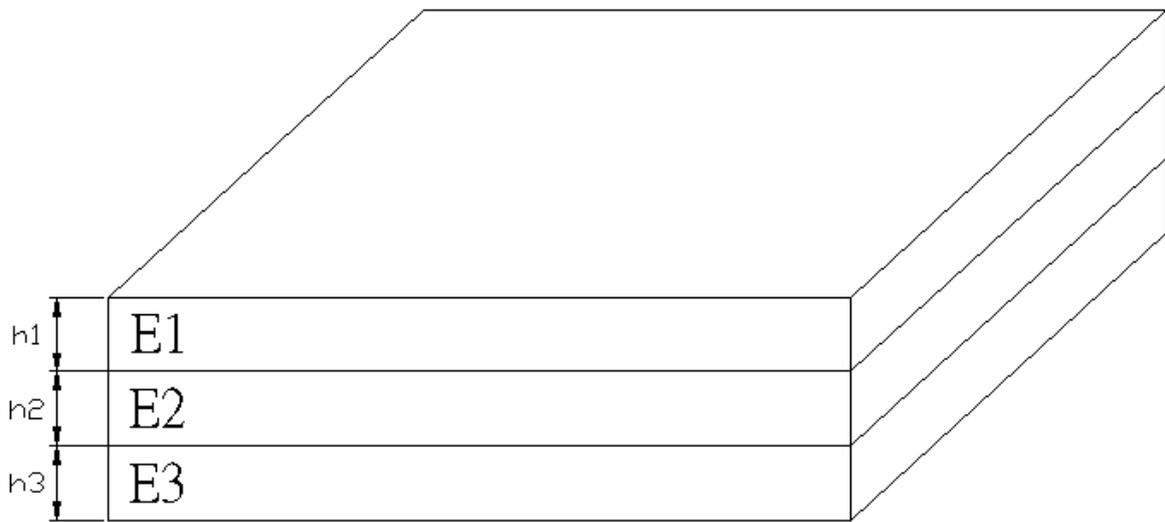


圖 4.3 三層板結構圖

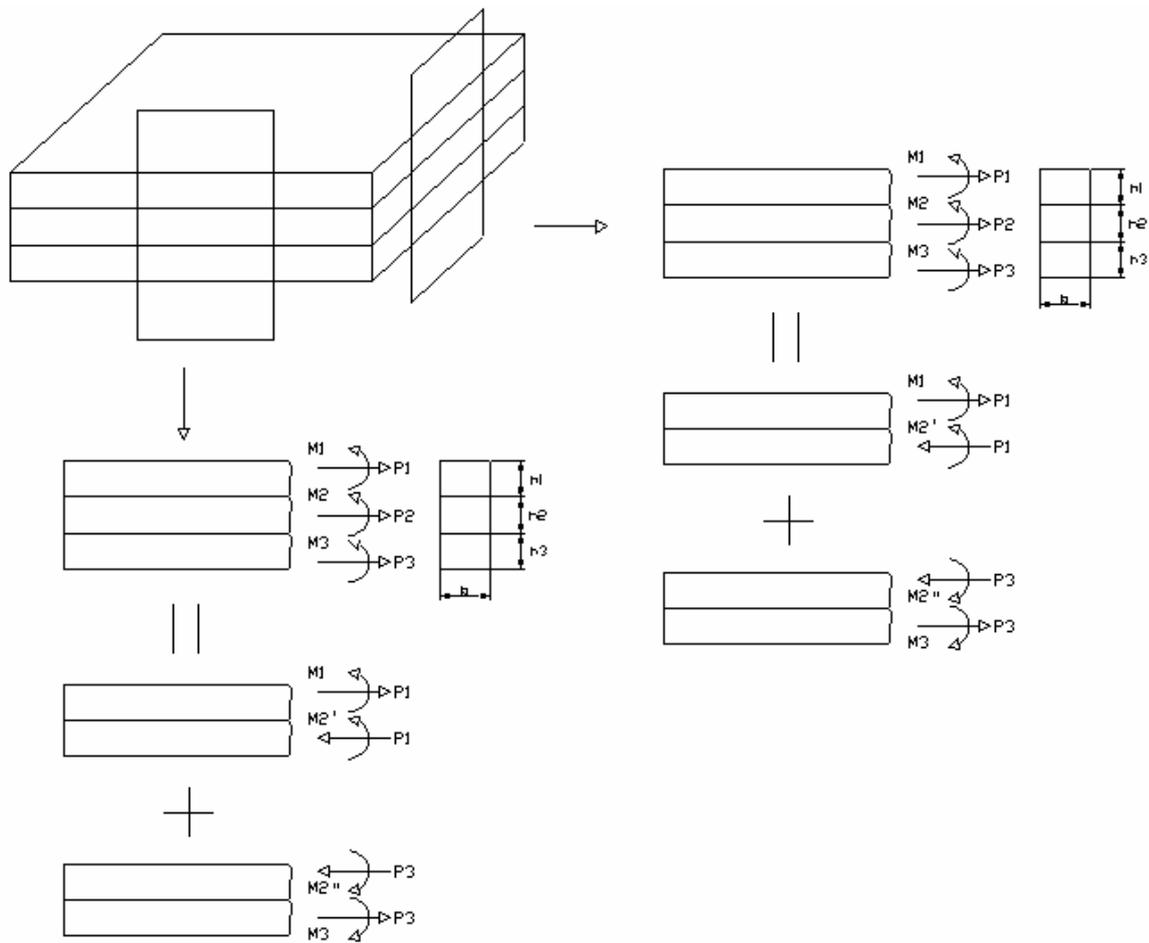


圖 4.4 三層板受壓電應變作用產生之剖面負載自由體圖

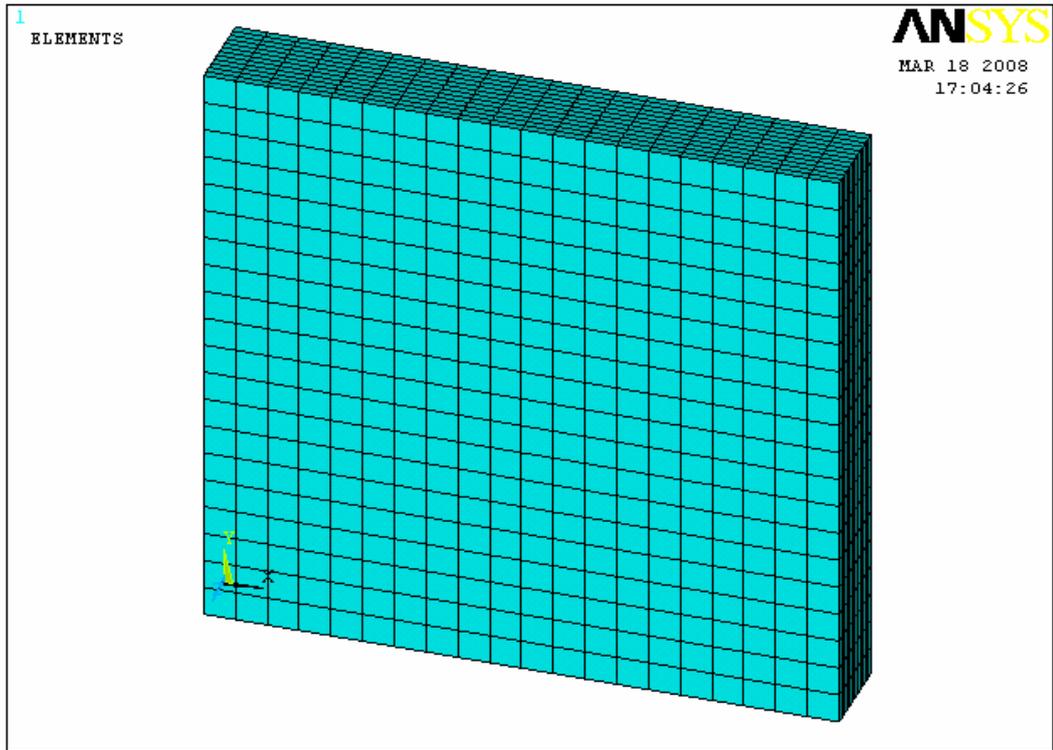


圖 4.5 雙層板之 3D 網格示意圖

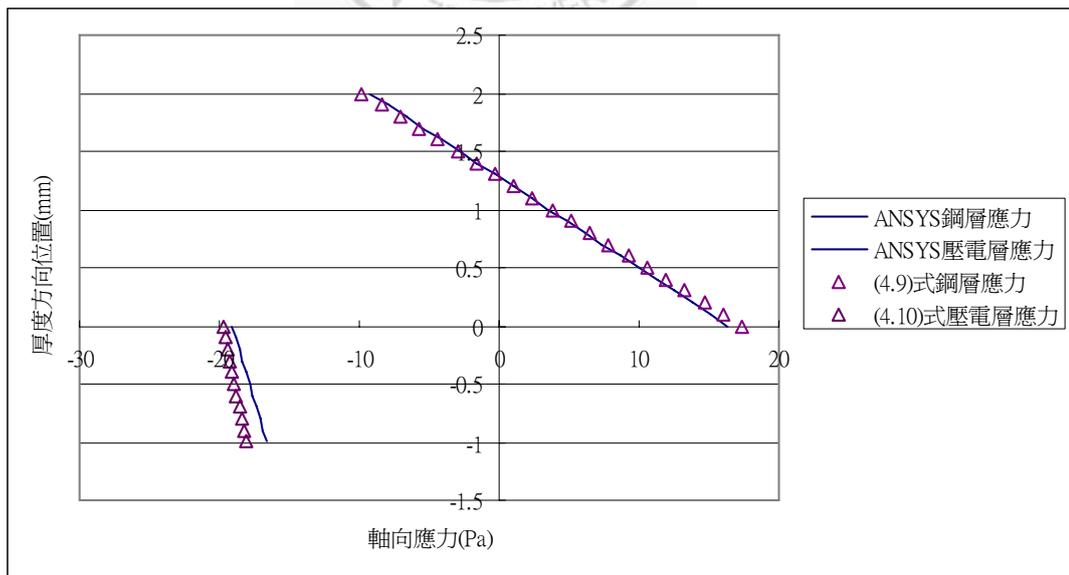


圖 4.6 不同厚度雙層板結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (4.9)

式、(4.10) 式解析解之比較

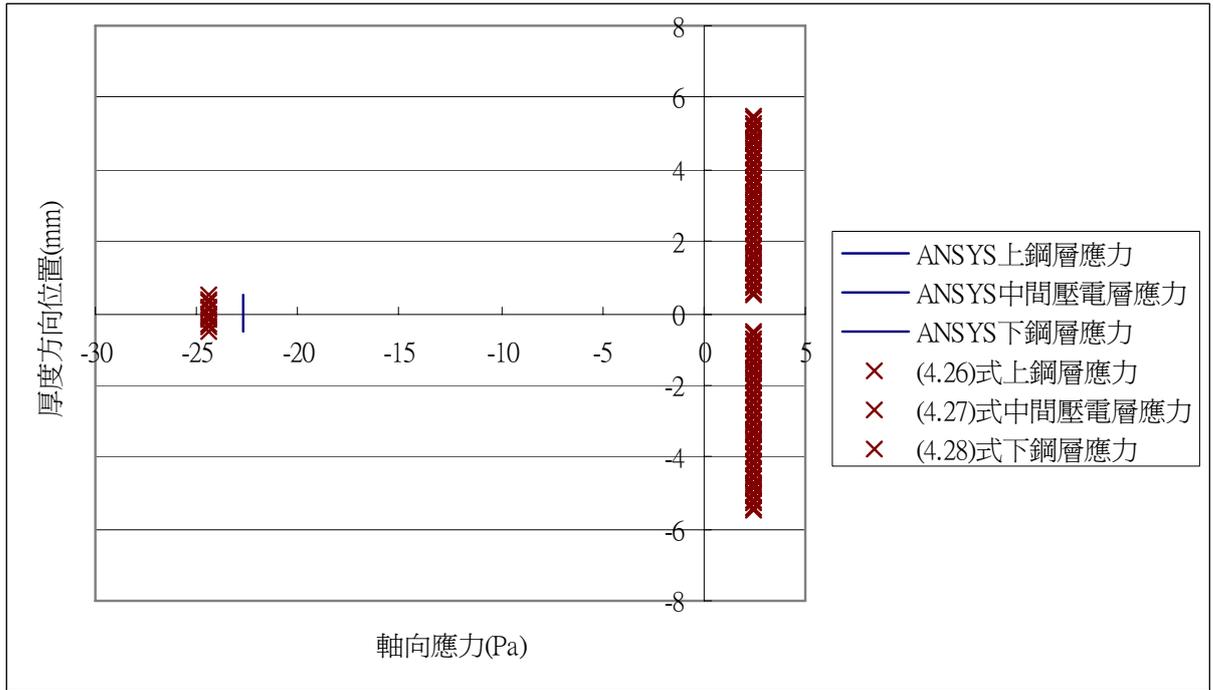


圖 4.7 上下兩層等厚度之三層板結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (4.26) 式、(4.27) 式、(4.28) 式解析解之比較

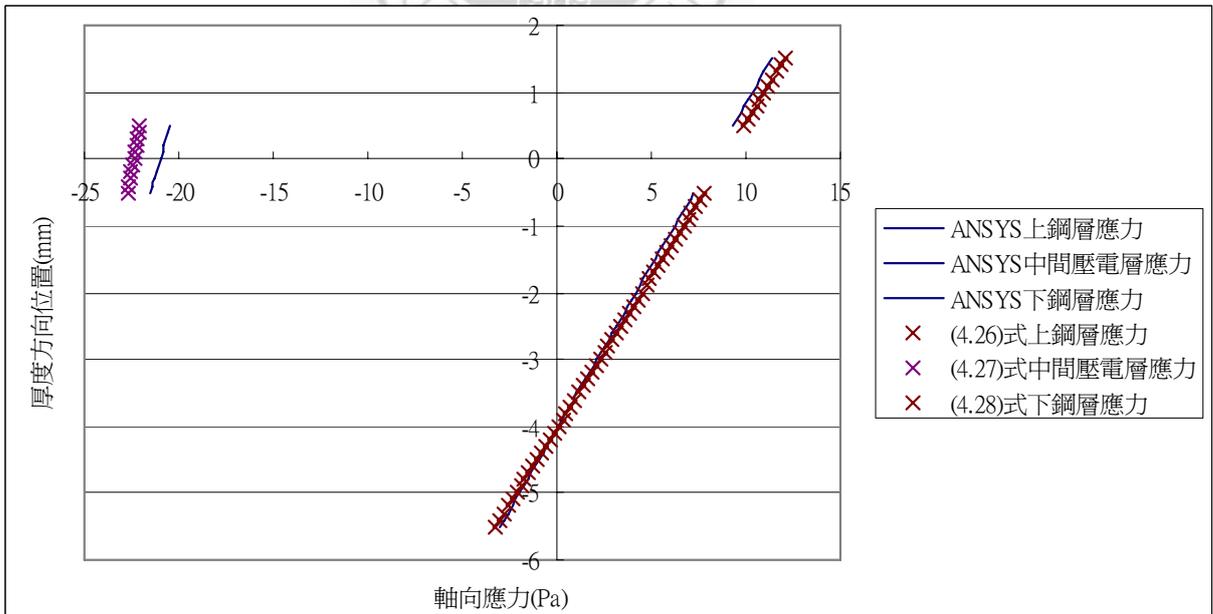


圖 4.8 上下兩層不同厚度之三層板結構中間區域軸向應力以 ANSYS 數值解與 (4.26) 式、(4.27) 式、(4.28) 式解析解之比較

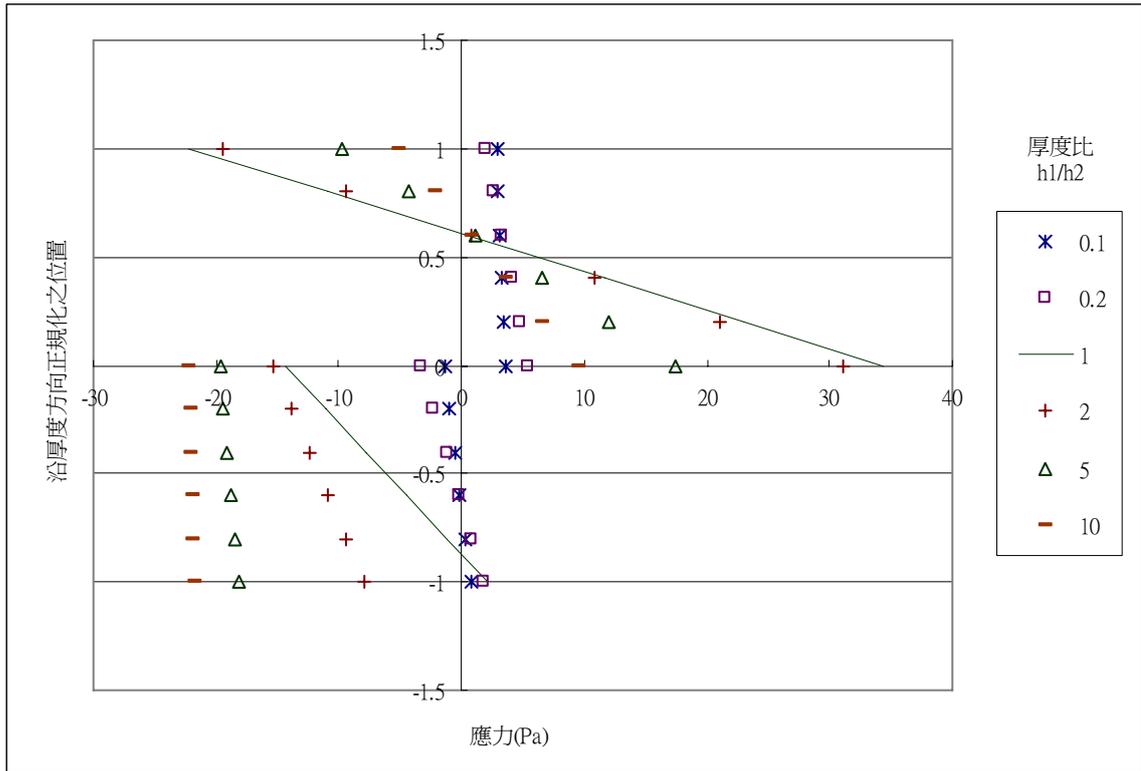


圖 4.9 雙層板結構位置長度經規化於不同厚度比之軸向應力解析解

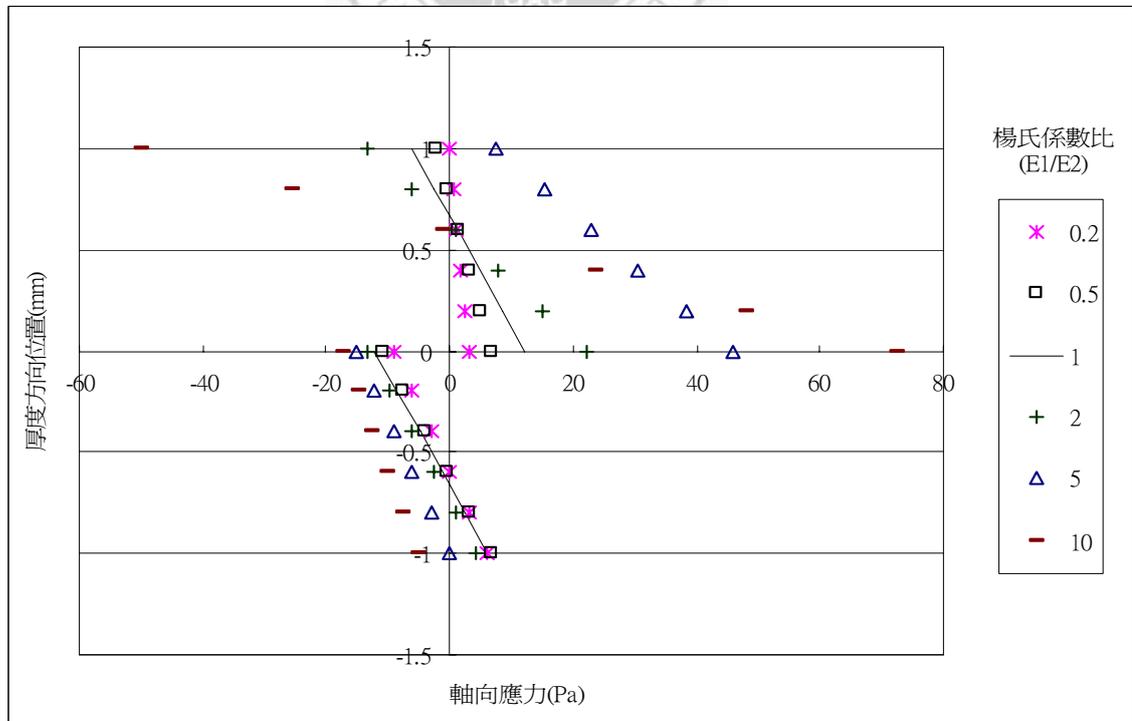


圖 4.10 雙層板結構基材與壓電材料不同楊氏係數比之軸向應力分佈

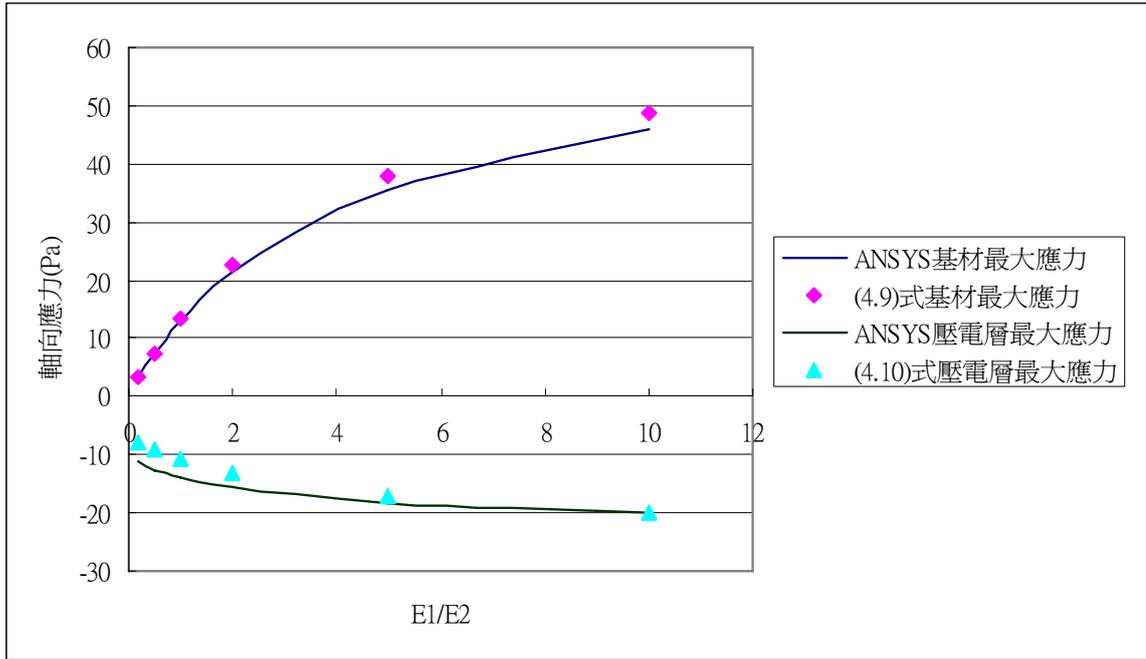


圖 4.11 雙層板結構在不同楊氏係數比 ANSYS 與公式 (4.9) 式、(4.10) 式計算所得基材與壓電層最大應力之比較

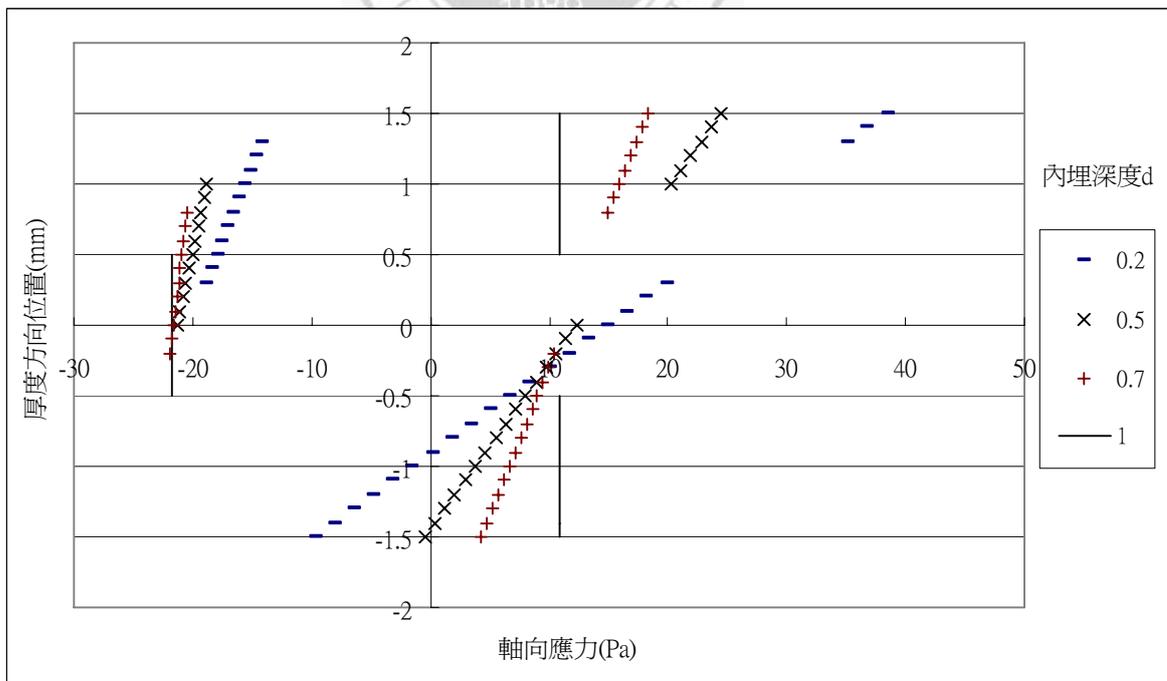


圖 4.12 三層板結構壓電材料於不同內埋深度之軸向應力分佈

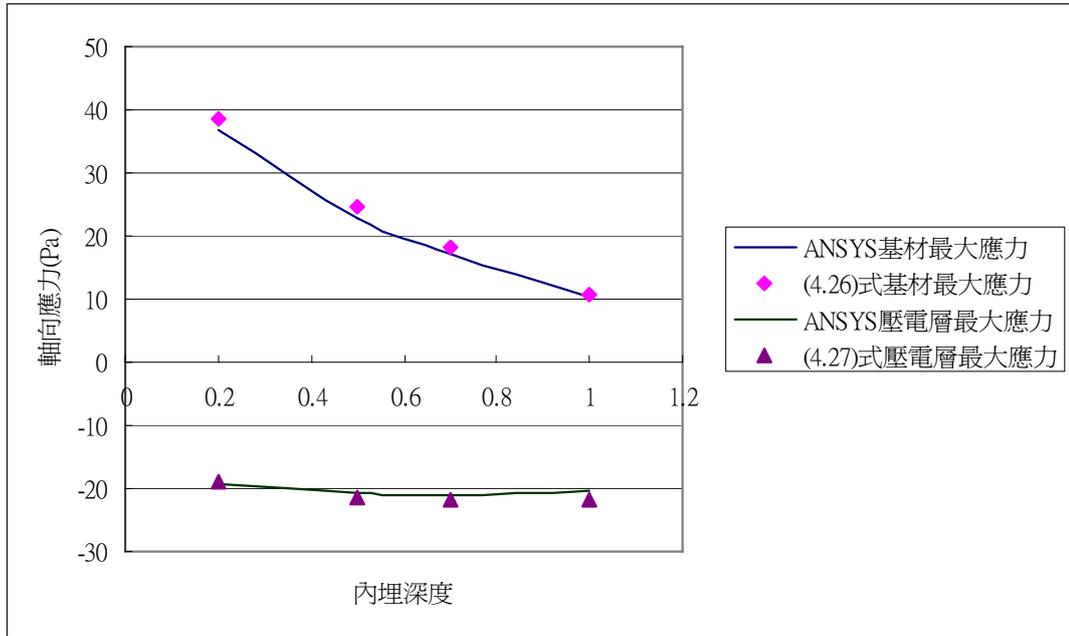


圖 4.13 三層板結構壓電材料不同內埋深度以 ANSYS 解與公式(4.26)式、  
(4.27) 式計算所得上層基材與中間壓電層最大應力之比較

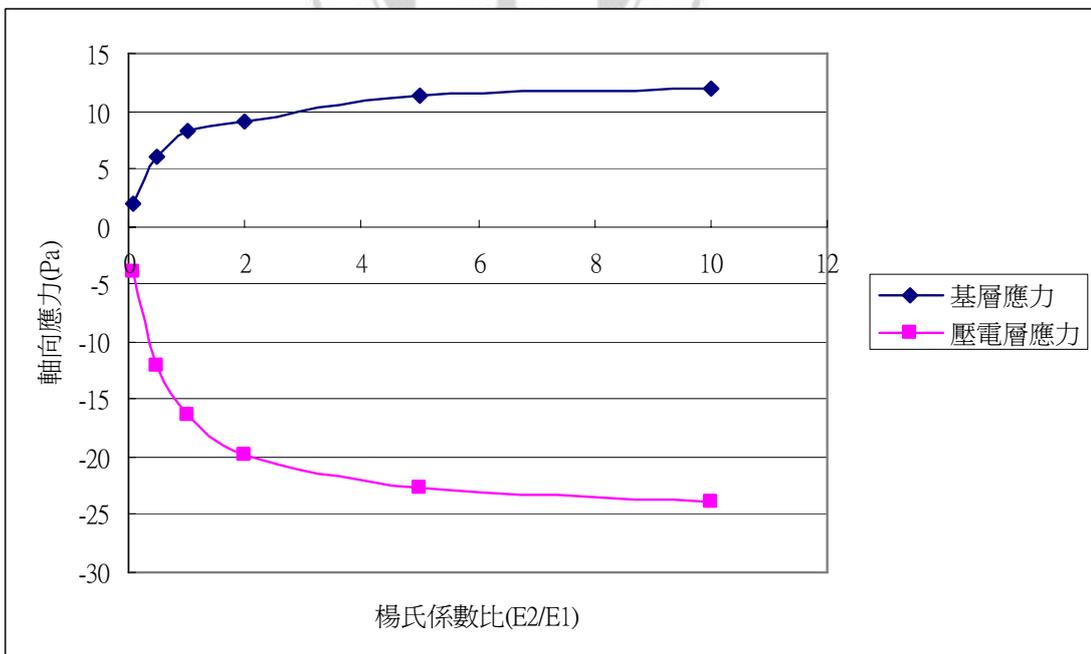


圖 4.14 以公式計算內埋壓電材料於板結構中央改變不同基材楊氏係數之  
應力分佈

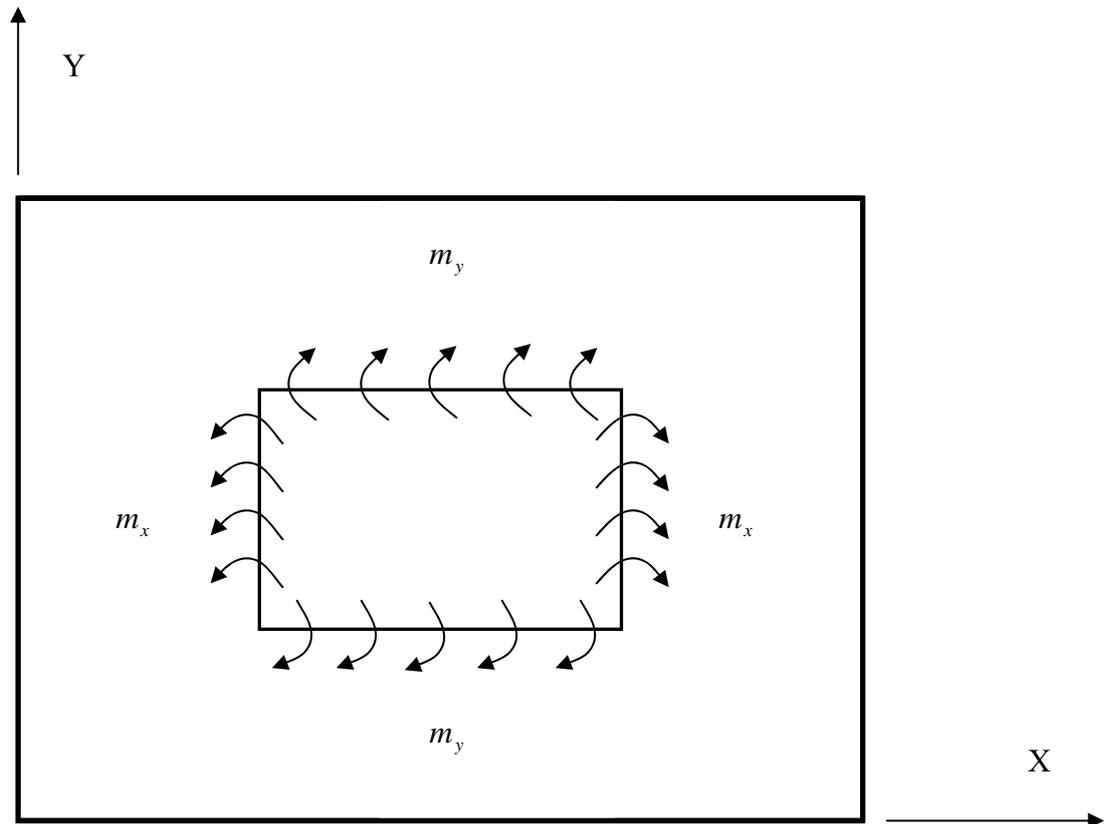
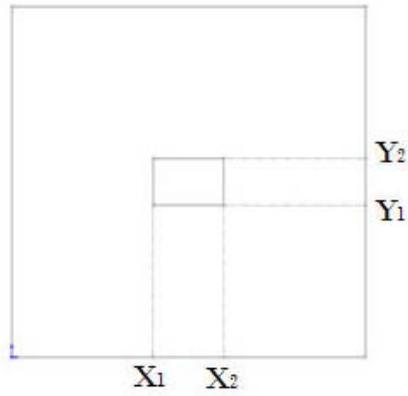
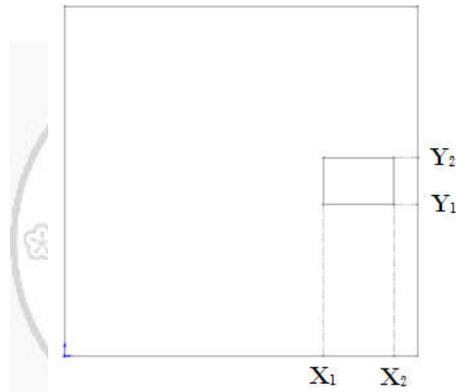


圖 5.1 壓電片於平板之彎矩分佈



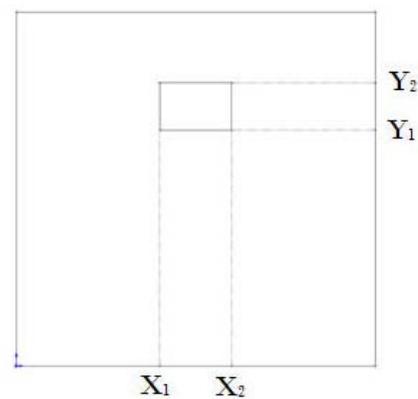
$$x_1 = 0.12m \quad x_2 = 0.18m \quad y_1 = 0.13m \quad y_2 = 0.17m$$

圖 5.2 壓電片置平板中央



$$x_1 = 0.22m \quad x_2 = 0.28m \quad y_1 = 0.13m \quad y_2 = 0.17m$$

圖 5.3 壓電片置平板右側



$$x_1 = 0.12m \quad x_2 = 0.18m \quad y_1 = 0.20m \quad y_2 = 0.24m$$

圖 5.4 壓電片置平板上方

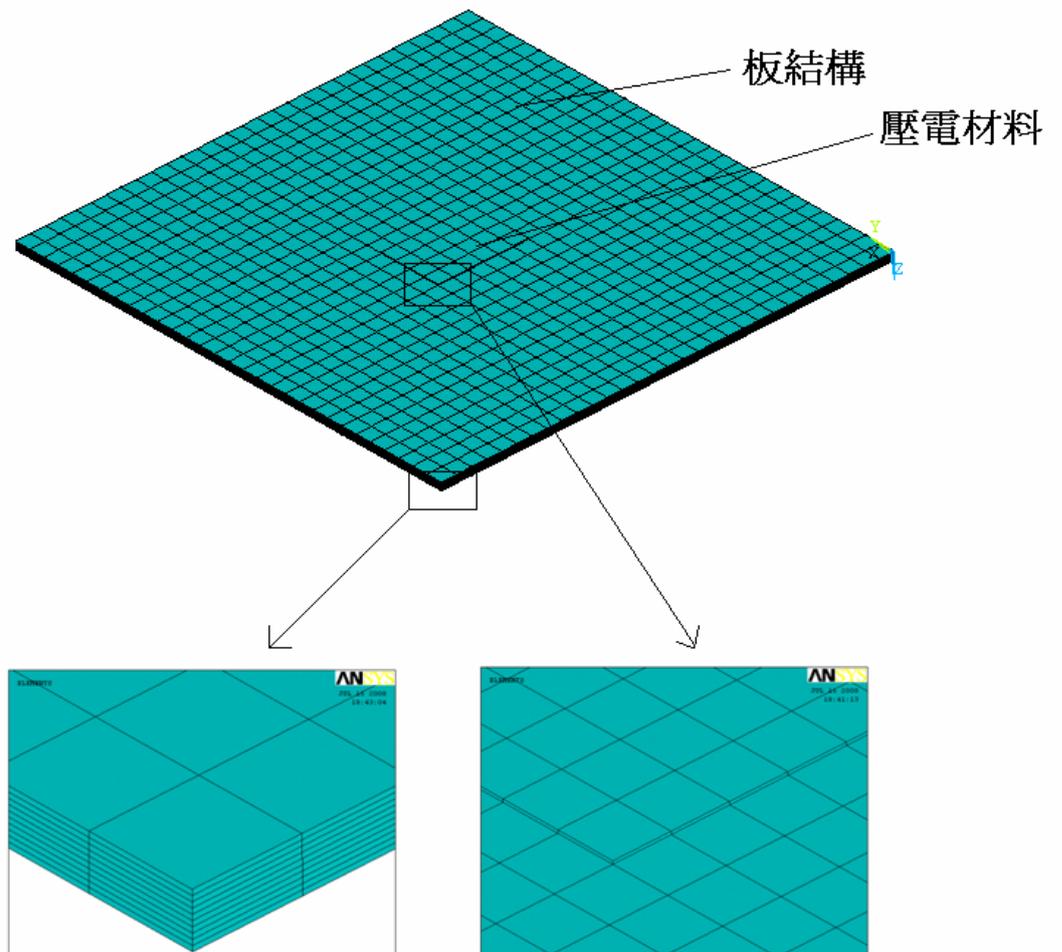


圖 5.5 壓電片貼覆平板中央 ANSYS 之三維有限元素網格

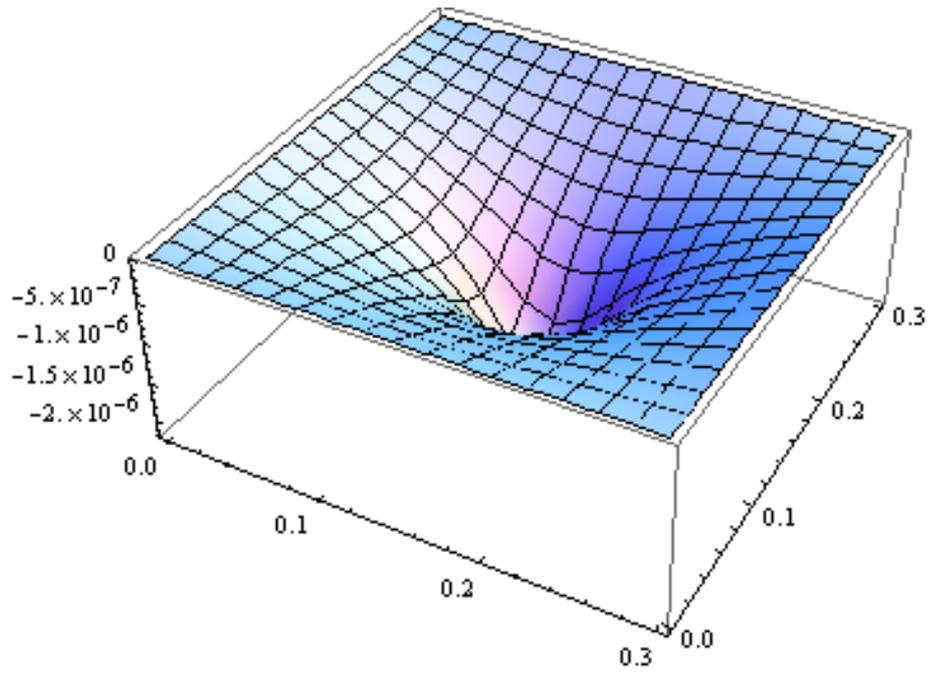


圖 5.6 壓電片貼覆平板中央 (5.11) 式計算所得平板撓曲變形

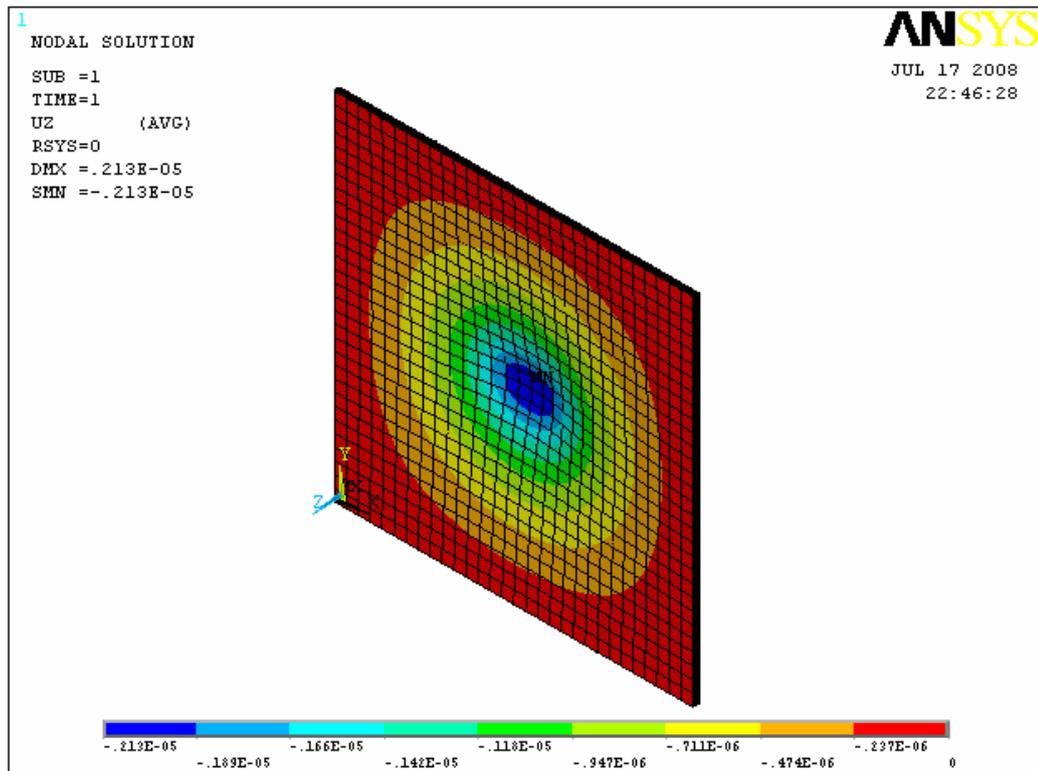


圖 5.7 壓電片貼覆平板中央 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變形

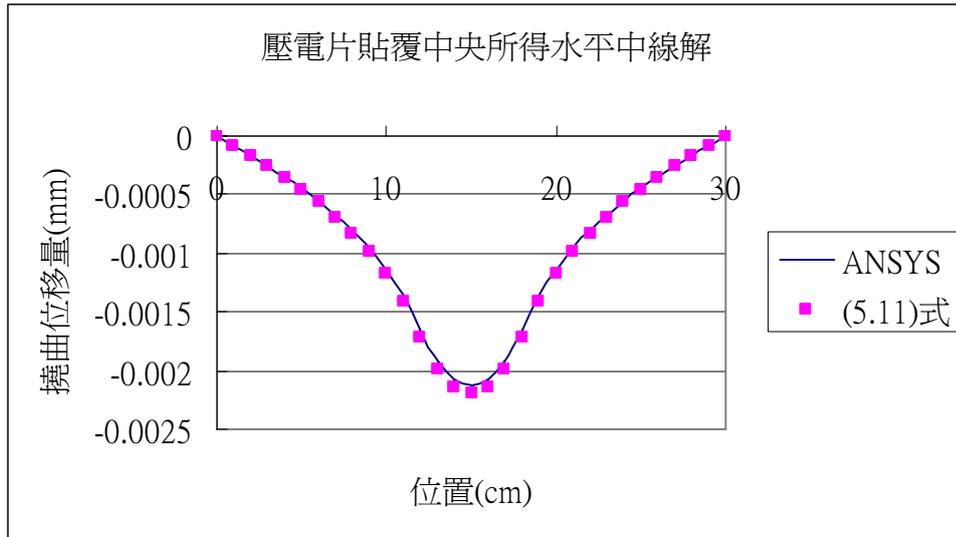


圖 5.8 壓電片貼覆平板中央以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平  
中線撓曲位移

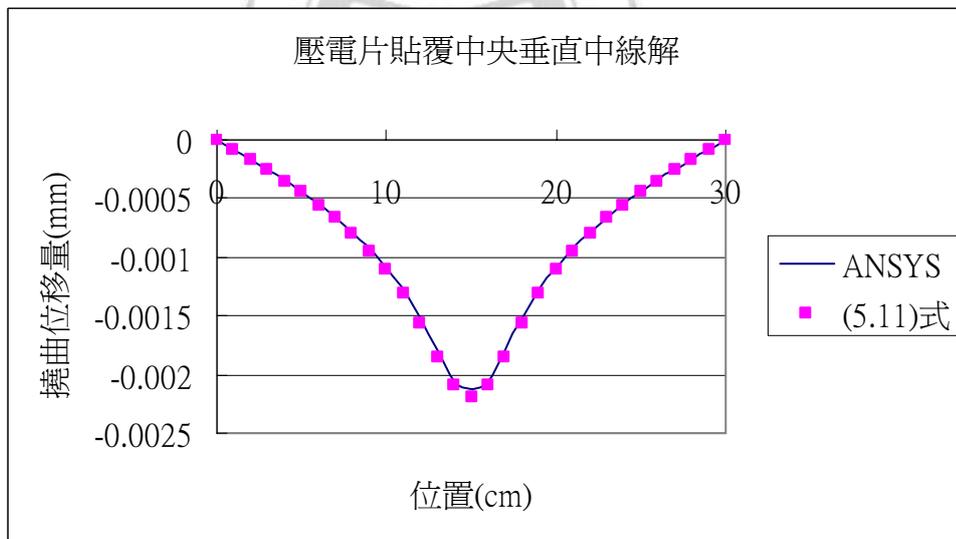


圖 5.9 壓電片貼覆平板中央以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直  
中線撓曲位移

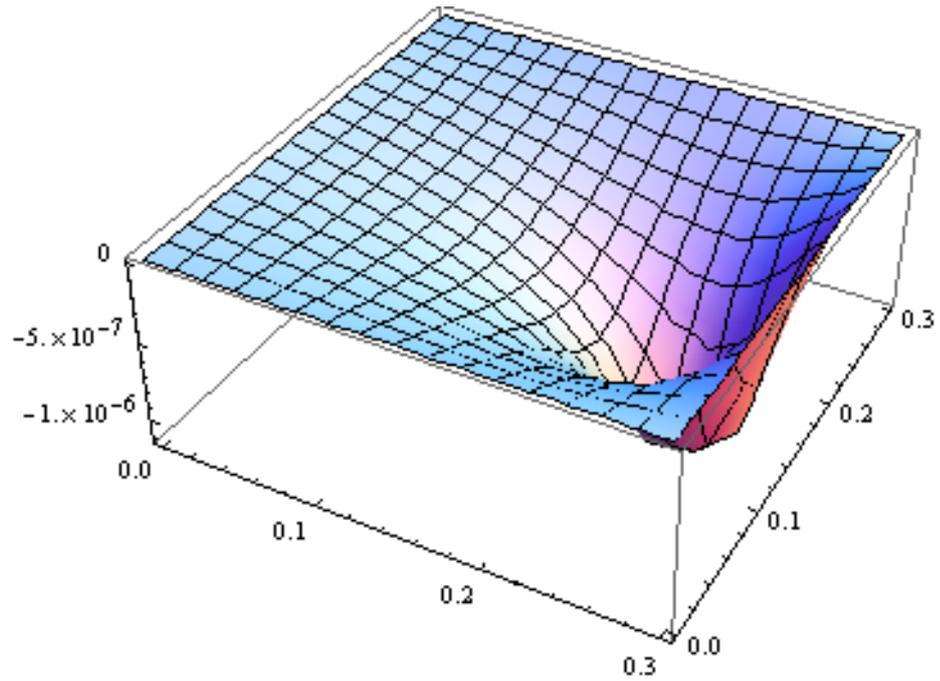


圖 5.10 壓電片貼覆平板右側 (5.11) 式計算所得平板撓曲變形

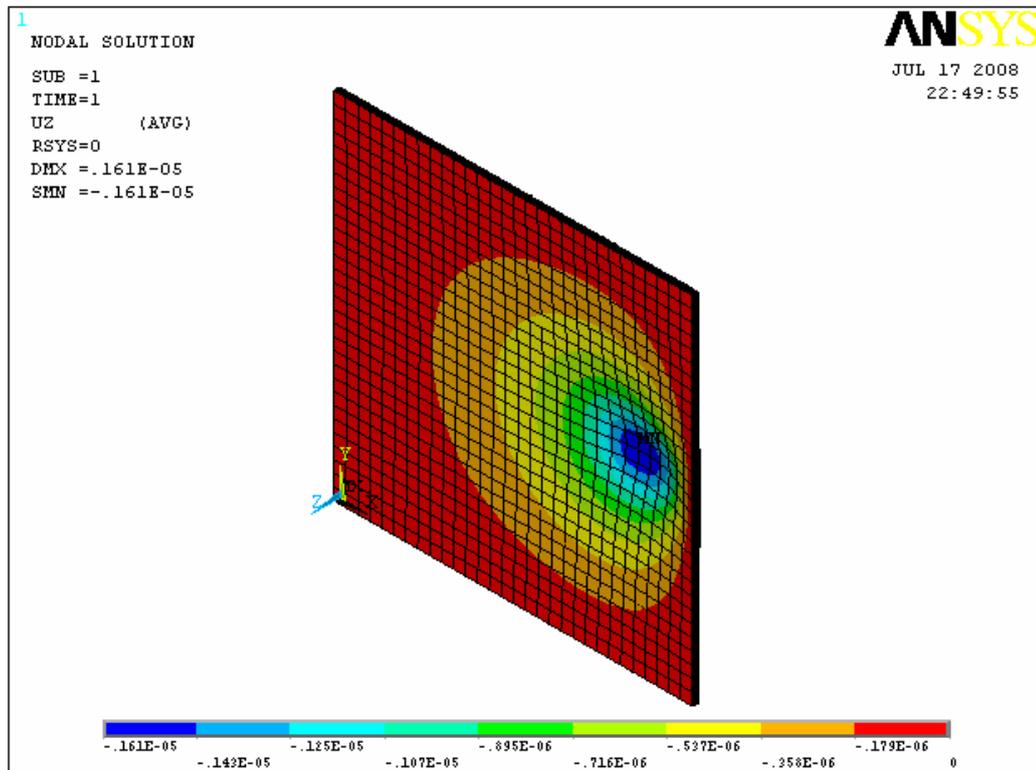


圖 5.11 壓電片貼覆平板右側 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變形

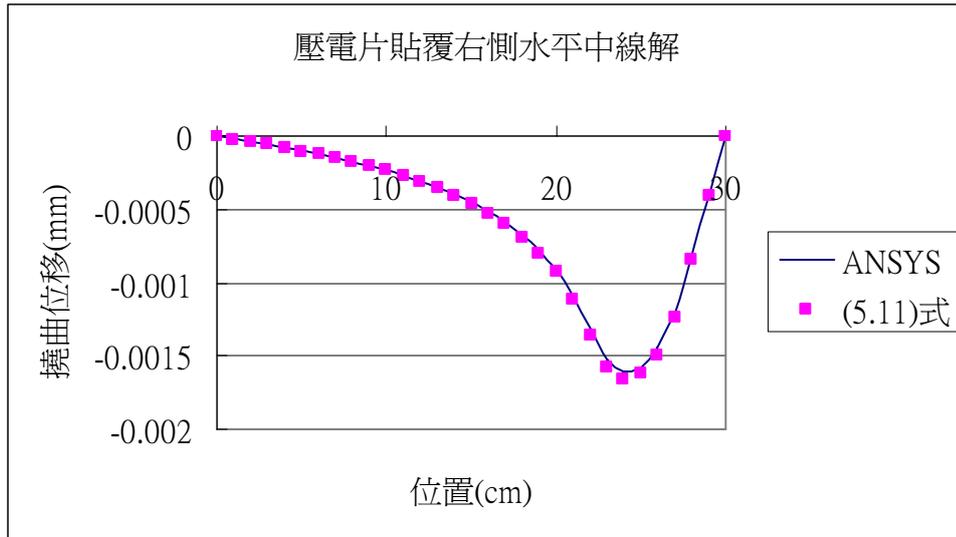


圖 5.12 壓電片貼覆平板右側以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平  
中線撓曲位移

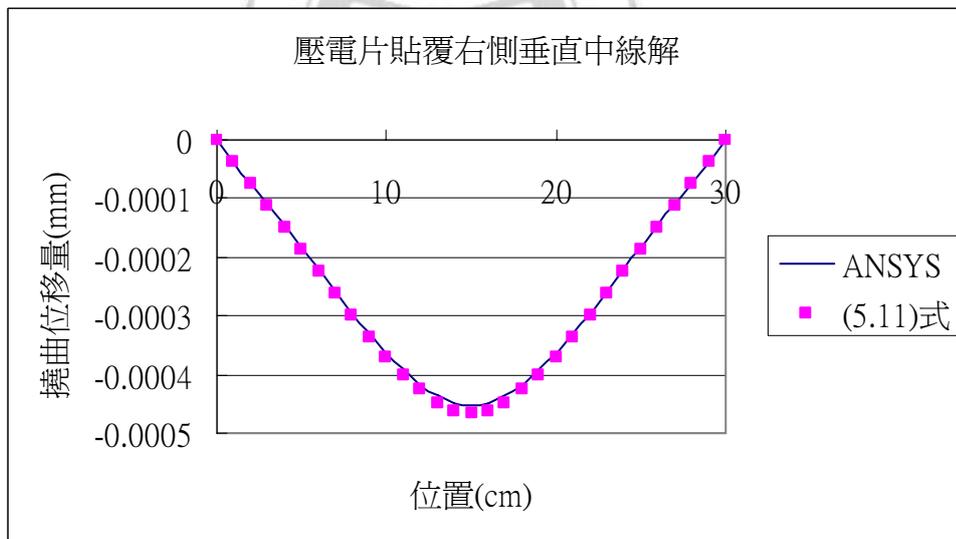


圖 5.13 壓電片貼覆平板右側以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直  
中線撓曲位移

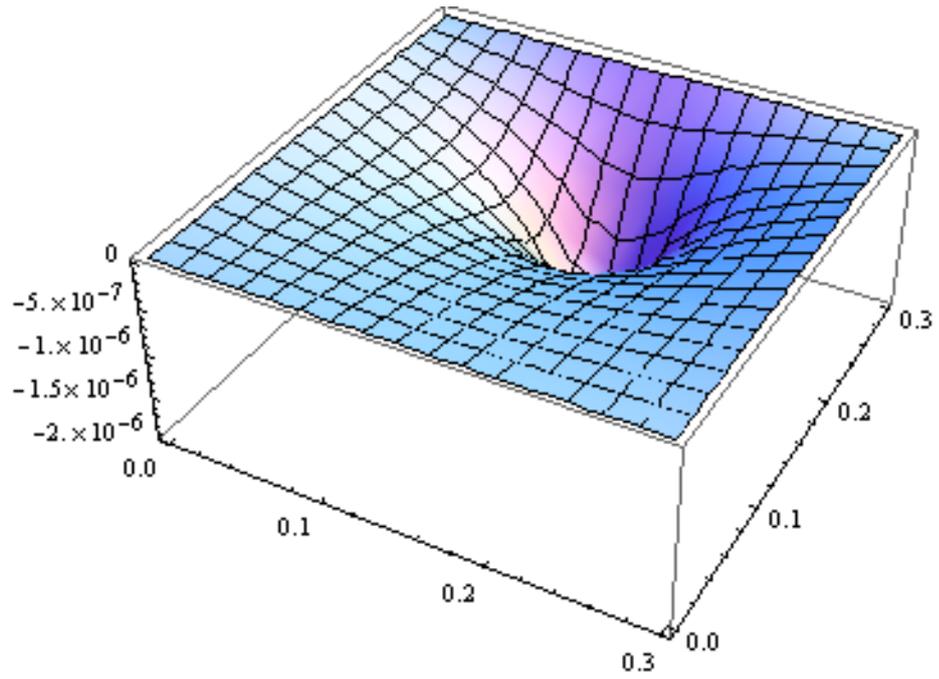


圖 5.14 壓電片貼覆平板上方 (5.13) 式計算所得平板撓曲變形

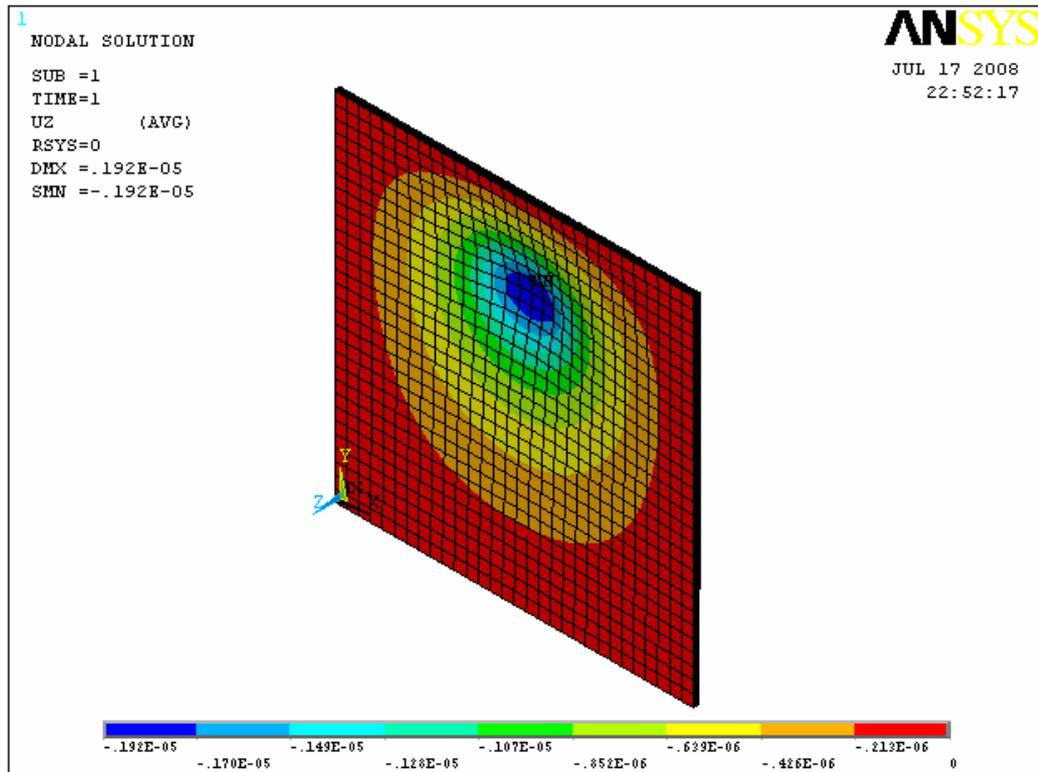


圖 5.15 壓電片貼覆平板上方 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變形

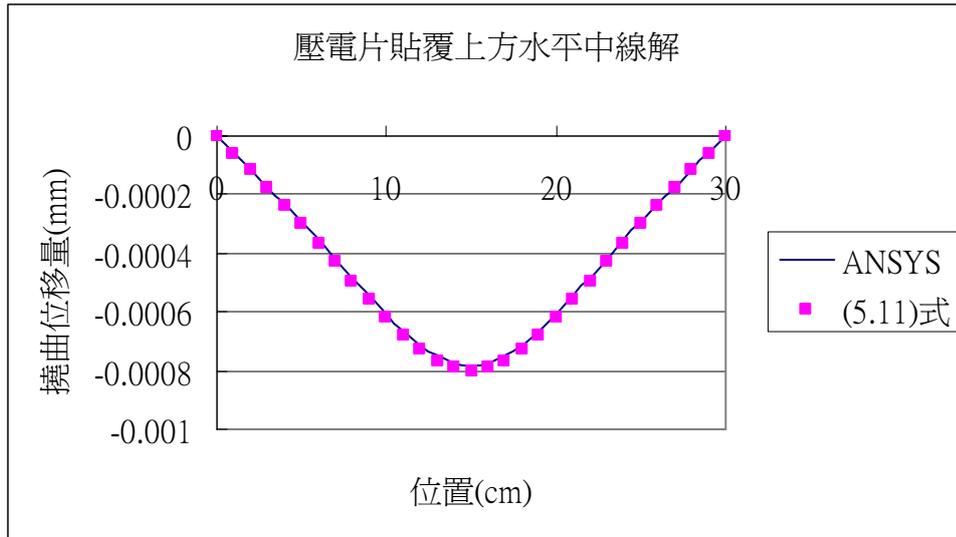


圖 5.16 壓電片貼覆平板上方以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平中線撓曲位移

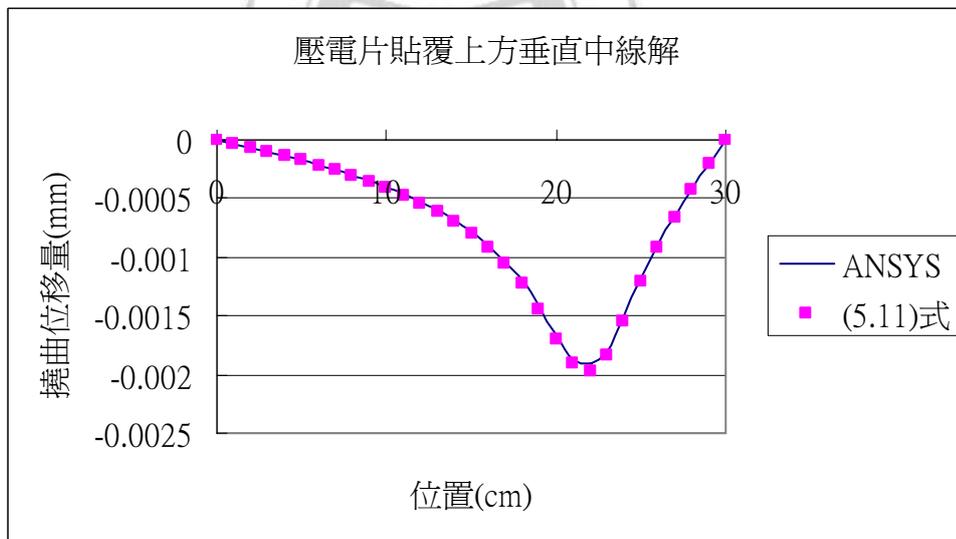


圖 5.17 壓電片貼覆平板上方以 (5.11) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直中線撓曲位移

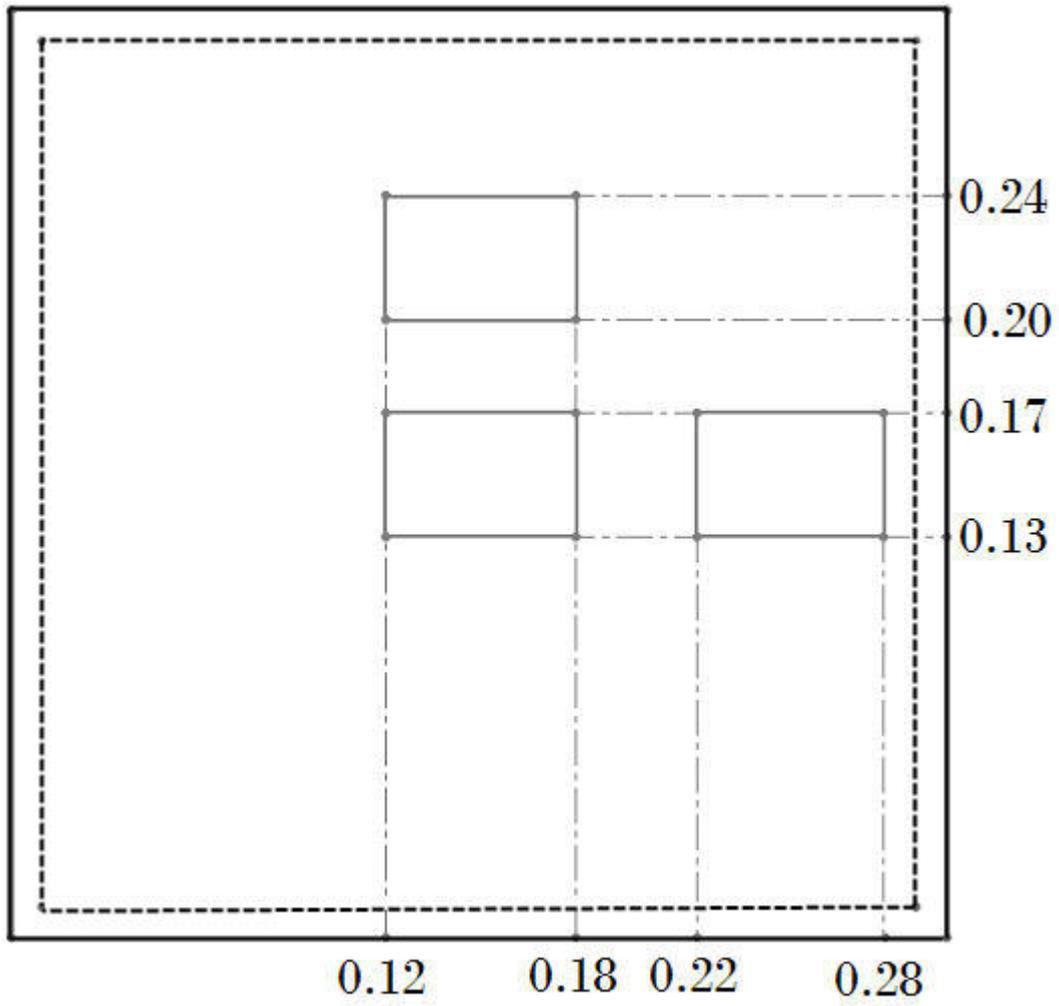
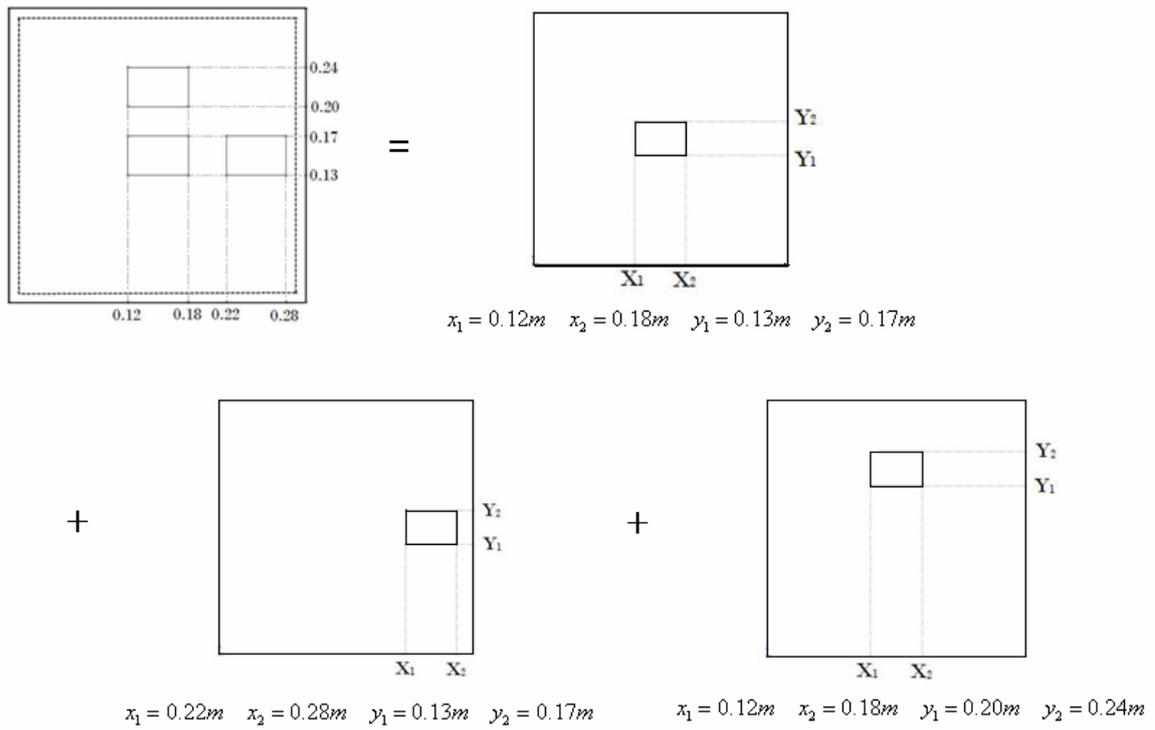


圖 5.18 簡支撐平板中央、上方與右側位置貼覆壓電片



$$w = w_1 + w_2 + w_3$$

圖 5.19 多片貼覆之疊加示意圖

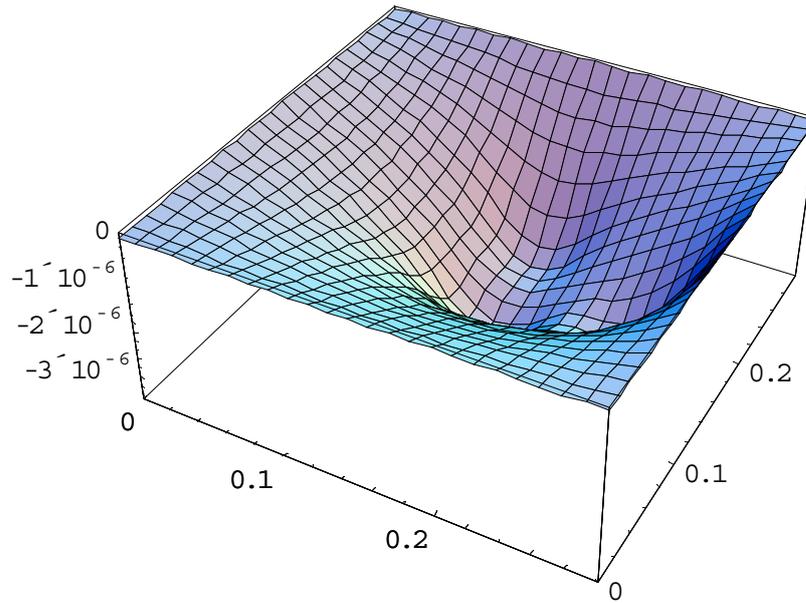


圖 5.20 壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加相同電壓-100V 以  
 (5.12) 式計算所得平板撓曲變形

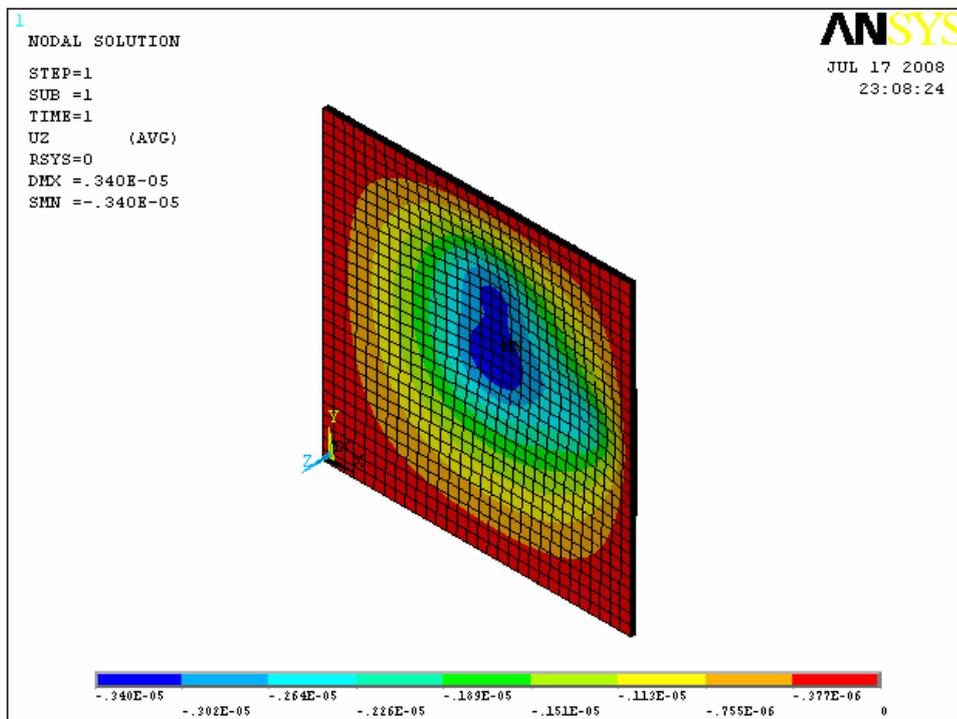


圖 5.21 壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加相同電壓-100V 以  
 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變形

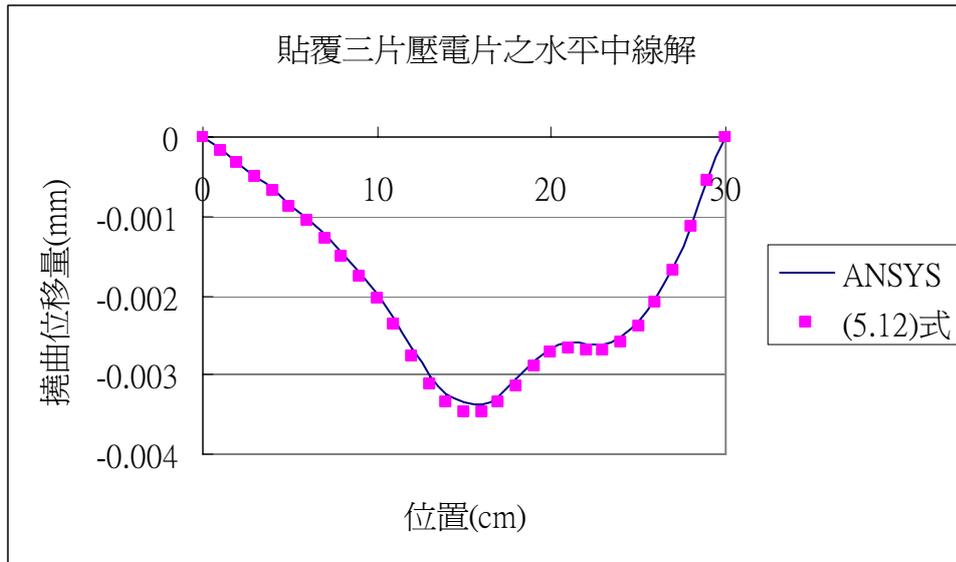


圖 5.22 壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加相同電壓-100V 以

(5.12) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平中線撓曲位移

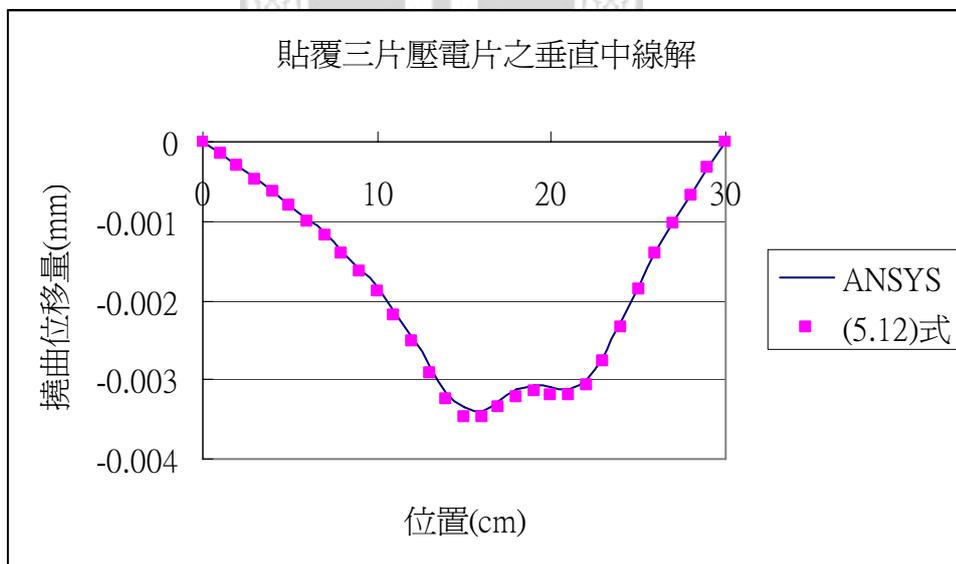


圖 5.23 壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加相同電壓-100V 以

(5.12) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直中線撓曲位移

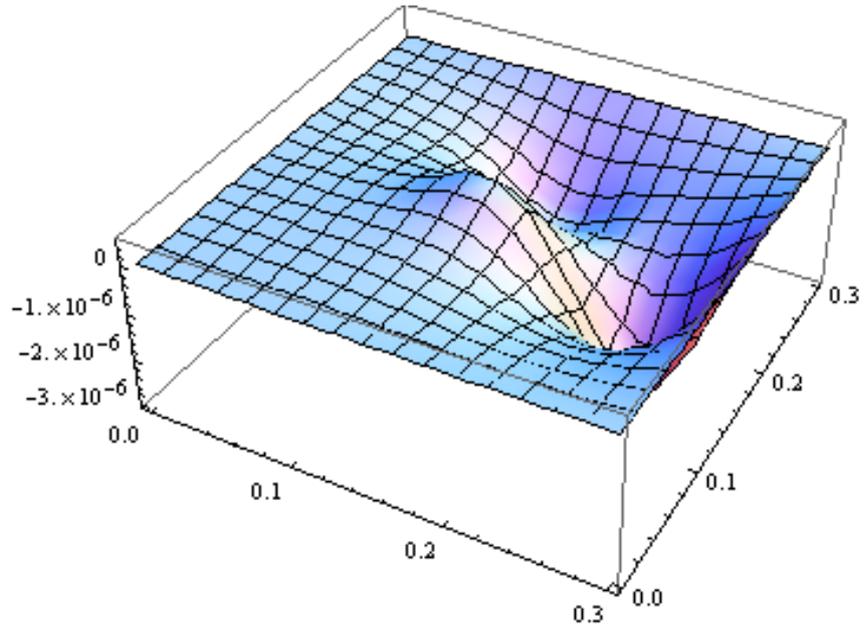


圖 5.24 壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加電壓分別以 100V、-200V 及 -100V 以 (5.12) 式計算所得平板撓曲變形

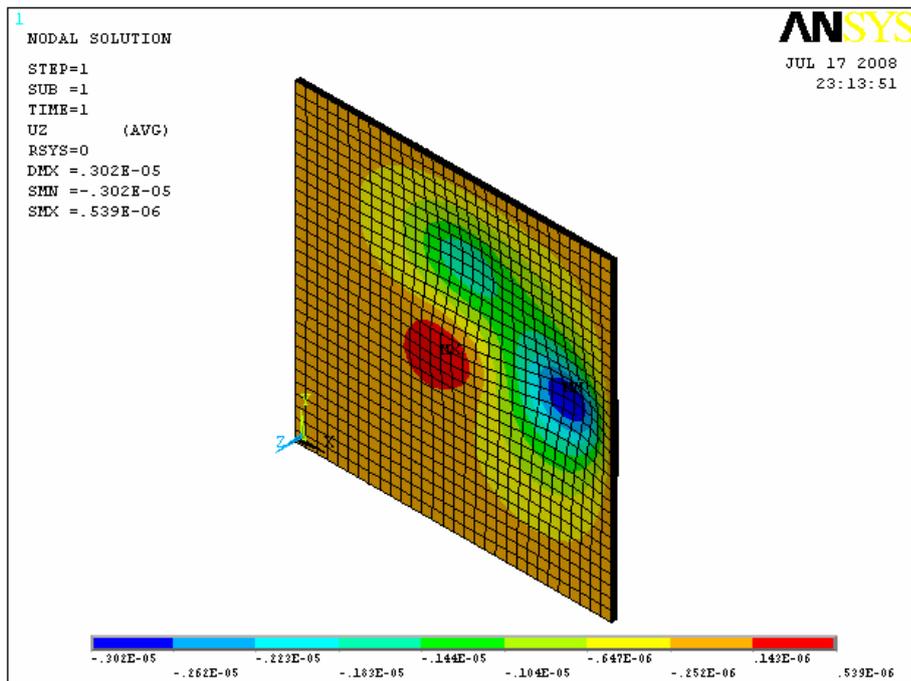


圖 5.25 壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加電壓分別以 100V、-200V 及 -100V 以 ANSYS 三維分析所得平板撓曲變形

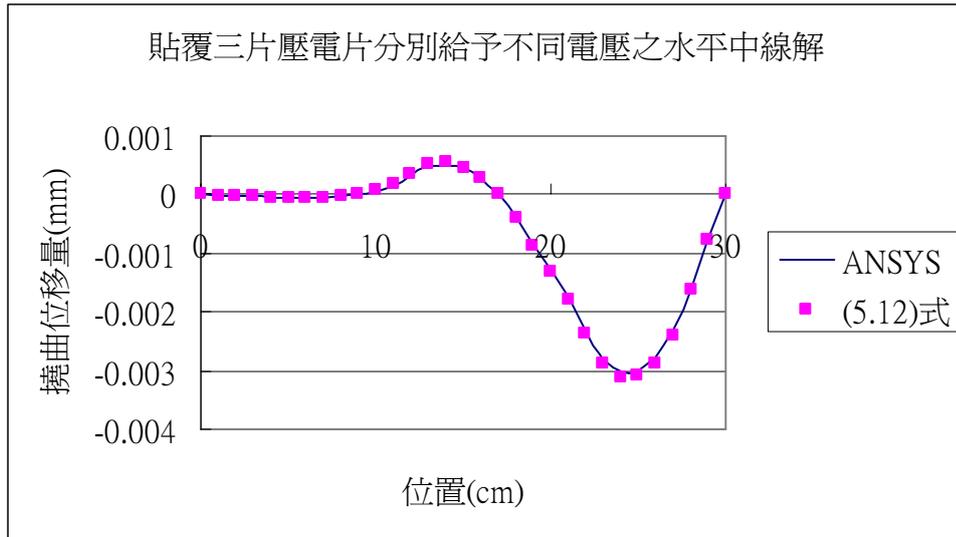


圖 5.26 壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加電壓分別以 100V、-200V 及 -100V 以 (5.12) 式與 ANSYS 三維分析所得之水平中線撓曲位移

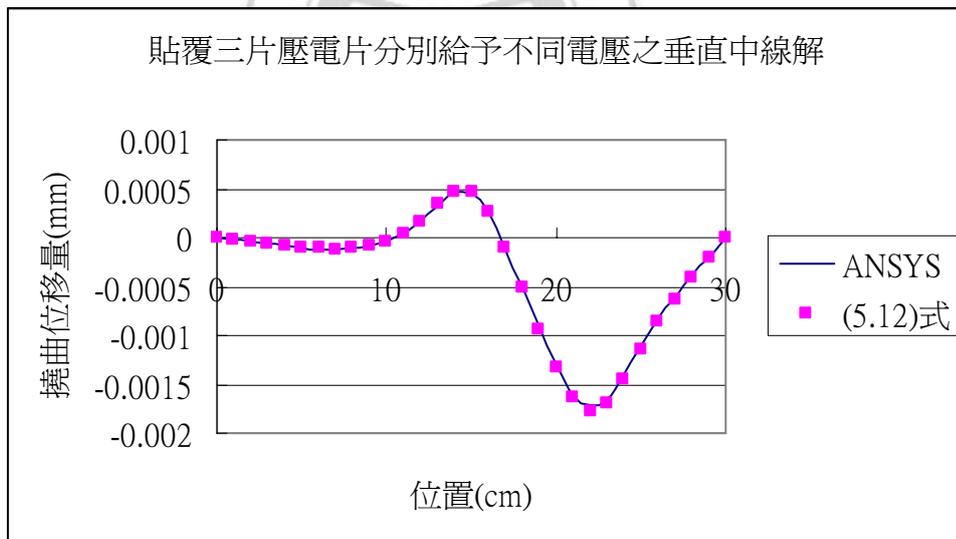


圖 5.27 壓電片貼覆平板中央、右側、上方三位置施加電壓分別以 100V、-200V 及 -100V 以 (5.12) 式與 ANSYS 三維分析所得之垂直中線撓曲位移

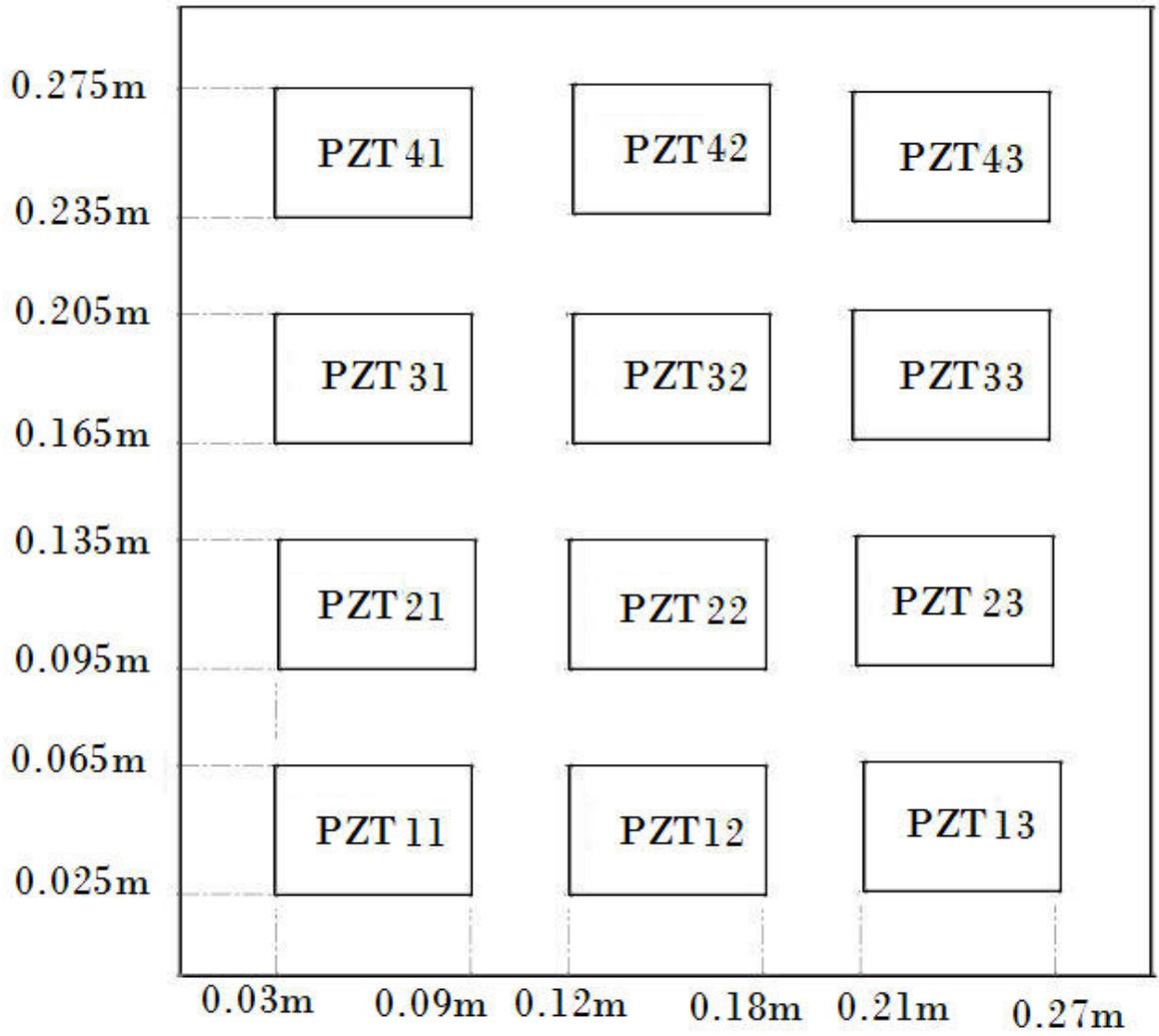


圖 5.28 十二片壓電片陣列貼覆平板

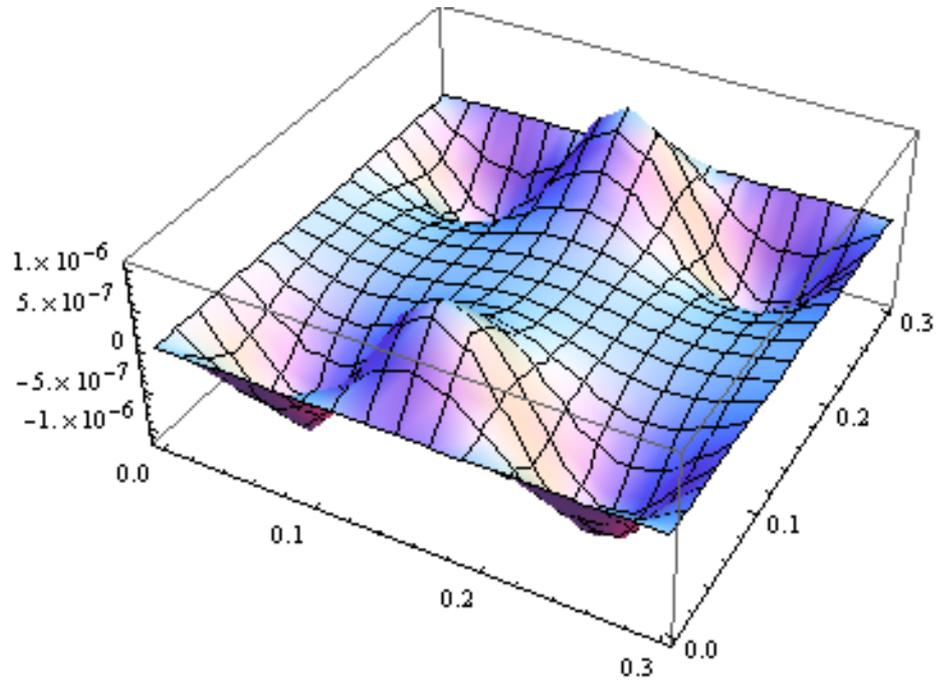


圖 5.29 例題 1 壓電片陣列式貼覆對平板所產生之撓曲變形

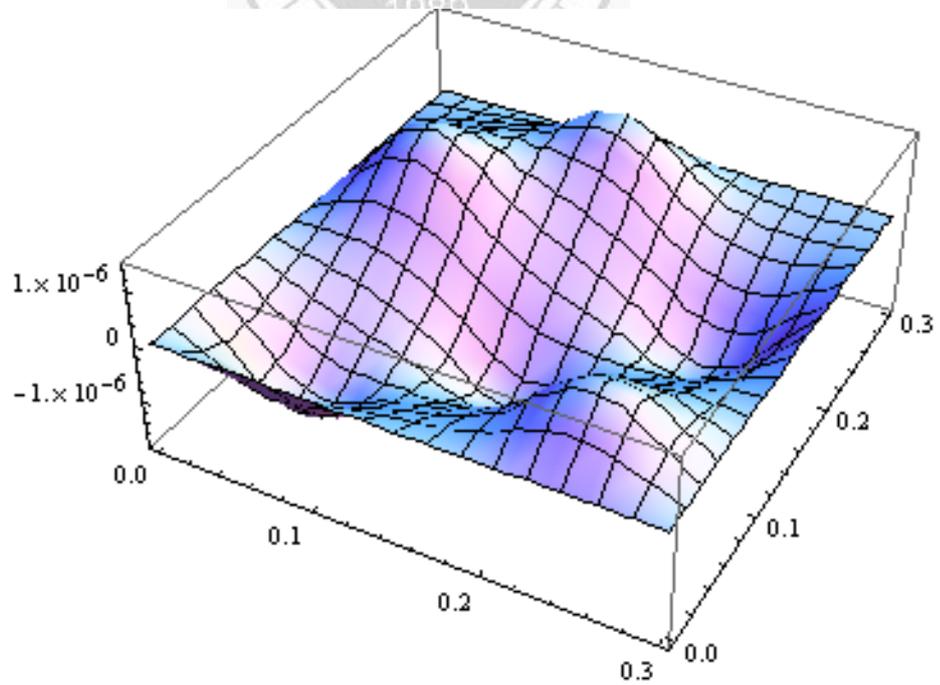


圖 5.30 例題 2 壓電片陣列式貼覆對平板所產生之撓曲變形

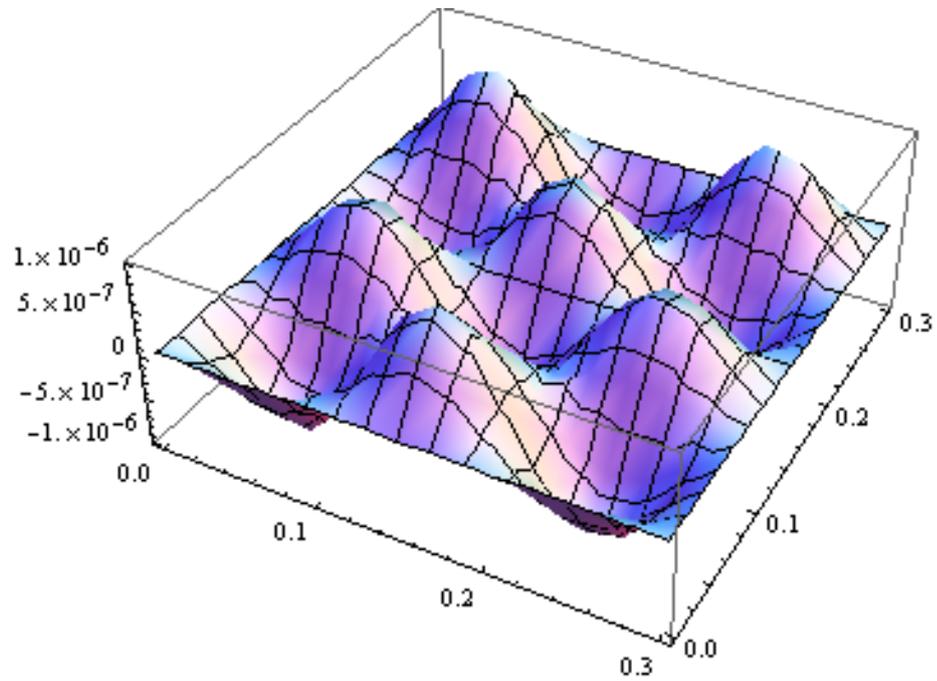


圖 5.31 例題 3 壓電片陣列式貼覆對平板所產生之撓曲變形



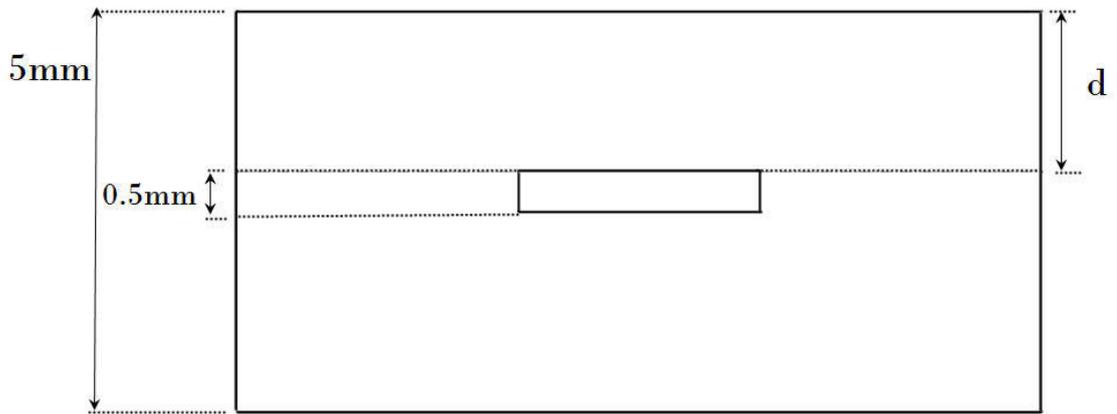


圖 6.1 壓電片內埋深度計算方式

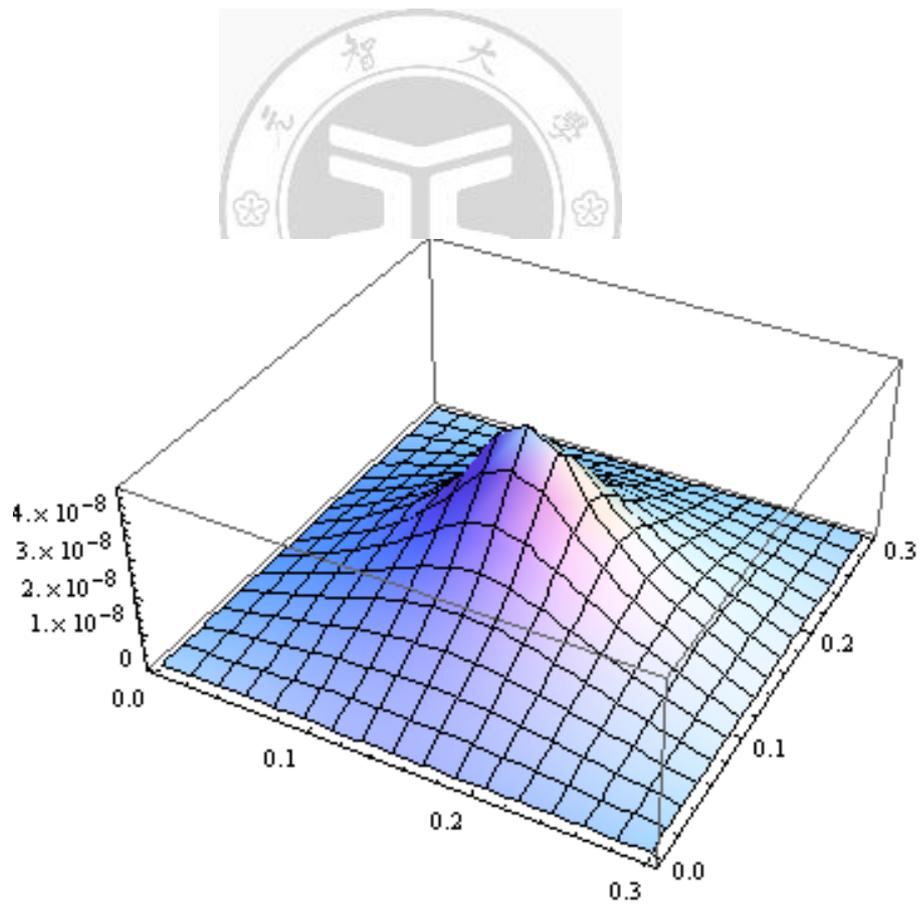


圖 6.2 壓電片內埋深度 2mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形

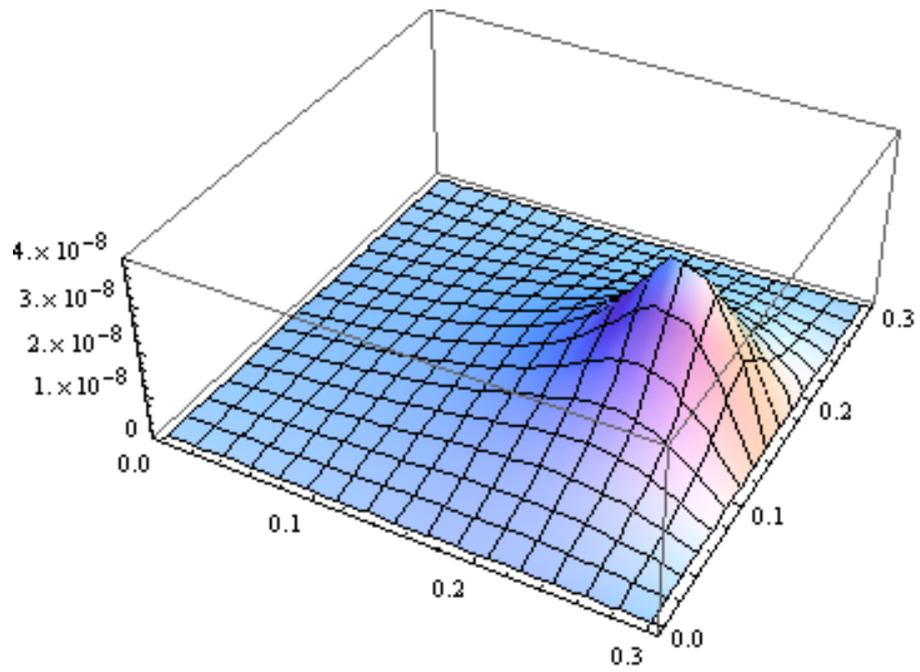


圖 6.3 壓電片內埋深度 2mm 於平板右側位置對平板所產生之撓曲變形

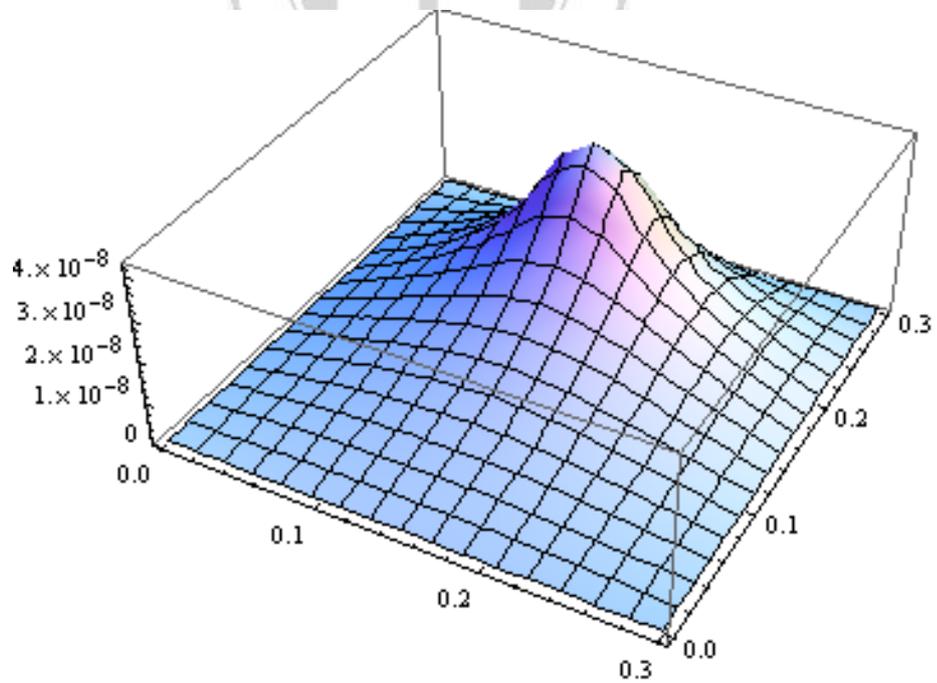


圖 6.4 壓電片內埋深度 2mm 於平板上方位置對平板所產生之撓曲變形

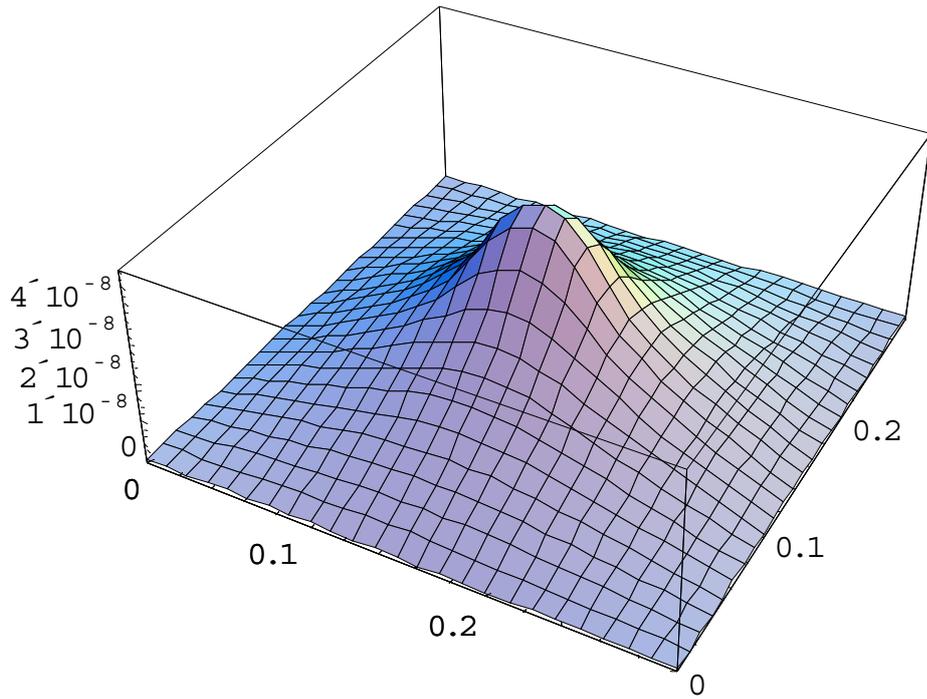


圖 6.5 壓電片內埋深度 2mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形

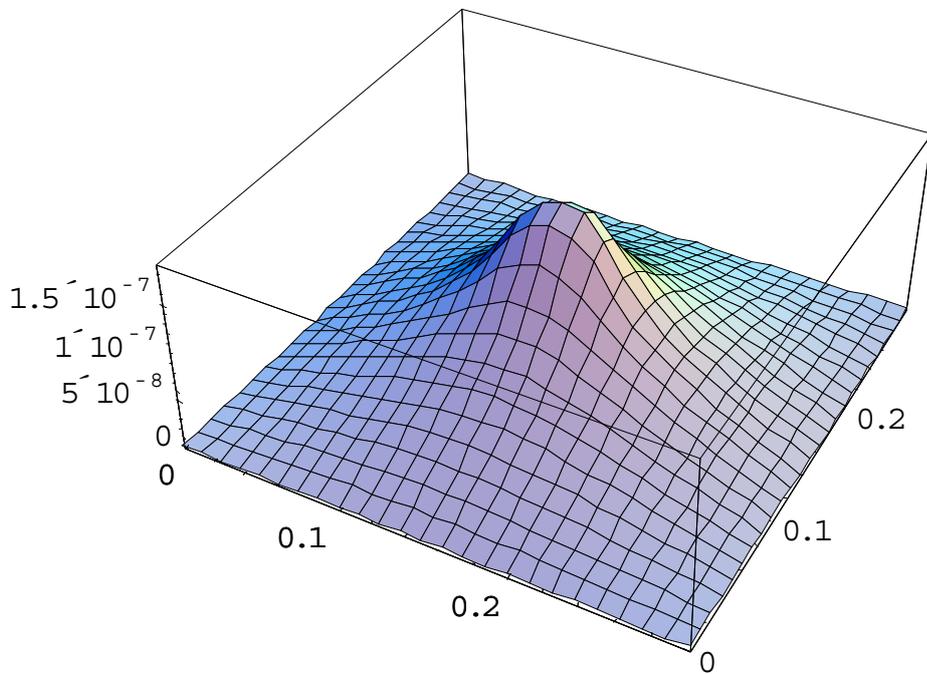


圖 6.6 壓電片內埋深度 1.5mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形

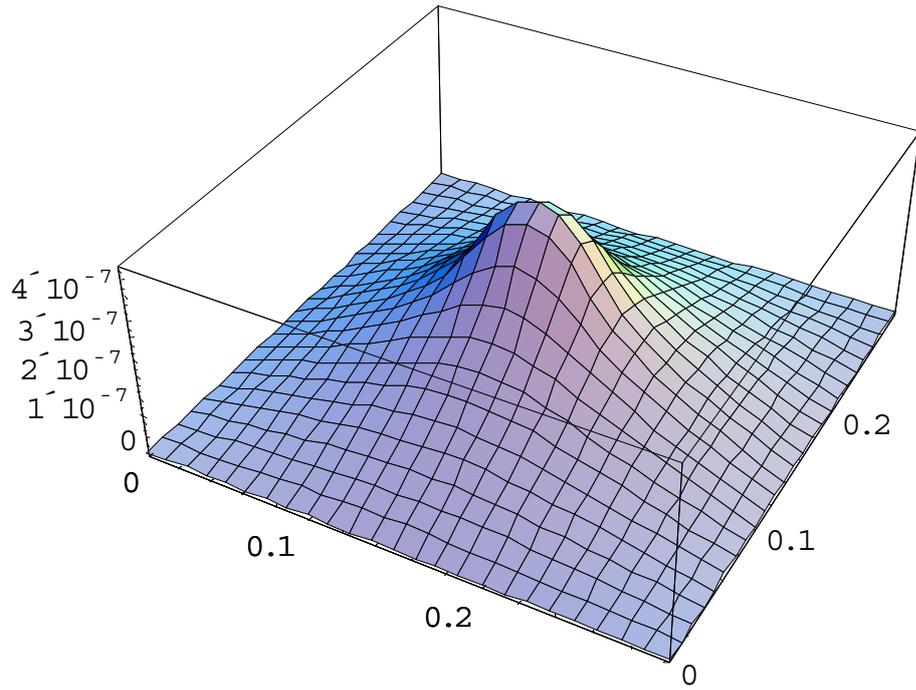


圖 6.7 壓電片內埋深度 1mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形

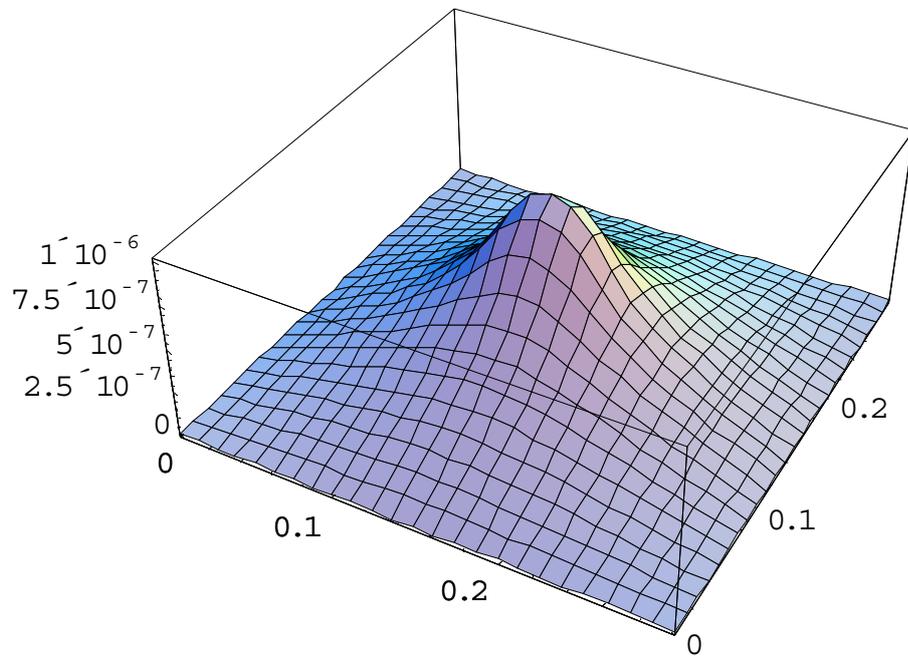


圖 6.8 壓電片內埋深度 0.5mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形

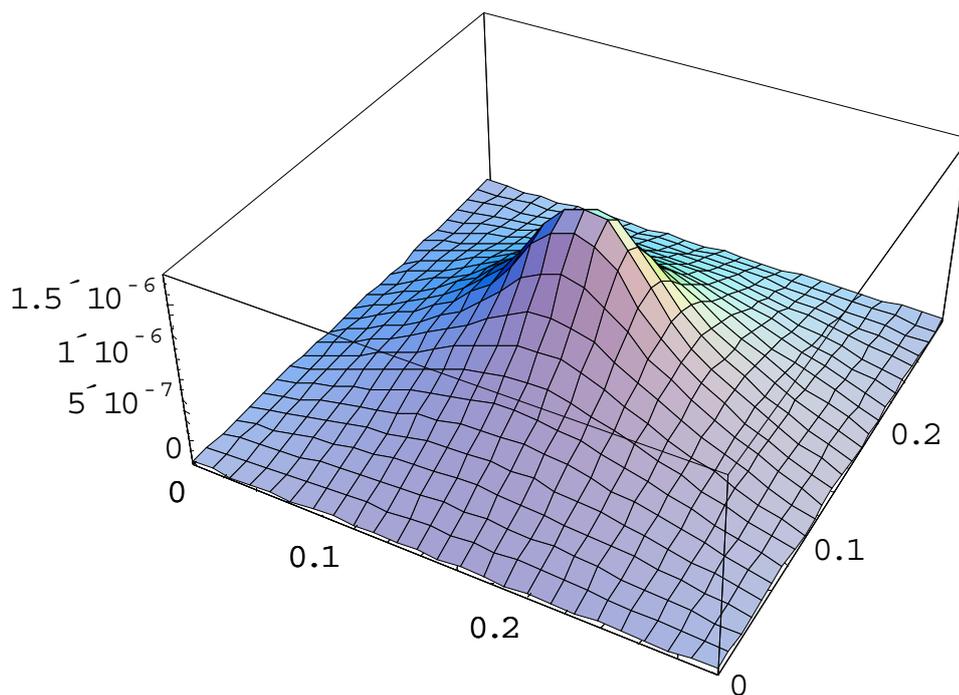


圖 6.9 壓電片內埋深度 0.1mm 於平板中央位置對平板所產生之撓曲變形

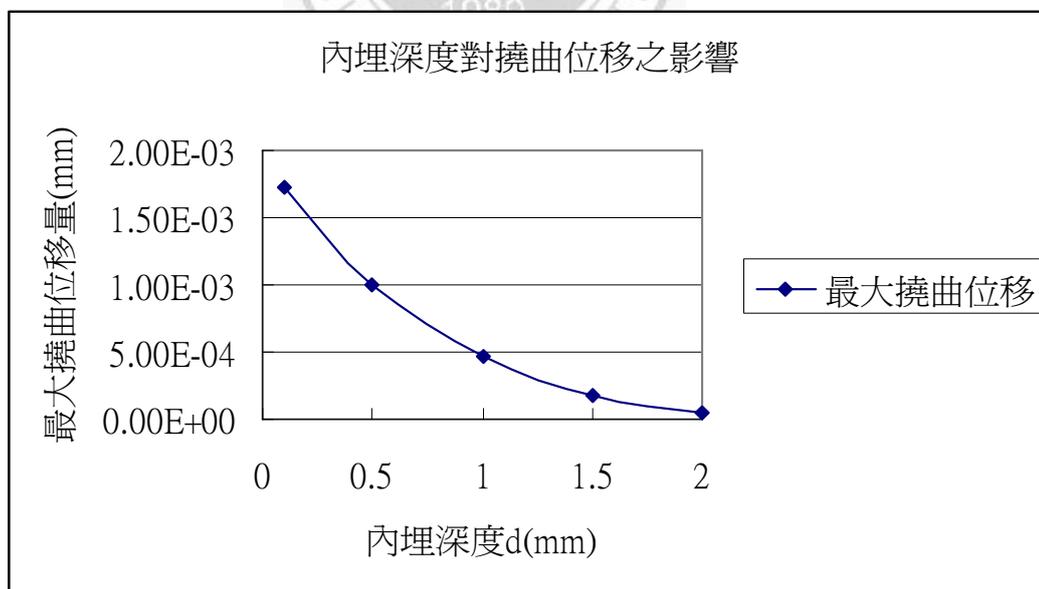


圖 6.10 平板最大撓曲位移與壓電片內埋深度關係曲線

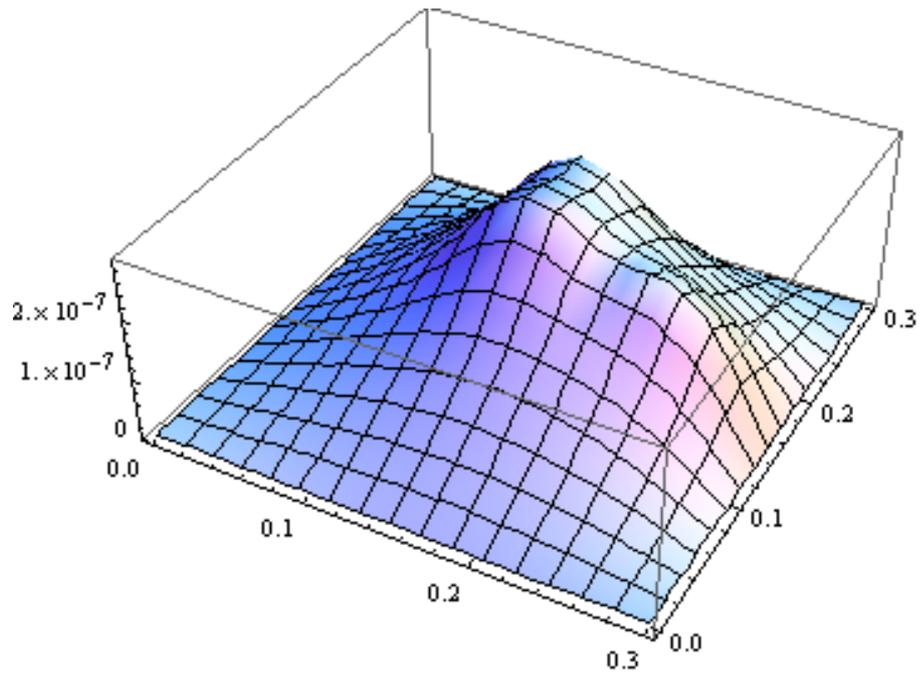


圖 6.11 壓電片內埋深度 1.5mm 於平板中央、右側、上方三位置施加相同

電壓-100V 對平板所產生之撓曲變形

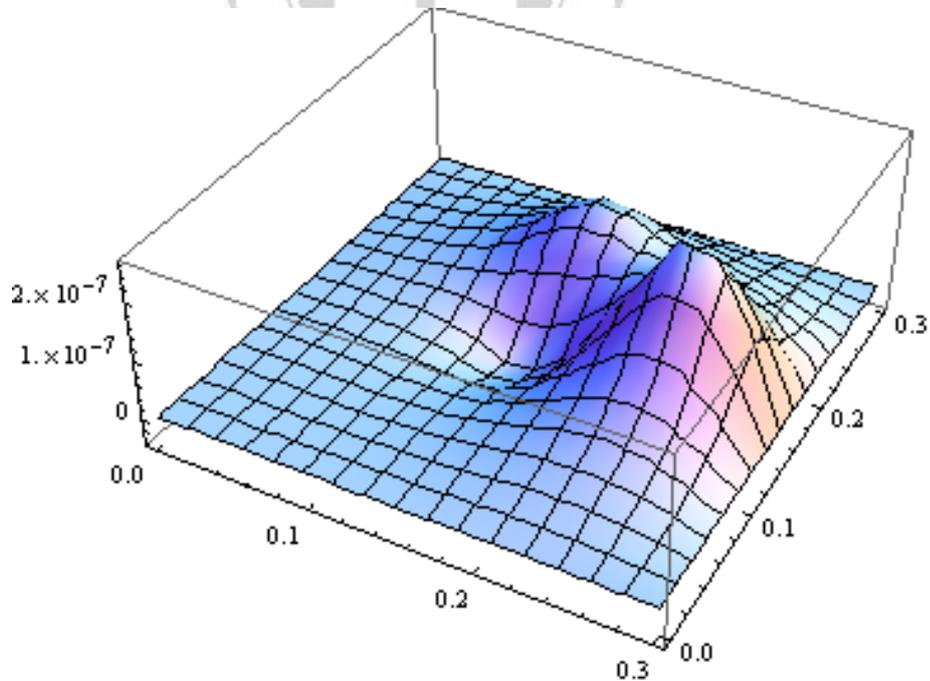


圖 6.12 壓電片內埋深度 1.5mm 於平板中央、右側、上方三位置施加電壓

分別為 100V、-200V 和-100V 對平板所產生之撓曲變形

## 簡 歷

姓名：葉天嘯

籍貫：台灣省台南縣

出生日期：民國 70 年 11 月 16 日

學歷：台南縣關廟鄉關廟國小

台南縣仁德鄉城光中學

台灣省立台南第一高級中學

私立淡江中學機械與機電工程學系

私立元智大學機械工程研究所碩士

通訊地址：台北市南京東路三段 303 巷 8 弄 6 號 3 樓

電話：(02) 2952-8249

手機：0937-916555