排列組合

壹 歷史與生活

貳 排列組合

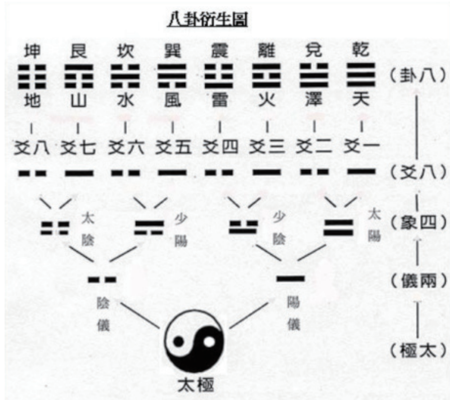
一 重複排列

二 直線全取排列

三 有相同物的排列

四 組合與排列：n 人取 k 人的組合與排列

壹 歷史與生活



在中國，周易繫辭上說：「易有太極，是生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦」。陰陽八卦以符號邏輯排列組合的科學面貌，在中國的歷史上流傳了幾千年，影響了黃道曆法、中醫學理論、占卜術等早與人們的生活息息相關。「易」是變化的意思，「太極」指萬物的本源，相傳伏羲氏首畫一長線「—」為陽爻，次畫二短線「－－」為陰爻，象徵陰陽二氣，是為「兩儀」。若每次取 2 個爻，有 $2^2=4$ 種不同的排列，即為「四象」；若每次取 3 個爻為一卦，則形成「八卦」；而「周易」進一步取兩個八卦上下組合構造出「六十四卦」。

北宋著名科學家沈括（1031－1095）的《夢溪筆談》中，考慮過在 19×19 個格點的圍棋棋盤上所有可能的不同布局的總數，他利用棋盤上每一個格點都有黑子、白子、空位三種可能出現的狀態，應用排列組合知識計算出圍棋不同局面總數是 3^{361}。

至清代，陳厚耀（1648－1722），受西方數學傳入中國，其中許多關於排列組合計算內容的影響，撰寫了〈錯綜法義〉一文，以系統化的方式通過具體的例題，來說明各種類型的排列組合問題的計算方法。例如，他舉例「串名」問題來論述「無重複排列」問題：

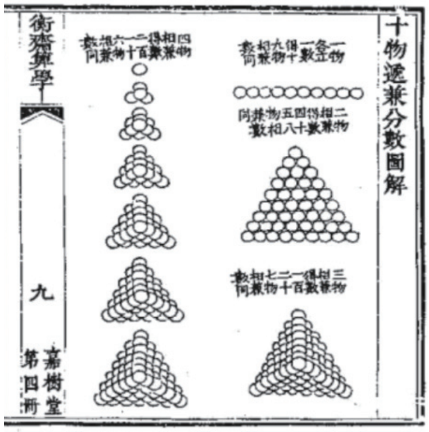
『今如合夥當差，有張李王三家串姓為名，當排出串名若干？』

『又如趙錢孫李周吳鄭王八姓，串名當差，其串名只三字，當排出串名若干？』

而清代，汪萊（1768－1813）在著作《衡齋算學四》中稱組合理論為「遞兼數理」，經過自己的獨立刻苦鑽研，得出

$$C^n_m=\frac{n\,(n-1)\cdots(n-m+1)}{m\,(m-1)\cdots 2\cdot 1}\text{、}C^n_m=C^n_{n-m}$$

等重要的組合關係式，他論證了組合數與傳統數學中的三角堆垛的關係，也與巴斯卡的工作有異曲同工之妙，為中國數學史上第一次以專題的形式探討組合的某些性質和計算公式。



汪萊的「十物遞兼分數圖解」，出自《衡齋算學》第四冊。可以清楚看出汪萊是透過三角垛來計算組合的。

在印度，排列組合問題的出現也是相當早的，據說在西元前 600 年左右，*Susrute* 的醫學著作中就有這樣的問題：甜、酸、鹹、辣、苦、澀 6 種味道可調配出多少種不同的味道？其答案是：單味 6 種，雙味 15 種，三味 20 種，四味 15 種，五味 6 種，六味 1 種。

另外，在西元前 200 年，*Pingala* 亦提到了從 n 個字母中，依次取 1，2，...，n 個字母，各有多少種方法的問題。據考證，印度人在六世紀時已經掌握了計算排列組合的一些基本公式。例如，大約在六世紀時，*Varahamihira* 的著作中曾提出：16 種原料每次取 4 種，共有 1820 種取法。其次又提到一位有經驗的建築師為國王建造一座雄偉的宮殿，這座宮殿有 8 個門，每次開一個門或每次開兩個門或每次開三個門，⋯ 等，這樣總共有多少種不同開門的組合方法呢？其答案是開 1 到 8 個門的組合數分別為 8，28，56，70，56，28，8，1，而且總共有 255 種組合方法。

隨著歐洲的文藝復興，排列組合的研究才開始在歐洲有了較快的發展，1494 年第一本涉及排列組合問題的印刷版著作出版，作者是義大利數學家帕奇歐里。而早期的機率理論的發展主要是討論古典機率問題，而古典機率的計算幾乎就是排列組合的具體應用，同時也促進了排列組合的進一步研究。最早進行這方面研究工作的首推義大利數學家塔塔利亞與卡當諾。之後，法國數學家巴斯卡與費馬，以及荷蘭數學家惠更斯等人都曾對排列組合作過研究。

西元 1713 年瑞士數學家雅各布．伯努利（*Jacob Bernoulli*，1654－1705），在其出版的著作《猜度術》中有系統的論述了排列組合，從而形成了近代的排列組合理論。上圖為 1994 年第 22 屆國際數學家大會在瑞士的蘇黎世召開，瑞士郵政發行的雅各布．伯努利的紀念郵票，郵票的圖案是雅各布．伯努利的頭像，及以他名字命名的大數定律及大數定律的幾何示意圖。

參考資料：

⑴ 歐陽維誠，《周易的數學原理》，湖北教育出版社。
⑵ *M.Kline*，《數學史－數學思想發展》，九章出版社。
⑶ 劉雲章，《數學溯源－數學名詞的故事》。
⑷ 李迪，《清代著名數學家汪萊及其數學成就－紀念汪萊逝世 180 周年》
⑸ 朱家生、吳裕賓，《陳厚耀〈錯綜法義〉研究》
http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol5no1b.htm
⑹ 《高中數學教學手冊》龍騰出版社

貳 排列組合

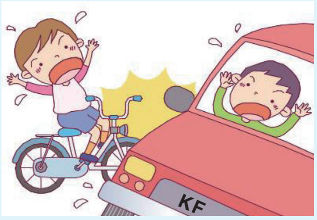
於前一節的單元學習中，已經學會了樹狀圖、加法原理、乘法原理及取捨原理；我們在日常生活中常會遇到一些有關排列的問題，利用以下的活動，複習乘法原理。

1 重複排列

以下我們藉由活動來認識重複排列。

活動 1 警方至多須清查多少輛汽車

1. 一輛汽車在公路上肇事後加速逃逸，據目擊者柯南指稱，只記得車牌號碼為 KFC－□□78，其中□為 0 到 9 的數字。聰明的你能否告訴警方至多只須清查多少輛就可以查出肇事汽車？



2. 承第 1 題，如果目擊者柯南，只記得車牌號碼為 D□□－5678，其中□為 A 到 Z 的英文字母。則警方至多須清查多少輛汽車？

活動一第 1 題中，0 到 9 的 10 個數字可以在兩個空格□□中重複出現的排列，以及第 2 題中，A 到 Z 共 26 個英文字母可以在兩個空格□□中重複出現的排列。像這樣排列時，如果相同的物件可以重複出現，這種排列就稱為**重複排列**。

推廣問題

從 m 種不同之物件中，任意選取 n 個排成一列，若每種物件都可以重複出現（每種物件至少有 n 個），則共有幾種排列的方法？

【重複排列】

從 m 種不同之物件中，任意選取 n 個排成一列，若每種物件都可以重複出現（每種物件至少有 n 個），則共有 m^n 種排列的方法。

任務 1　古代的陽爻「—」、陰爻「－－」與八卦、六十四卦

請解釋在「周易」中的「八卦」與「六十四卦」的數量是如何產生的？

八卦

☷ 坤 (地)	☶ 艮 (山)	☵ 坎 (水)	☴ 巽 (風)	☳ 震 (雷)	☲ 離 (火)	☱ 兌 (澤)	☰ 乾 (天)	← 上卦 ↓ 下卦
2.坤爲地	23.山地剝	8.水地比	20.風地觀	16.雷地豫	35.火地晉	45.澤地萃	12.天地否	☷ 坤 (地)
15.地山謙	52.艮爲山	39.水山蹇	53.風山漸	62.雷山小過	56.火山旅	31.澤山咸	33.天山遯	☶ 艮 (山)
7.地水師	4.山水蒙	29.坎爲水	59.風水渙	40.雷水解	64.火水未濟	47.澤水困	6.天水訟	☵ 坎 (水)
46.地風升	18.山風蠱	48.水風井	57.巽爲風	32.雷風恆	50.火風鼎	28.澤風大過	44.天風姤	☴ 巽 (風)
24.地雷復	27.山雷頤	3.水雷屯	42.風雷益	51.震爲雷	21.火雷噬嗑	17.澤雷隨	25.天雷無妄	☳ 震 (雷)
36.地火明夷	22.山火賁	63.水火既濟	37.風火家人	55.雷火豐	30.離爲火	49.澤火革	13.天火同人	☲ 離 (火)
19.地澤臨	41.山澤損	60.水澤節	61.風澤中孚	54.雷澤歸妹	38.火澤睽	58.兌爲澤	10.天澤履	☱ 兌 (澤)
11.地天泰	26.山天大畜	5.水天需	9.風天小畜	34.雷天大壯	14.火天大有	43.澤天夬	1.乾爲天	☰ 乾 (天)

六十四卦

補給站

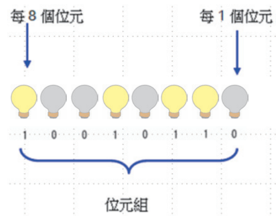
「八卦」的八卦：

德國數學哲學大師威廉．萊布尼茲（*Gottfried Wilhelm Leibniz*，1646 年 7 月 1 日－1716 年11 月 14 日）被稱為現代計算機基礎的二進位的發明者。據說萊布尼茲通過在中國的傳教士，得到了八卦圖，他領悟到只要把八卦中的陰爻代表 0，陽爻代表 1，就可以創立一種新的記數法：二進位。這一神話雖然已經被部分數學史家進行了批駁，但至今仍廣為傳播。

資料來源：*http://baike.baidu.com/view/18536.htm*

任務 2　現代的「0」、「1」與電腦位元（*bits*）、位元組（*Byte*）

電腦紀錄資料的最小單位稱為「位元（*bit*）」，每 1 個位元就是一個 0 或一個 1 的訊息，它可表示的資料量是 2 個。而我們將八個位元（*bits*）定義為一個「位元組（*Byte*）」。則

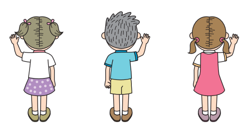


(1)一個位元組（*Byte*），即 8 位元，可以表示幾個不同的資料量？

(2)於 1984 由臺灣資策會工業局和 13 家業者所共同制定的編碼系統稱為「*Big*5 碼」，其中包含 5401 個常用字、7652 個次常用字及 408 個符號（含標點符號、注音符號、單位符號……），共 13461 個字，則需用幾個位元組（*Byte*）來表示才夠？

任務 3　平行差異化任務與數學擬題

1. 自動販賣機有 5 種飲料可供選擇（假設每一種的數量都超過 3 瓶），若甲、乙、丙三人欲各購買一罐飲料，則選購的方法有幾種？
2. 請以「甲、乙、丙三位學生及 5 罐飲料」為情境敘述，設計出答案為 $3\times3\times3\times3\times3=3^5$ 的問題。

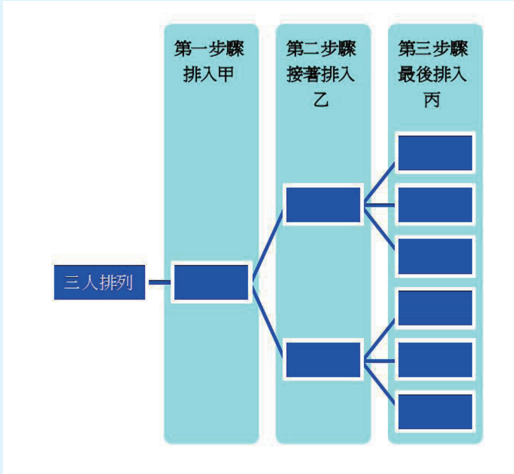


2 直線全取排列

活動 2 三人與四人排列的情形

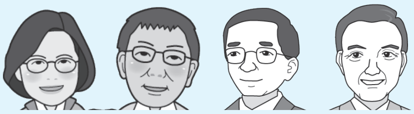
1.【三人排列的情形】

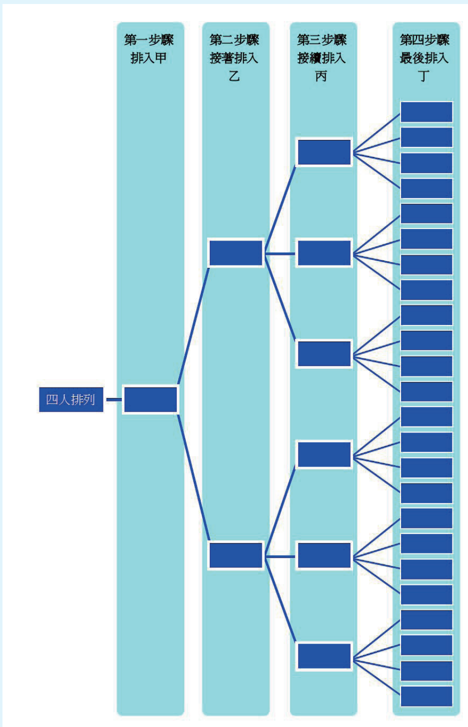
三位總統候選人甲、乙、丙於辯論會開始之前，排成一列拍照紀念，試問主辦單位共有幾種不同的排法？



2.【四人排列的情形】

若有四位總統候選人甲、乙、丙、丁，於辯論會開始之前，排成一列拍照紀念，試問主辦單位共有幾種不同的排法？





推廣問題

將 n 個不同的物件排成一列，共有多少種排列法？

說明

當 n 是正整數時，為了方便，我們用符號 $n!$ 表示 $1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$，讀做「$n$ 的階乘」，即
$n!=1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$。

例如：
$1!=1$，$2!=1\times2=2$，$3!=1\times2\times3=6$，$4!=1\times2\times3\times4=24$。

另外，我們規定 $0!=1$。並且由定義我們可以看出：
當 n 是大於 1 的整數時，$n!=n\times[(n-1)!]$。

【直線全取排列】
將 n 個不同的物件排成一列，共有 $n!$ 種排法。

任務 4　熟悉符號 $n!$ 平行差異化任務

1. (1) 試求 $(3+4)!$ 之值
   (2) 試求 $3!+4!$ 之值
   (3) 請問 $(3+4)!$ 與 $(3!+4!)$ 相等嗎？
2. (1) 試求 $\dfrac{12!}{10!}$ 之值。
   (2) 設 n 為正整數，若 $\dfrac{(n+2)!}{n!}=72$，求 n 之值。

任務 5　古代的排列遊戲問題

請你算算看，清代數學家陳厚耀〈錯綜法義〉的文章中的「串名」問題：

『今如合夥當差，有張李王三家串姓為名，當排出串名若干？』

例如：張李王，王李張等就是串姓所得之名。

任務 6　跨領域，現代 n 的階乘與程式設計

在程式設計上，常用以下的一階遞迴關係設計「n 的階乘」的演算法。

設 $\begin{cases} a_n = n \times a_{n-1}，n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$，$n$ 為正整數。

(1) 求 a_1、a_2、a_3 的值。

(2) 試證明：$a_n = n!$，$n \geq 1$。

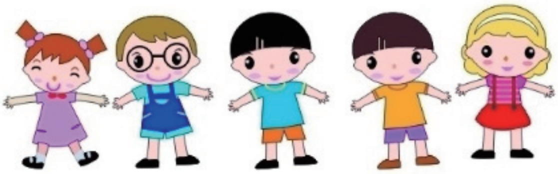
任務 7　多重表徵與開放問題

某日，大雄與柯南一同作下列的數學問題：

「求甲、乙、丙、丁、戊五人排成一列拍照，其中甲不排第一位的方法數。」

大雄說：答案為 $(5! - 4!)$ 種。

柯南說：答案為 $4 \times 4!$ 種。



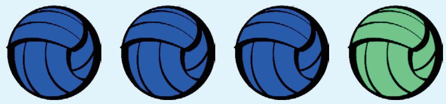
請判斷兩位的答案是否正確？

並評析大雄與柯南的解題思路。

3 有相同物的排列

活動 3 有相同物的排列

1.【有相同物的排列(一)】
體育課老師將 3 個相同的藍色躲避球，與 1 個綠色躲避球分給四組使用，每組一個，則共有多少種分法？



2.【有相同物的排列(二)】
體育課老師將 3 個相同的藍色躲避球，與 2 個綠色躲避球分給五組使用，每組一個，則共有多少種分法？

推廣問題

k 種相同物件的排列

設 n 個物件共分成 k 組，其中第一組由 m_1 個相同物件組成，第二組由 m_2 個相同物件組成，…，第 k 組由 m_k 個相同物件組成，且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$，若組與組間的物件皆不相同，則這 n 個物件排成一列的方法共有幾種？

【有相同物的排列】

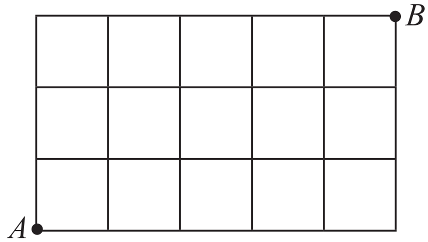
設有 k 種不同種類的物件(同類中的物件視為相同)，第 1 類有 m_1 個，第 2 類有 m_2 個，…，第 k 類有 m_k 個，共計 n 個，

即 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$。

將此 n 個物件排成一列，共有 $\dfrac{n!}{m_1!\times m_2!\times\cdots\times m_k!}$ 種排法。

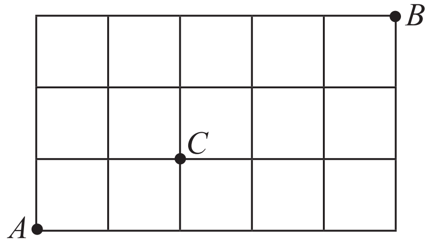
任務 8　節能減碳，步行上班的路線有幾條？

大雄住在具有棋盤式道路系統的城市，如下圖所示方格的邊線，皆為可行走道路，A 點為住家位置，而向東 5 個街區（*blocks*），再往北 3 個街區的 B 點為上班處所，為了落實節能減碳，每天步行 8 個街區上班（即是以走捷徑方式，「不繞遠路」從 A 走到 B），請問大雄總共有幾條路線可以選擇？



補充練習

承【任務 8】，若 C 點為一公園，則從 A 走捷徑到 B，而且必須經過 C 的走法有幾種？



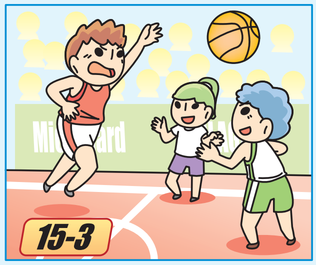
任務 9　數學擬題，開放問題

設計答案為 $\dfrac{(1+2+3)!}{1!\times 2!\times 3!}$ 種方法的問題。

4 組合與排列：n 人取 k 人的組合與排列

活動 4 教練的選擇與安排（5人選 3人的組合與排列）

1. 教練想從甲、乙、丙、丁、戊五位籃球選手中，選出三位上場參加三對三籃球賽，則選擇的方案共有多少種？
2. 教練想從甲、乙、丙、丁、戊五位籃球選手中，選出一位後衛，一位前鋒和一位中鋒，參加三對三籃球賽，則安排的方案共有多少種？



說明

由【活動 4】中，我們可以知道：

①第 1. 題中，教練選出選手而不給予分配職位，像這樣只選取而不考慮同一組內組成份子次序的方式，我們稱之為**組合**，而所有組合總數稱為組合數。

我們以符號 C^n_k 表示從 n 個不同的物件中取出 k 個為一組的組合數，其中 C 是組合（*Combination*）的第一個字母。

例如：第 1. 題中的問題，就相當於是求「從 5 人中選出 3 人為一組的組合數」，就可以符號 C^5_3 表示。

②與第 1. 題對照，第 2. 題中教練將選出的選手給予分配不同的職位，不同的安排視為相異的結果，是一種**排列**問題。

我們以符號 P^n_k 表示從 n 個不同的物中取出 k 個排成一列的方法數，其中 P 是排列（*Permutation*）的第一個字母。

例如：第 2. 題中的問題，就相當於是求「從 5 人中選出 3 人排成一列的方法數」，就可以符號 P^5_3 表示。

③組合數 C^5_3 與排列數 P^5_3 的關係：

【第一種解法】乘法

考慮活動 4 中，我們可以先從這 5 位選手中任選 3 個為一組合的選法有 C^5_3 種，這 C^5_3 種組合中，每一組合內的 3 位選手任意排成一列，就對應有 $3!=6$（種）排列。由乘法原理，可得 C^5_3 與 P^5_3 有下列的關係式：

$P^5_3=C^5_3\times 3!=60$，即排列數 P^5_3 是組合數 C^5_3 的 $3!$ 倍。

【第二種解法】除法

考慮活動四中，從 5 個人中選取 3 人出來排列的方法為 P^5_3，而所選出來的 3 人的排列數 $3!$ 種只能對應 1 種組合數，因此 5 人中選取 3 人為一組合的方法數有 $\dfrac{P^5_3}{3!}=10$ 種。

例如：5 個人中選取 3 人出來排列的情況中，甲丙丁、甲丁丙、丙甲丁、丙丁甲、丁甲丙、丁丙甲，這 6 種情形若不考慮順序，則視為相同選法。

推廣問題

1. 從 n 個不同的物件中取出 k 個（$1\leq k\leq n$）為一組的組合數 C^n_k 為何？
2. 從 n 個不同的物件中取出 k 個（$1\leq k\leq n$）任意排列的排列數 P^n_k 為何？
3. C^n_k 與 P^n_k 的關係為何？

【組合 C^n_k 與排列 P^n_k】

1. 從 n 個不同物件中任選 k 個（$1\le k\le n$）為一組的組合數，以符號 C^n_k 表示。

(1) $C^n_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k(k-1)\cdots2\times1}$。

(2) 當 $k=n$ 時，$C^n_n=\dfrac{n!}{n!(n-n)!}=\dfrac{n!}{n!0!}=1$，

又 $k=0$ 時，$C^n_0=\dfrac{n!}{0!(n-0)!}=\dfrac{n!}{0!n!}=1$。

2. 從 n 個不同物件中任選 k 個（$1\le k\le n$）排成一列的方法數，以符號 P^n_k 表示。

(1) $P^n_k=\dfrac{n!}{(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots2\times1}{(n-k)(n-k-1)\cdots3\times2\times1}$

$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)$。

(2) 當 $k=n$ 時，$P^n_n=n!$，又 $k=0$ 時，$P^n_0=\dfrac{n!}{(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$。

任務 10

請討論：為何規定 $0!=1$。

任務 11　熟悉符號 C^n_k 與檢驗古印度組合問題的答案

1. 試求下列各數：

(1) C^5_0　(2) C^5_1　(3) C^5_2　(4) C^5_3　(5) C^5_4　(6) C^5_5

2. 西元前 600 年左右，據說在印度 *Susrute* 的醫學著作中提到：以甜、酸、鹹、辣、苦、澀 6 種味道可調配出 15 種「雙味」的味道，與 20 種「三味」的味道。請檢驗答案的正確性。

補充練習

1. 承【任務 11】，西元前 600 年左右，據說在<u>印度</u> *Susrute* 的醫學著作中就有這樣的問題：甜、酸、鹹、辣、苦、澀 6 種味道可調配出多少種不同的味道？請解釋他們的答案為何是單味 6 種，四味 15 種，五味 6 種，六味 1 種。

2. 請舉生活上的例子，說明 $C_0^n=1$。

說明

①從【任務 11】的第 1 題，我們發現 $C_0^5=C_5^5$，$C_1^5=C_4^5$，$C_2^5=C_3^5$。即

$C_0^5\quad C_1^5\quad C_2^5\quad C_3^5\quad C_4^5\quad C_5^5$

相等

相等

相等

這個現象，我們可以這樣解釋：

因為從 5 個之中取走 k 個（$k=0$，1，2，3，4，5）的方法數，相當於從 5 個之中留下（$5-k$）個的方法數。

②這樣的性質可推廣至一般情形：從 n 個不同的物件中取走 k 個的方法數，相當於從這 n 個物件中留下（$n-k$）個的方法數。

因此 $C_k^n=C_{n-k}^n$。這個等式依它所表現的上述性質，常被稱為**餘組合公式**，或是**組合對稱公式**。

【餘組合公式（組合對稱公式）】

設 n、k 為整數，且 $0\leq k\leq n$，則 $C_k^n=C_{n-k}^n$。

任務 12 熟悉符號 P^n_k 與古代的排列遊戲問題

1. 試求下列各數：

(1)P^5_3　(2)P^6_6　(3)P^{10}_4

2. 請你再算算看，清代數學家陳厚耀的數學〈錯綜法義〉文章中的另一個「串名」問題：

『又如趙錢孫李周吳鄭王八姓，串名當差，其串名只三字，當排出串名若干？』

任務 13 開放問題（組合與排列關係連結）

1. (1)設計答案為 C^6_4 種方法的問題。

(2)承(1)的題幹，繼續設計使答案成為 P^6_4 。

2. 請依上述問題說明 $P^6_4 = C^6_4 \times 4!$ 。

任務 14 巴斯卡性質

從甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛 8 人中，任選 3 人為一組。

(1)試問有幾種可能的組合？

(2)所有可能的組合中，含甲的組合有幾種？不含甲的組合有幾種？

(3)試討論(1)與(2)兩者之間的關係。

可將上述任務中的情形一般化：

設 n 個人中有一特定人物甲，則 n 中取 m 的組合中，可分成兩類：

①含特定人物甲者：有 C^{n-1}_{m-1} 種方法。

②不含特定人物甲者：有 C^{n-1}_{m} 種方法。

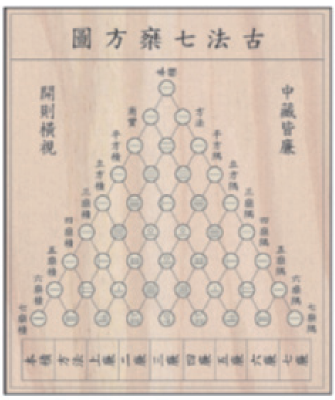
由加法原理得 $C^{n}_{m}=C^{n-1}_{m}+C^{n-1}_{m-1}(1\leq m\leq n-1)$，

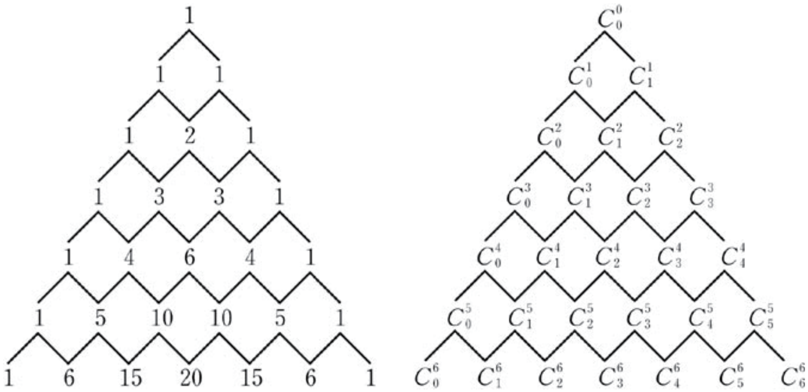
這個性質就是表現巴斯卡三角形（或**楊輝**三角形）上下兩層的關係式，

所以將它稱為巴斯卡性質。

【巴斯卡性質】

設 m，n 為自然數，且 $1\leq m\leq n-1$，則 $C^{n}_{m}=C^{n-1}_{m}+C^{n-1}_{m-1}$。





巴斯卡三角形(楊輝三角形)

任務 15　巴斯卡性質的應用

某民宿有 10 間房間，第 1 間住有 1 人，第 2 間住有 2 人，第 3 間住有 3 人，第 4 間住有 4 人，第 5 間住有 5 人，第 6 間住有 6 人，第 7 間住有 7 人，第 8 間住有 8 人，第 9 間住有 9 人，第 10 間住有 10 人。當晚進行抽獎活動，特獎有 2 位，民宿主人想知道這 2 位不在同一房間的情形有多少種？我們來幫他算一算！

評　量

1. $69\times68\times67\times66$ 之值等於下列哪一個選項？

(A) $\dfrac{69!}{66!}$ (B) $\dfrac{69\times(68!)}{65!}$ (C) $\dfrac{69!}{(4!)(65!)}$ (D) $\dfrac{69!\times68\times67}{65!}$

2. (1)若 $C_2^n=45$，求 n 之值。

(2)已知 $C_8^n=C_6^n$，求 n 之值。

3. 試以 A、B、C、D 四個相異物件進行分組，並說明 $C_3^4=C_1^4$。

4. 請問「$P_k^n=P_{n-k}^n$」是否恆成立？若認為正確，請證明；若認為錯誤，請舉一反例說明。

5. 某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有七節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則七節車廂一共有多少種畫法？

6. 大樂透彩券簽注規則是從 1～49 中任選 6 個號碼進行投注，每注（6 個號碼）費用 50 元。開獎時，開獎單位將隨機開出 6 個號碼加 1 個特別號，而開出的 6 個號碼（不含特別號），就是該期大樂透的頭獎號碼，試問：

⑴開獎前，頭獎號碼的可能情形有多少種？
⑵為確保中頭獎，須投注每一種可能情形，則需花費多少金額?
⑶若阿九想在他看好的 8 個數字中選 6 個號碼簽注，則他需花費多少金額，才不致遺漏任何一種可能情形?

7. 有 1 枝原子筆，2 枝相同的鉛筆與 3 枝相同的鋼筆。

(1)全部分給 6 個人，每人恰得 1 枝，共有多少種分法？

(2)全部分給 8 個人，每人最多分得 1 枝，共有多少種分法？

8. 啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男、女生均至少要有 2 人，某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽。若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種不同的組隊方法？

9. 從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選出四盆靠在牆邊排成一列，其中杜鵑及山茶都被選到，且此兩盆花位置相鄰的排法共有多少種？

挑戰題

1. 請求出下列 A，B，C，D 四個集合的元素個數：

$A=\{(x,y,z)\mid 1\leq x,y,z\leq 9$，$x,y,z$ 為整數，且 x,y,z 互異$\}$。

$B=\{(x,y,z)\mid 1\leq x,y,z\leq 9$，$x,y,z$ 為整數$\}$。

$C=\{(x,y,z)\mid 1\leq x<y<z\leq 9$，$x,y,z$ 為整數$\}$。

$D=\{(x,y,z)\mid 1\leq x\leq y\leq z\leq 9$，$x,y,z$ 為整數$\}$。

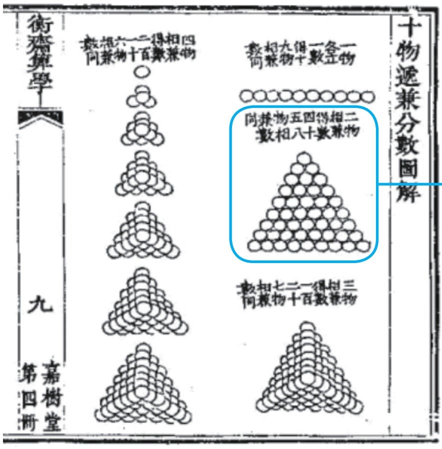
2. 在第一節的歷史與生活中提到：

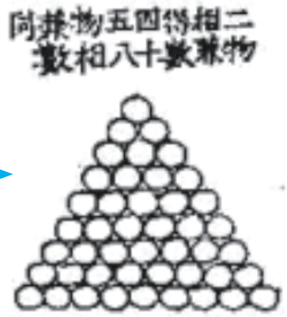
大約在六世紀時，*Varahamihira* 的著作中曾提出一位有經驗的建築師為國王建造一座雄偉的宮殿，這座宮殿有 8 個門，每次開一個門或每次開兩個門或每次開三個門，… 等，這樣總共有多少種不同的組合方法？其答案是開 1 到 8 個門的組合數分別為 8，28，56，70，56，28，8，1，而且總共有 255 種組合方法。

而又 $255=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{8\text{ 個 }2}-1$，請就上述問題，分別以不同解題思路說明為什麼？

$$8+28+56+70+56+28+8+1=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{8\text{ 個 }2}-1$$

3. 探究古人計算組合數的方法！





清代數學家汪萊在著作《衡齋算學四》的〈遞兼數理〉中提出「十物遞兼分數圖解」，利用各種三角堆的和求出相對應的組合數 C_k^{10}。其中組合數 C_2^{10} 的求法是利用與平三角堆總和的對應規律，導出 $C_2^{10}=9+8+7+6+5+4+3+2+1$，如上圖，進而求得 $C_2^{10}=\dfrac{9\times10}{2}=45$。請解釋 $C_2^{10}=9+8+7+6+5+4+3+2+1$ 為何成立。

4.(1)設 n，k 都是正整數，且 $2 \leq k \leq n$，

試證明 $C_k^n = C_k^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$。

(2)設計一個情境式的敘述，說明 $C_k^n = C_k^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$。