

# 中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國小組 數學科

080408

嚴肅甜心

學校名稱：澎湖縣馬公市石泉國民小學

作者：	指導老師：
小六 李俊璋	洪進益
小六 朱紘廷	王婉妮
小六 林致愷	
小六 許嘉玲	
小六 陳珈妤	
小六 周其萱	

關鍵詞：SET 牌、桌遊、排列組合

## 摘要

「SET！你收集到幾組 SET？」

本研究透過桌遊 SET 牌的研究，利用數學窮舉法和數學計算，探討 SET 牌桌遊遊戲中的奧祕。研究結果如下：一、SET 牌由 81 張不同的牌所組成；二、至少發 21 張牌，一定會出現 SET；三、利用我們找出的「關鍵密碼」，可以輕易將 81 張 SET 牌，拆解成 27 組 SET；四、一副 81 張的 SET 牌，可以湊出 1080 組不同的 SET。根據 SET 牌的四個屬性（顏色、數量、填充、形狀），每個屬性代表一個空間，我們將其想像成散布的四度空間的 81 個點，這 81 個點，每三個點連成一線，即是一組 SET。81 個 SET 點交織出 1080 條美麗的線段，即是屬於 SET 牌的數學美麗形體

## 壹、研究動機

「SET！你收集到幾組 SET？」

本研究是因為在班級的數學推理課中，老師教我們一個很有趣的數學桌遊-SET 形色牌。這個數學桌遊，共有 81 張不同的牌，其中每張牌均包含四個特徵，是一種包含「圖形辨識」和「組合收集」的遊戲。

第一次接觸到這個桌遊的時候，我們玩得不亦樂乎。玩了幾次，也發現雖然只有 81 張牌，但卻可以變化出很多不同的 SET。因此，我們決定以此為科展的題目，試著來探討其中的奧秘。

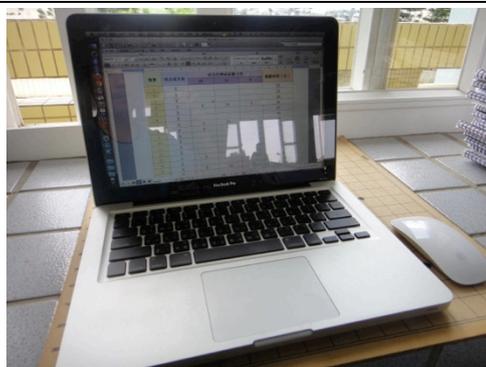
## 貳、研究目的

- 一、研討 SET 這個遊戲為什麼是 81 張牌，而不是其他的張數
- 二、了解至少要發幾張牌，一定會出現 SET
- 三、求出是不是可以將 81 張全部用完，形成 27 組 SET
- 四、破解 81 張牌，所產生的 SET 有多少種情況

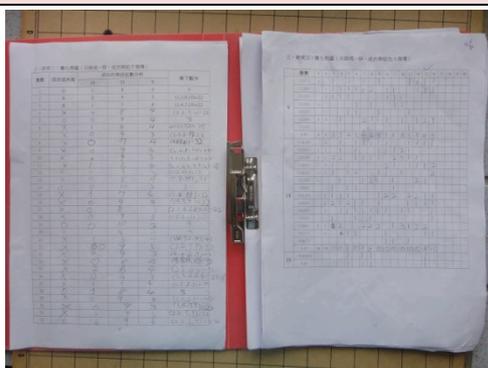
## 參、研究設備及器材



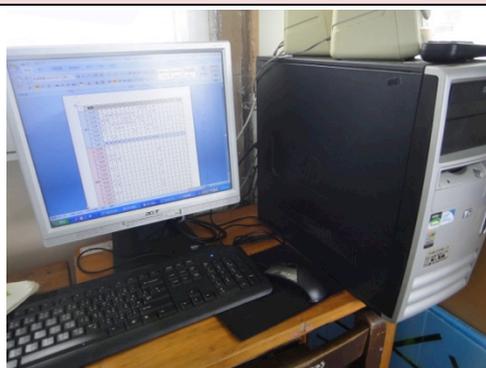
SET 形色牌



數據輸入電腦



實驗紀錄本



文書處理電腦

## 肆、研究過程或方法

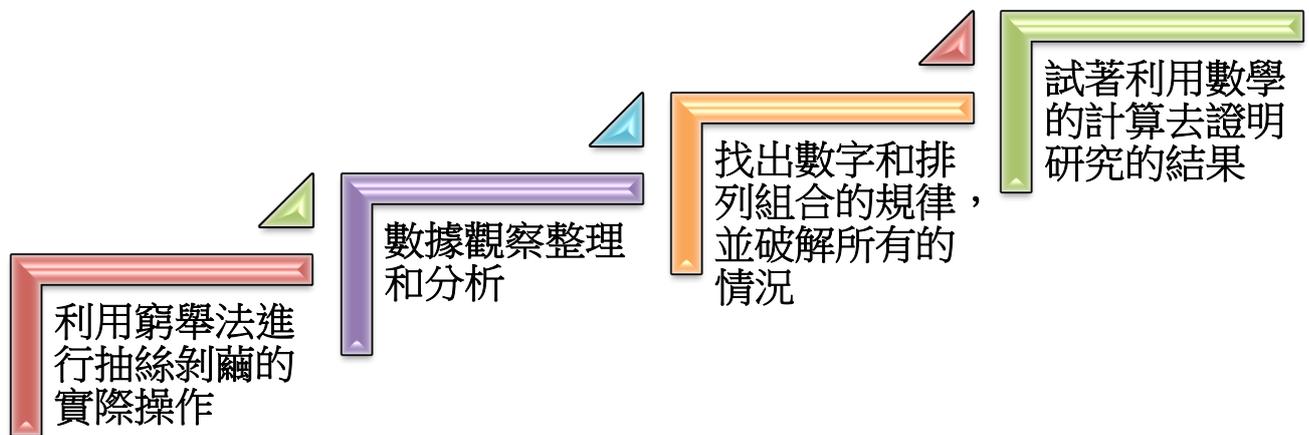
### 一、認識「SET 形色牌」

- (一) SET 形色牌是有 81 張不同的卡牌所組成。
- (二) 每張卡牌均包含四種不同的屬性-「顏色、數量、填充、形狀」(嚴肅甜心)。
- (三) 顏色：紅色、綠色、紫色。
- (四) 數量：一個、兩個、三個。
- (五) 填充：實心、空心、斜線。
- (六) 形狀：菱形、波浪、橢圓

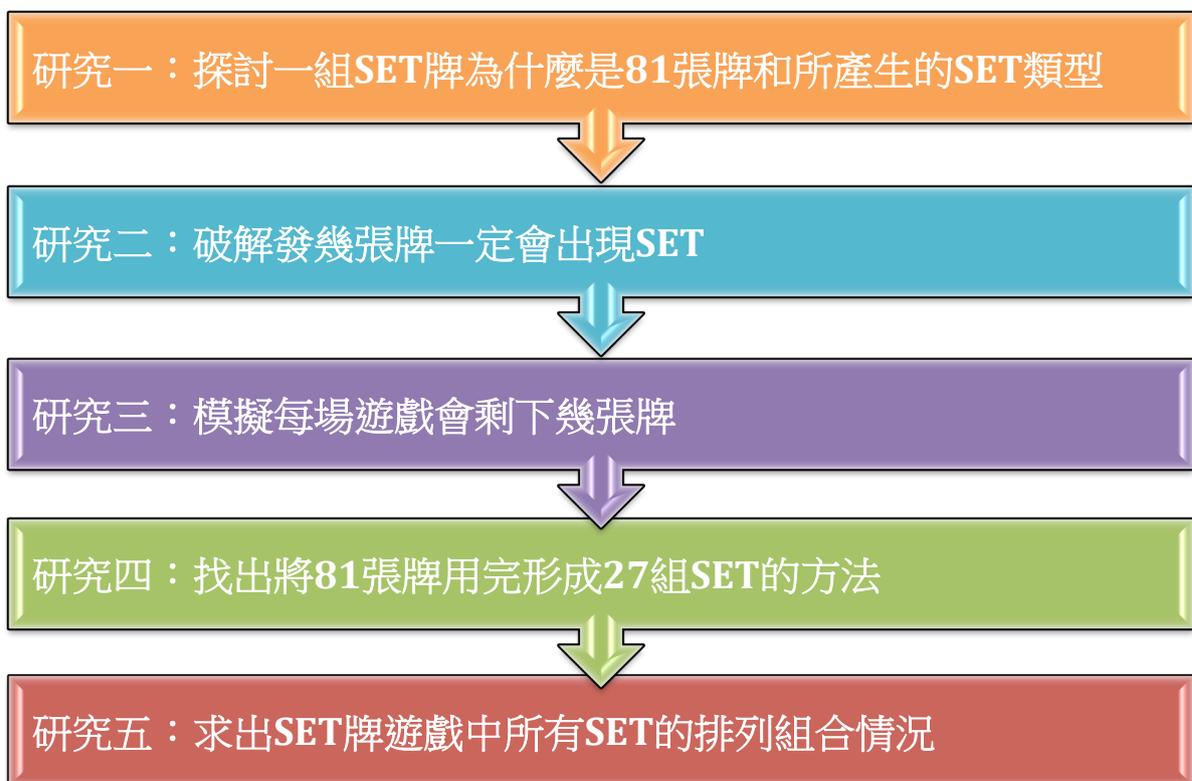

### 二、SET 的定義

- (一) SET 由 3 張牌組成。
- (二) 3 張牌的特性必須「分別獨立判斷」。
- (三) 每個特性要「完全相同」或「完全不同」。
- (四) 遊戲中先發出 12 張牌在桌面上，看到 SET 的玩家要先喊出「SET」並挑出。
- (五) 經過檢驗後，正確則可以得分(一組 SET 1 分)。
- (六) 若 12 張牌均找不出 SET，則可以再加發 3 張牌。
- (七) 遊戲在 81 張牌均發完後，統計每個人的分數

### 三、研究過程：



### 四、研究方法：



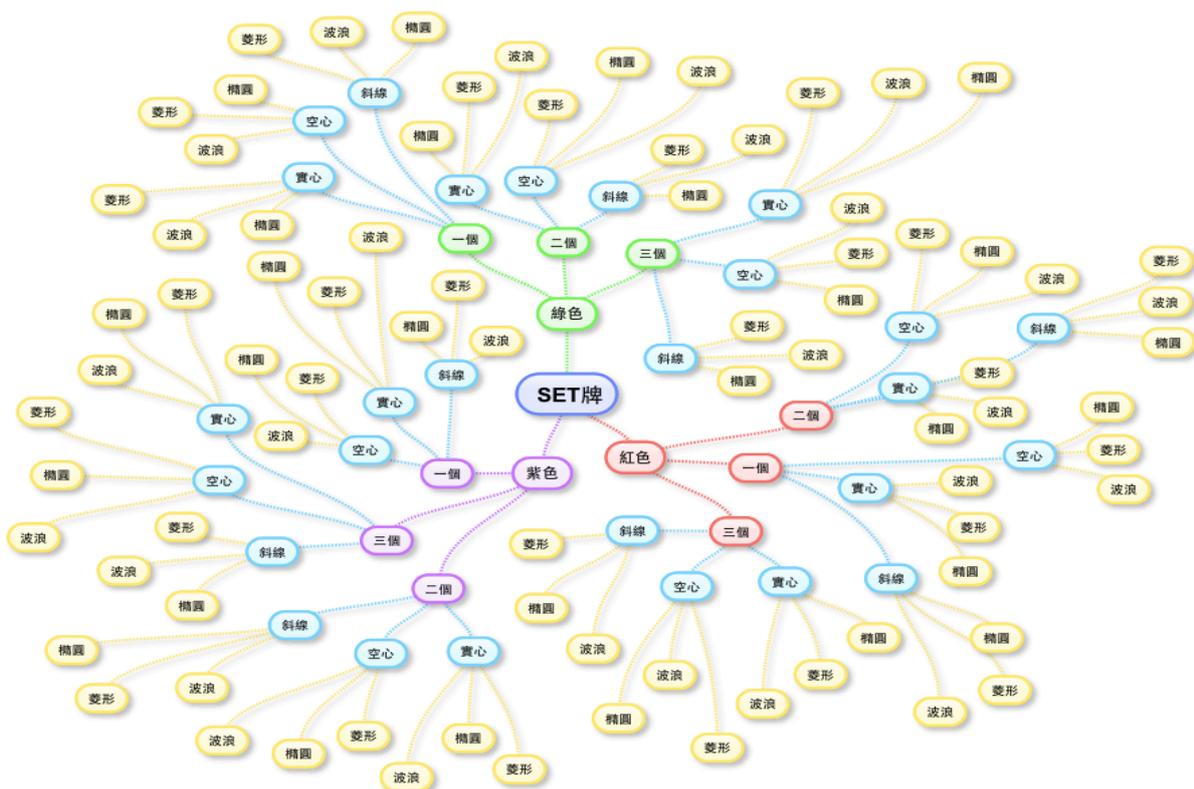
## 伍、研究結果

一、研究一：探討一組 SET 牌為什麼是 81 張牌和所產生的 SET 類型。

- ◆ **說明**：第一次打開牌盒時，發現一組 SET 牌總共有 81 張牌，我們提出疑問，為什麼裡面總共是 81 張牌，而非其他的張數呢？
- ◆ **發現**：我們先觀察 SET 牌的牌面設計並進行分類，發現根據 SET 牌的遊戲規則，牌面是由四個不同的**屬性**所組成，分別是「顏色」、「數量」、「填充」、「形狀」所組成，而每個屬性又包含三個不同的**元素**，如下表

<b>顏色</b>	紅色	綠色	紫色
<b>數量</b>	一個	二個	三個
<b>填充</b>	實心	空心	斜線
<b>形狀</b>	菱形	波浪	橢圓

- ◆ **計算**：因此一組 SET 牌是由「顏色」、「數量」、「填充」、「形狀」四個屬性中，各挑選其中一個元素所組成，彼此配對的結果共可以包括  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  種情況。
- ◆ **繪製**：我們實際繪製出 SET 牌的樹狀圖和心智圖，便可一探究竟。



- ◆ **說明**：我們發現 SET 牌遊戲中，要形成 SET 的要素是要找出三張牌，檢查其中的「顏色」、「數量」、「填充」、「形狀」四個屬性，要完全「相同」或「不相同」，即可形成一組「SET」。而我們發現同樣是「SET」，有的是三個屬性相同，有的則是兩個屬性相同。因此我們將研究結果整理如下：

項次	屬性				類型	種數	SET 舉例		
	顏色	數量	填充	形狀					
1	B	B	B	B	4B	1 種			
2	A	B	B	B	3B1A	4 種			
3	B	A	B	B					
4	B	B	A	B					
5	B	B	B	A					
6	A	A	B	B	2B2A	6 種			
7	A	B	A	B					
8	A	B	B	A					
9	B	A	A	B					
10	B	A	B	A					
11	B	B	A	A					
12	A	A	A	B	1B3A	4 種			
13	A	A	B	A					
14	A	B	A	A					
15	B	A	A	A					
					合計	15 種			

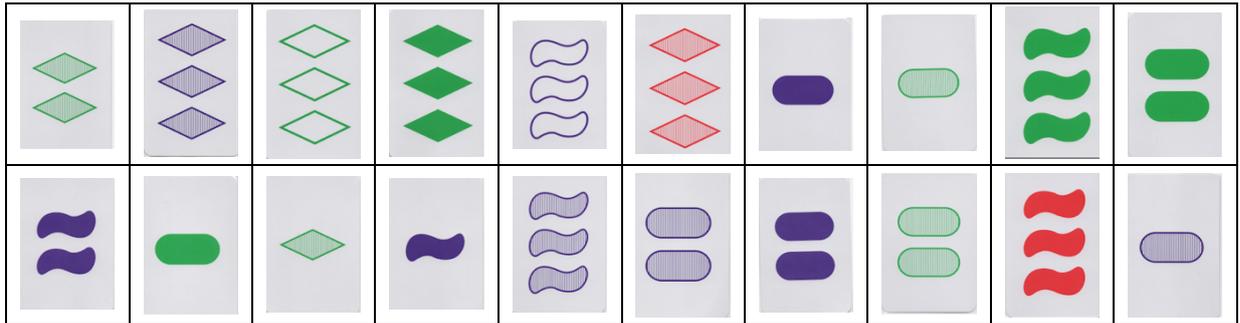
☆ 我們利用猜數字遊戲中的□A□B，當作我們的記錄方式，A 代表相同，B 代表不同。

◆ **小結**

1. 我們發現 SET 牌的類型可以分為 4B、3B1A、2B2A、1B3A 四種類型。
2. 在 SET 牌的四種類型中，總共包含 15 種不同的情況，其中以 2B2A 的情況為最多，總共有 6 種情況。

## 二、研究二：破解發幾張牌一定會出現 SET

- ◆ **說明：**根據遊戲規則提到，每次遊戲先發 12 張牌，如果 12 張牌還找不出一組 SET，就可以再加發三張牌。在實際遊戲中，我們也發現到有時候桌面上的 12 張牌，真的是一組 SET 都沒有。因此我們可以知道任意發 12 張牌，不一定會出現一組 SET。本研究，我們試著利用反證法，列出 n 張牌無法出現 SET 的情況，逆推去破解到底發到第幾張牌，一定會出現一組 SET。
- ◆ **反證法：**經過我們不斷的試驗，我們發現最多可以找到 20 張牌還無法形成一組 SET 的情況，而發到第 21 張牌，無論我們怎麼試驗，都一定會出現一組 SET，結果如下表：



- ◆ **模擬計算：**根據所模擬出來的情況，我們去計算出現不同張數 n 會出現 SET 的機率。

桌面未形成 SET 牌張數	牌堆中剩下的張數	任取兩張牌可形成組數	實際上牌堆中的牌可與桌面上的牌形成 SET 的張數	組成 SET 的機率
2	79	1	1	1.27%
 	$C_2^2 = 1$			
3				
  	$C_2^3 = 3$	  	  	
4				
  	$C_2^4 = 6$	     	     	
				
5	76	10	10	13.16%
  	$C_2^5 = 10$	         	         	

6		75	15	14														18.67%			
	$C_2^6 = 15$									2											
7		74	21	20														27.03%			
	$C_2^7 = 21$									2											
8		73	28	25														34.25%			
	$C_2^8 = 28$									2											
													2								
9		72	36	30														41.67%			
	$C_2^9 = 36$									2											
													2								

10			71	45	36						49.30%		
			$C_2^{10} = 45$										
													3
11			70	55	41						58.57%		
			$C_2^{11} = 55$										
													3
12			69	60	46						66.67%		
			$C_2^{12} = 60$										
													3





					3	3		2	2		2		2	2
					2	2			3	2	2	2		
					2	2	3	2			2			
17			64	136	61								95.31%	
					2	2	3		2	3	3	2	7	2
					3	3	2	3	3	3	3	2	2	3
						2	3	2	2	3	2	2	2	2
					3	3		3	3		2		2	2
					3	2	2		3	2	3	2	2	2
					2	2	3	2	2		2			
18			63	153	61								96.82%	
					3	2	3	2	3	3	3	2	8	2
$C_2^{17} = 136$														
$C_2^{18} = 153$														

														3	3	2	3	3	3	3	2	2	3
														2	2	3	2	2	3	3	2	2	2
														3	3	2	3	3	2	3		2	3
														3	2	2	2	3	2	3	3	3	2
														3	2	3	2	3		2	2	2	
19			62	171	61							98.39%											
			$C_2^{19} = 171$											3	3	3	3	3	3	3	3	9	2
														3	3	2	3	3	3	3	2	2	3
														3	3	3	2	2	3	3	2	2	2
														3	3	3	3	3	3	2	2	2	3
														3	3	2	2	3	3	3	3	3	3
														3	2	3	2	3		2	2	2	3

				3	3	3	3	3	2	3	2	2	2	
				2										
20			61	190	61							100%		
			$C_2^{20} = 190$											
				3	3	3	3	3	3	3	3	10	3	
				3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
				3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
				3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
			3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
			3											

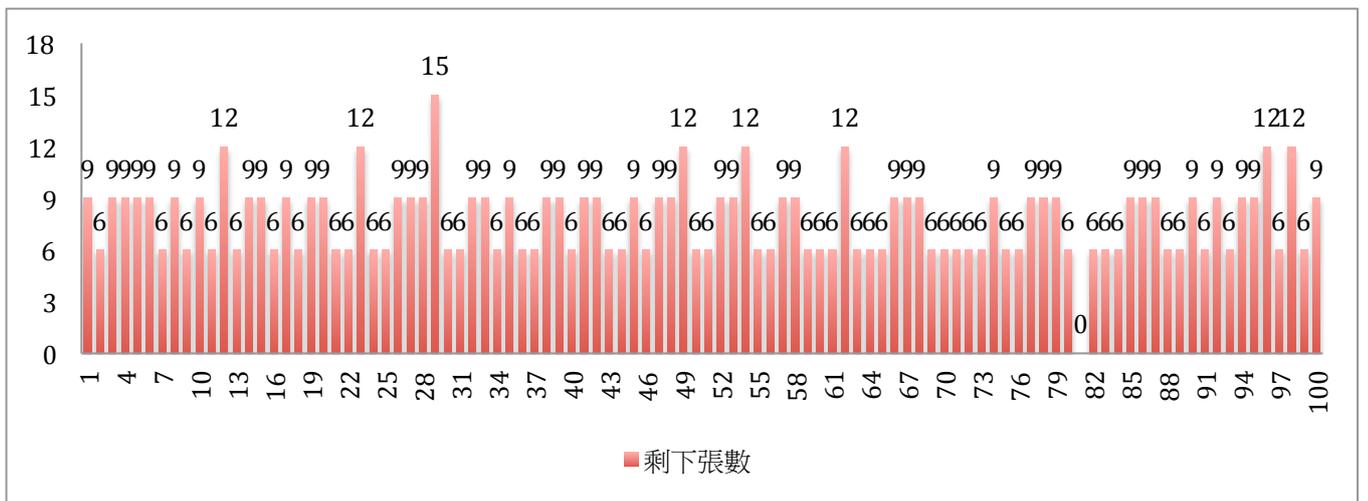
◆ 小結

1. 由實驗得知，12 張牌出現一組 SET 的機率為 58.57%，到了 21 張牌則為 100%。
2. 一組 SET 決定好前兩張後，第三張牌即確定。利用數學上排列組合計算，從 n 張牌任選兩張的組數，與實際可配對成 SET 的張數不同，原因就是因為有些組數所需要配對成功的 SET 牌是相同的，上表中圖示的下方數字即代表之。
3. 觀察到 20 張牌的部份，我們發現到剩下牌堆中的每張牌均可以與其形成 SET，另外一個有趣的現象，就是 61 張牌中，每張牌均用到 3 次，其中有張牌用到 10 次（即無法形成 SET 的 20 張牌，兩兩一組，而那張牌為 10 組牌共同需要的 SET 牌），利用這個性質，我們可以找出其他 20 張牌無法 SET 的情況（ $3 \times 60 + 10 = 190$ ）。

### 三、研究三：模擬每場遊戲會剩下幾張牌

- ◆ **說明：** 我們實際進行 SET 形色牌遊戲，發現遊戲最後總是會剩下幾張牌，無法組成 SET，因此我們決定實際模擬進行 100 盤遊戲，試著去了解遊戲都會剩下多少張牌。

盤數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
剩下張數	9	6	9	9	9	9	6	9	6	9	6	12	6	9	9	6	9	6	9	9
盤數	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
剩下張數	6	6	12	6	6	9	9	9	15	6	6	9	9	6	9	6	6	9	9	6
盤數	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
剩下張數	9	9	6	6	9	6	9	9	12	6	6	9	9	12	6	6	9	9	6	6
盤數	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
剩下張數	6	12	6	6	6	9	9	9	6	6	6	6	6	9	6	6	9	9	9	6
盤數	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
剩下張數	0	6	6	6	9	9	9	6	6	9	6	9	6	9	9	12	6	12	6	9



剩下張數	0	3	6	9	12	15	18
出現盤數	1	0	47	44	7	1	0
出現百分率	1%	0%	47%	44%	7%	1%	0%

- ◆ **程式設計模擬：** 由於我們認為樣本數還是太少，因此在和老師討論後，我們將我們的想法告訴老師，請老師教我們利用電腦的程式設計將結果模擬出來。我們將程式設定好之後，讓程式跑了 100000 組結果，結果如下：

剩下張數	0	3	6	9	12	15	18
出現盤數	50	0	20057	58735	20904	254	0
出現百分率	0.05%	0%	20.057%	58.735%	20.904%	0.254%	0%

Test Count : 100,000

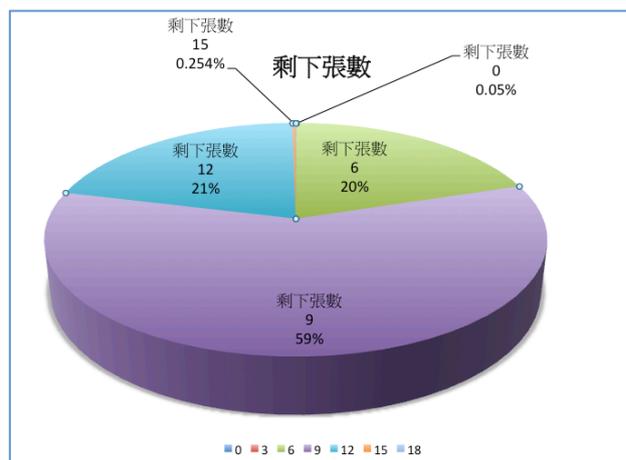
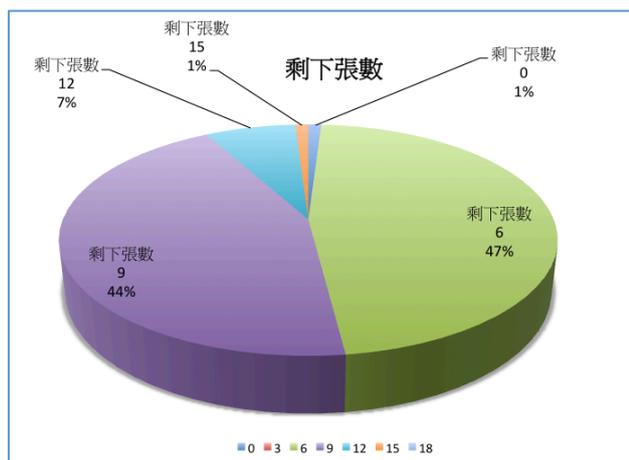
Average Remaining Length : 9.040670335167583

◆ **程式模擬結果：**（因資料龐大，篇幅有限，只呈現前 50 筆資料）


◆ **繪製：** 接著我們把實際操作 100 盤和程式模擬的結果，將數據結果整理統計後，繪製成圓形圖做比較，如下列圖示：

實際操作 100 盤

程式設計模擬 100000 盤

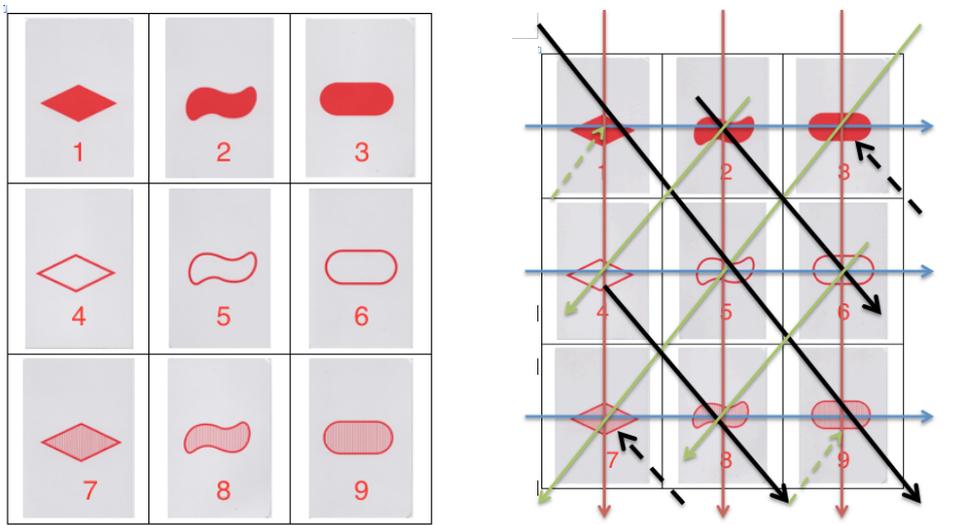


◆ **小結**

1. 比較「實際操作」和「程式設計」，我們發現到數據還是有些差距，在實際操作的部份，我們出現最多次的就是剩下 6 張牌和 9 張牌，機率都超過 40%。
2. 而在程式設計模擬的部份，剩下 9 張牌為最多，高達 58.735%，而剩下 6 張牌和 12 張牌也都有 20% 以上。
3. 兩個實驗中都可以發現一個有趣的地方，我們發現到剩下的張數幾乎都有出現，而未曾剩下 3 張牌。原本我們以為剩下 3 張牌應該也會有很多組，但經過討論後，我們認為如果其他 78 張牌，每 3 張一組，形成 26 組 SET，那最後的 3 張牌，一定也可以形成一組 SET，故不可能剩下 3 張牌。
4. 完全用完 81 張牌，實際操作只出現 1 次，程式模擬也只有 50 次，因此我們將試著在研究四來進行這方面問題的探討。

◆ 四、研究四：找出將 81 張牌用完形成 27 組 SET 的方法

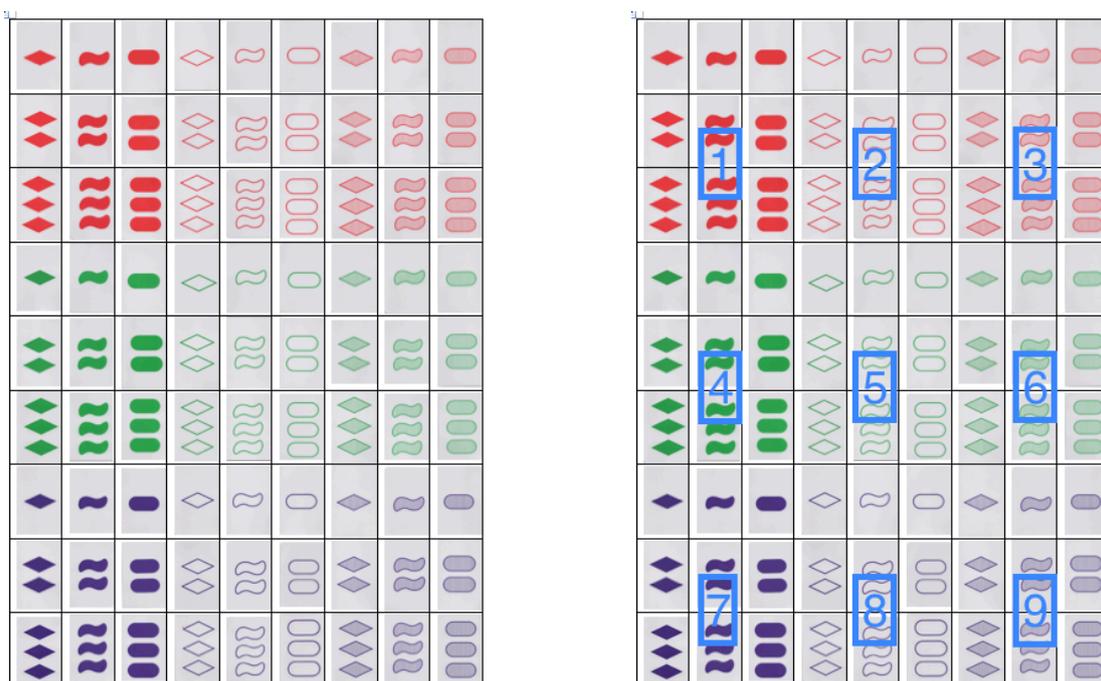
◆ **說明**：實際實驗中，出現了一次完全用完 81 張牌的情況，因此，我們試著思考，是否能找出其他用完 81 張牌的方法。我們拿出 9 張牌（九宮格），此 9 張牌的顏色和數量均相同，我們發現可以找出 12 組 SET。其連線情況的「關鍵密碼」如下：



◆ SET 連線的關鍵密碼（可分為四區，12 組密碼）

關鍵密碼			
(1,2,3)	(1,4,7)	(1,5,9)	(1,6,8)
(4,5,6)	(2,5,8)	(2,6,7)	(2,4,9)
(7,8,9)	(3,6,9)	(3,4,8)	(3,5,7)

◆ **延伸**：除了「規律的排整齊」，可以將 81 張牌用完之外，我們想到還可以將 1~9 的區域放大，利用上面的「關鍵密碼」，每個區域取一張牌，共可以產生 9 組牌，每組牌一樣可以產生 12 組 SET，一樣可以模擬出用完 81 張的情況。舉例如下：



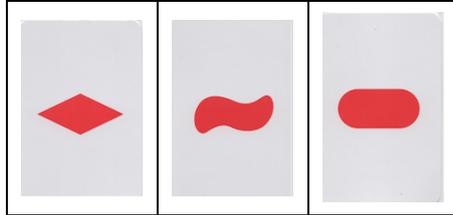

◆ 利用這樣的方式，我們可以排出大九宮格圖，小九宮格的 9 張牌，不管直橫斜，均可以形成 12 組 SET。因此我們可以將 81 張牌完全打散，重新排列成 27 組 SET。列出部份結果如下：

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

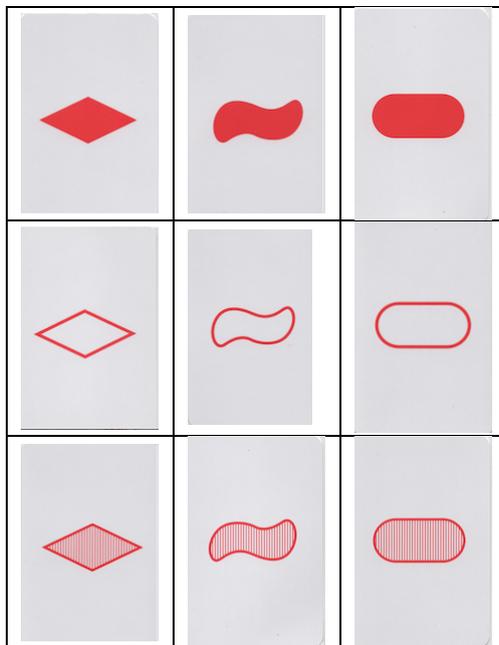
五、研究五：求出 SET 牌遊戲中所有 SET 的排列組合情況

◆ **說明：** 在這個研究中，我們試著找出 81 張 SET 牌中，所有有可能形成 SET 的情況，我們先簡化問題，根據「嚴肅甜心」的四個屬性，先控制前三個屬性使其相同。

(一) 控制「嚴肅甜心」使其相同，得到 3 張牌，可以形成 1 組 SET。



(二) 控制「嚴肅」使其相同，得到 9 張牌，可以形成 12 組 SET。



◆ **進階：** 如果照以上方法，要將所有的情況列出來，將會相當的吃力，因此我們試著想想看是否能有其他的方式，來破解所有的 SET 情況。後來，我們想到可以將 SET 牌編碼的方式，將「圖形」轉換成「數字」的方式，來簡化問題。也方便我們找出所有的 SET 情況。以下為將 81 張 SET 牌進行編碼的方式：

◆ **編碼方式**（依照「嚴肅甜心」的順序編碼）

編碼	1	2	3
顏色	紅色	綠色	紫色
數量	一個	二個	三個
填充	實心	空心	斜線
形狀	菱形	波浪	橢圓

◆ 舉例說明

		
顏色：紅色 數字：二個 填充：實心 形狀：橢圓	顏色：綠色 數字：一個 填充：斜線 形狀：菱形	顏色：紫色 數字：三個 填充：空心 形狀：波浪
編碼 1213	編碼 2131	編碼 3322

◆ 編碼結果

SET 牌									
編碼	1111	1112	1113	1121	1122	1123	1131	1132	1133
SET 牌									
編碼	1211	1212	1213	1221	1222	1223	1231	1232	1233
SET 牌									
編碼	1311	1312	1313	1321	1322	1323	1331	1332	1333
SET 牌									
編碼	2111	2112	2113	2121	2122	2123	2131	2132	2133
SET 牌									
編碼	2211	2212	2213	2221	2222	2223	2231	2232	2233
SET 牌									
編碼	2311	2312	2313	2321	2322	2323	2331	2332	2333
SET 牌									
編碼	3111	3112	3113	3121	3122	3123	3131	3132	3133
SET 牌									
編碼	3211	3212	3213	3221	3222	3223	3231	3232	3233
SET 牌									
編碼	3311	3312	3313	3321	3322	3323	3331	3332	3333

◆ 破解所有的 SET 情况

	1111	1112	1113	1121	1122	1123	1131	1132	1133	1211	1212	1213	1221	1222	1223	1231	1232	1233
1111	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1112	1113	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1113	1112	1111	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1121	1131	1133	1132	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1122	1133	1132	1131	1123	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1123	1132	1131	1133	1122	1121	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1131	1121	1123	1122	1111	1113	1112	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1132	1123	1122	1121	1113	1112	1111	1133	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1133	1122	1121	1123	1112	1111	1113	1132	1131	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1211	1311	1313	1312	1331	1333	1332	1321	1323	1322	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1212	1313	1312	1311	1333	1332	1331	1323	1322	1321	1213	—	—	—	—	—	—	—	—
1213	1312	1311	1313	1332	1331	1333	1322	1321	1323	1212	1211	—	—	—	—	—	—	—
1221	1331	1333	1332	1321	1323	1322	1311	1313	1312	1231	1233	1232	—	—	—	—	—	—
1222	1333	1332	1331	1323	1322	1321	1313	1312	1311	1233	1232	1231	1223	—	—	—	—	—
1223	1332	1331	1333	1322	1321	1323	1312	1311	1313	1232	1231	1233	1222	1221	—	—	—	—
1231	1321	1323	1322	1311	1313	1312	1331	1333	1332	1221	1223	1222	1211	1213	1212	—	—	—
1232	1323	1322	1321	1313	1312	1311	1333	1332	1331	1223	1222	1221	1213	1212	1211	1233	—	—
1233	1322	1321	1323	1312	1311	1313	1332	1331	1333	1222	1221	1223	1212	1211	1213	1232	1231	—
1311	1211	1213	1212	1231	1233	1232	1221	1223	1222	1111	1113	1112	1131	1133	1132	1121	1123	1122
1312	1213	1212	1211	1233	1232	1231	1223	1222	1221	1113	1112	1111	1133	1132	1131	1123	1122	1121
1313	1212	1211	1213	1232	1231	1233	1222	1221	1223	1112	1111	1113	1132	1131	1133	1122	1121	1123
1321	1231	1233	1232	1221	1223	1222	1211	1213	1212	1131	1133	1132	1121	1123	1122	1111	1113	1112
1322	1233	1232	1231	1223	1222	1221	1213	1212	1211	1133	1132	1131	1123	1122	1121	1113	1112	1111
1323	1232	1231	1233	1222	1221	1223	1212	1211	1213	1132	1131	1133	1122	1121	1123	1112	1111	1113
1331	1221	1223	1222	1211	1213	1212	1231	1233	1232	1121	1123	1122	1111	1113	1112	1131	1133	1132
1332	1223	1222	1221	1213	1212	1211	1233	1232	1231	1123	1122	1121	1113	1112	1111	1133	1132	1131
1333	1222	1221	1223	1212	1211	1213	1232	1231	1233	1122	1121	1123	1112	1111	1113	1132	1131	1133
2111	3111	3113	3112	3131	3133	3132	3121	3123	3122	3311	3313	3312	3331	3333	3332	3321	3323	3322
2112	3113	3112	3111	3133	3132	3131	3123	3122	3121	3313	3312	3311	3333	3332	3331	3323	3322	3321
2113	3112	3111	3113	3132	3131	3133	3122	3121	3123	3312	3311	3313	3332	3331	3333	3322	3321	3323
2121	3131	3133	3132	3121	3123	3122	3111	3113	3112	3331	3333	3332	3321	3323	3322	3311	3313	3312
2122	3133	3132	3131	3123	3122	3121	3113	3112	3111	3333	3332	3331	3323	3322	3321	3313	3312	3311
2123	3132	3131	3133	3122	3121	3123	3112	3111	3113	3332	3331	3333	3322	3321	3323	3312	3311	3313
2131	3121	3123	3122	3111	3113	3112	3131	3133	3132	3321	3323	3322	3311	3313	3312	3331	3333	3332
2132	3123	3122	3121	3113	3112	3111	3133	3132	3131	3323	3322	3321	3313	3312	3311	3333	3332	3331
2133	3122	3121	3123	3112	3111	3113	3132	3131	3133	3322	3321	3323	3312	3311	3313	3332	3331	3333
2211	3311	3313	3312	3331	3333	3332	3321	3323	3322	3211	3213	3212	3231	3233	3232	3221	3223	3222
2212	3313	3312	3311	3333	3332	3331	3323	3322	3321	3213	3212	3211	3233	3232	3231	3223	3222	3221
2213	3312	3311	3313	3332	3331	3333	3322	3321	3323	3212	3211	3213	3232	3231	3233	3222	3221	3223
2221	3331	3333	3332	3321	3323	3322	3311	3313	3312	3231	3233	3232	3221	3223	3222	3211	3213	3212
2222	3333	3332	3331	3323	3322	3321	3313	3312	3311	3233	3232	3231	3223	3222	3221	3213	3212	3211
2223	3332	3331	3333	3322	3321	3323	3312	3311	3313	3232	3231	3233	3222	3221	3223	3212	3211	3213
2231	3321	3323	3322	3311	3313	3312	3331	3333	3332	3221	3223	3222	3211	3213	3212	3231	3233	3232
2232	3323	3322	3321	3313	3312	3311	3333	3332	3331	3223	3222	3221	3213	3212	3211	3233	3232	3231
2233	3322	3321	3323	3312	3311	3313	3332	3331	3333	3222	3221	3223	3212	3211	3213	3232	3231	3233
2311	3211	3213	3212	3231	3233	3232	3221	3223	3222	3111	3113	3112	3131	3133	3132	3121	3123	3122
2312	3213	3212	3211	3233	3232	3231	3223	3222	3221	3113	3112	3111	3133	3132	3131	3123	3122	3121
2313	3212	3211	3213	3232	3231	3233	3222	3221	3223	3112	3111	3113	3132	3131	3133	3122	3121	3123
2321	3231	3233	3232	3221	3223	3222	3211	3213	3212	3131	3133	3132	3121	3123	3122	3111	3113	3112
2322	3233	3232	3231	3223	3222	3221	3213	3212	3211	3133	3132	3131	3123	3122	3121	3113	3112	3111
2323	3232	3231	3233	3222	3221	3223	3212	3211	3213	3132	3131	3133	3122	3121	3123	3112	3111	3113
2331	3221	3223	3222	3211	3213	3212	3231	3233	3232	3121	3123	3122	3111	3113	3112	3131	3133	3132
2332	3223	3222	3221	3213	3212	3211	3233	3232	3231	3123	3122	3121	3113	3112	3111	3133	3132	3131
2333	3222	3221	3223	3212	3211	3213	3232	3231	3233	3122	3121	3123	3112	3111	3113	3132	3131	3133
3111	2111	2113	2112	2131	2133	2132	2121	2123	2122	2311	2313	2312	2331	2333	2332	2321	2323	2322
3112	2113	2112	2111	2133	2132	2131	2123	2122	2121	2313	2312	2311	2333	2332	2331	2323	2322	2321
3113	2112	2111	2113	2132	2131	2133	2122	2121	2123	2312	2311	2313	2332	2331	2333	2322	2321	2323
3121	2131	2133	2132	2121	2123	2122	2111	2113	2112	2331	2333	2332	2321	2323	2322	2311	2313	2312
3122	2133	2132	2131	2123	2122	2121	2113	2112	2111	2333	2332	2331	2323	2322	2321	2313	2312	2311
3123	2132	2131	2133	2122	2121	2123	2112	2111	2113	2332	2331	2333	2322	2321	2323	2312	2311	2313
3131	2121	2123	2122	2111	2113	2112	2131	2133	2132	2321	2323	2322	2311	2313	2312	2331	2333	2332
3132	2123	2122	2121	2113	2112	2111	2133	2132	2131	2323	2322	2321	2313	2312	2311	2333	2332	2331
3133	2122	2121	2123	2112	2111	2113	2132	2131	2133	2322	2321	2323	2312	2311	2313	2332	2331	2333
3211	2311	2313	2312	2331	2333	2332	2321	2323	2322	2211	2213	2212	2231	2233	2232	2221	2223	2222
3212	2313	2312	2311	2333	2332	2331	2323	2322	2321	2213	2212	2211	2233	2232	2231	2223	2222	2221
3213	2312	2311	2313	2332	2331	2333	2322	2321	2323	2212	2211	2213	2232	2231	2233	2222	2221	2223
3221	2331	2333	2332	2321	2323	2322	2311	2313	2312	2231	2233	2232	2221	2223	2222	2211	2213	2212
3222	2333	2332	2331	2323	2322	2321	2313	2312	2311	2233	2232	2231	2223	2222	2221	2213	2212	2211
3223	2332	2331	2333	2322	2321	2323	2312	2311	2313	2232	2231	2233	2222	2221	2223	2212	2211	2213
3231	2321	2323	2322	2311	2313	2312	2331	2333	2332	2221	2223	2222	2211	2213	2212	2231	2233	2232
3232	2323	2322	2321	2313	2312	2311	2333	2332	2331	2223	2222	2221	2213	2212	2211	2233	2232	2231
3233	2322	2321	2323	2312	2311	2313	2332	2331	2333	2222	2221	2223						

	1311	1312	1313	1321	1322	1323	1331	1332	1333	2111	2112	2113	2121	2122	2123	2131	2132	2133
1111	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1112	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1113	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1121	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1122	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1123	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1131	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1132	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1133	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1211	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1212	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1213	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1221	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1222	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1223	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1231	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1232	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1233	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1311	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1312	1313	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1313	1312	1311	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1321	1331	1333	1332	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1322	1333	1332	1331	1323	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1323	1332	1331	1333	1322	1321	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1331	1321	1323	1322	1311	1313	1312	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1332	1323	1322	1321	1313	1312	1311	1333	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1333	1322	1321	1323	1312	1311	1313	1332	1331	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2111	3211	3213	3212	3231	3233	3232	3221	3223	3222	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2112	3213	3212	3211	3233	3232	3231	3223	3222	3221	2113	—	—	—	—	—	—	—	—
2113	3212	3211	3213	3232	3231	3233	3222	3221	3223	2112	2111	—	—	—	—	—	—	—
2121	3231	3233	3232	3221	3223	3222	3211	3213	3212	2131	2133	2132	—	—	—	—	—	—
2122	3233	3232	3231	3223	3222	3221	3213	3212	3211	2133	2132	2131	2123	—	—	—	—	—
2123	3232	3231	3233	3222	3221	3223	3212	3211	3213	2132	2131	2133	2122	2121	—	—	—	—
2131	3221	3223	3222	3211	3213	3212	3231	3233	3232	2121	2123	2122	2111	2113	2112	2133	—	—
2132	3223	3222	3221	3213	3212	3211	3233	3232	3231	2123	2122	2121	2113	2112	2111	2132	2131	—
2133	3222	3221	3223	3212	3211	3213	3232	3231	3233	2122	2121	2123	2112	2111	2113	2132	2131	—
2211	3111	3113	3112	3131	3133	3132	3121	3123	3122	2311	2313	2312	2331	2333	2332	2321	2323	2322
2212	3113	3112	3111	3133	3132	3131	3123	3122	3121	2313	2312	2311	2333	2332	2331	2323	2322	2321
2213	3112	3111	3113	3132	3131	3133	3122	3121	3123	2312	2311	2313	2332	2331	2333	2322	2321	2323
2221	3131	3133	3132	3121	3123	3122	3111	3113	3112	2331	2333	2332	2321	2323	2322	2311	2313	2312
2222	3133	3132	3131	3123	3122	3121	3113	3112	3111	2333	2332	2331	2323	2322	2321	2313	2312	2311
2223	3132	3131	3133	3122	3121	3123	3112	3111	3113	2332	2331	2333	2322	2321	2323	2312	2311	2313
2231	3121	3123	3122	3111	3113	3112	3131	3133	3132	2321	2323	2322	2311	2313	2312	2331	2333	2332
2232	3123	3122	3121	3113	3112	3111	3133	3132	3131	2323	2322	2321	2313	2312	2311	2333	2332	2331
2233	3122	3121	3123	3112	3111	3113	3132	3131	3133	2322	2321	2323	2312	2311	2313	2332	2331	2333
2311	3311	3313	3312	3331	3333	3332	3321	3323	3322	2211	2213	2212	2231	2233	2232	2221	2223	2222
2312	3313	3312	3311	3333	3332	3331	3323	3322	3321	2213	2212	2211	2233	2232	2231	2223	2222	2221
2313	3312	3311	3313	3332	3331	3333	3322	3321	3323	2212	2211	2213	2232	2231	2233	2222	2221	2223
2321	3331	3333	3332	3321	3323	3322	3311	3313	3312	2231	2233	2232	2221	2223	2222	2211	2213	2212
2322	3333	3332	3331	3323	3322	3321	3313	3312	3311	2233	2232	2231	2223	2222	2221	2213	2212	2211
2323	3332	3331	3333	3322	3321	3323	3312	3311	3313	2232	2231	2233	2222	2221	2223	2212	2211	2213
2331	3321	3323	3322	3311	3313	3312	3331	3333	3332	2221	2223	2222	2211	2213	2212	2231	2233	2232
2332	3323	3322	3321	3313	3312	3311	3333	3332	3331	2223	2222	2221	2213	2212	2211	2233	2232	2231
2333	3322	3321	3323	3312	3311	3313	3332	3331	3333	2222	2223	2222	2212	2213	2211	2232	2231	2233
3111	2211	2213	2212	2231	2233	2232	2221	2223	2222	1111	1113	1112	1131	1133	1132	1121	1123	1122
3112	2213	2212	2211	2233	2232	2231	2223	2222	2221	1113	1112	1111	1133	1132	1131	1123	1122	1121
3113	2212	2211	2213	2232	2231	2233	2222	2221	2223	1112	1111	1113	1132	1131	1133	1122	1121	1123
3121	2231	2233	2232	2221	2223	2222	2211	2213	2212	1131	1133	1132	1121	1123	1122	1111	1113	1112
3122	2233	2232	2231	2223	2222	2221	2213	2212	2211	1133	1132	1131	1123	1122	1121	1113	1112	1111
3123	2232	2231	2233	2222	2221	2223	2212	2211	2213	1132	1131	1133	1122	1121	1123	1112	1111	1113
3131	2221	2223	2222	2211	2213	2212	2231	2233	2232	1121	1123	1122	1111	1113	1112	1131	1133	1132
3132	2223	2222	2221	2213	2212	2211	2233	2232	2231	1123	1122	1121	1113	1112	1111	1133	1132	1131
3133	2222	2221	2223	2212	2211	2213	2232	2231	2233	1122	1121	1123	1112	1111	1113	1132	1131	1133
3211	2111	2113	2112	2131	2133	2132	2121	2123	2122	1311	1313	1312	1331	1333	1332	1321	1323	1322
3212	2113	2112	2111	2133	2132	2131	2123	2122	2121	1313	1312	1311	1333	1332	1331	1323	1322	1321
3213	2112	2111	2113	2132	2131	2133	2122	2121	2123	1312	1311	1313	1332	1331	1333	1322	1321	1323
3221	2131	2133	2132	2121	2123	2122	2111	2113	2112	1331	1333	1332	1321	1323	1322	1311	1313	1312
3222	2133	2132	2131	2123	2122	2121	2113	2112	2111	1333	1332	1331	1323	1322	1321	1313	1312	1311
3223	2132	2131	2133	2122	2121	2123	2112	2111	2113	1332	1331	1333	1322	1321	1323	1312	1311	1313
3231	2121	2123	2122	2111	2113	2112	2131	2133	2132	1321	1323	1322	1311	1313	1312	1331	1333	1332
3232	2123	2122	2121	2113	2112	2111	2133	2132	2131	1323	1322	1321	1313	1312	1311	1333	1332	1331
3233	2122	2121	2123	2112	2111	2113	2132	2131	2133	1322	1321	1323	1312	1311	1313	1332	1331	1333
3311	2311	2313	2312	2331	2333	2332	2321	2323	2322	1211	1213	1212	1231	1233	1232	1221	1223	1222
3312	2313	2312	2311	2333	2332	2331	2323	2322	2321	1213	1212	1211	1233	1232	1231	1223	1222	1221
3313	2312	2311	2313	2332	2331	2333	2322	2321	2323	1212	1211	1213	1232	1231	1233	1222	1221	1223
3321	2331	2333	2332	2321	2323	2322	2311	2313	2312	1231	1233	1232	1221	1223	1222	1211	1213	1212
3322	2333	2332	2331	2323	2322	2321	2313	2312	2311	1233	1232	1231	1223	1222	1221	1213	1212	1211
3323	2332	2331	2333	2322	2321	2323	2312											



	3111	3112	3113	3121	3122	3123	3131	3132	3133	3211	3212	3213	3221	3222	3223	3231	3232	3233
1111	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1112	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1113	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1121	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1122	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1123	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1131	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1132	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1133	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1211	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1212	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1213	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1221	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1222	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1223	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1231	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1232	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1233	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1311	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1312	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1313	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1321	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1322	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1323	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1331	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1332	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1333	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2111	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2112	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2113	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2121	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2122	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2123	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2131	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2132	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2133	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2211	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2212	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2213	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2221	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2222	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2223	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2231	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2232	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2233	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2311	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2312	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2313	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2321	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2322	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2323	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2331	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2332	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2333	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3111	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3112	3113	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3113	3112	3111	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3121	3131	3133	3132	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3122	3133	3132	3131	3123	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3123	3132	3131	3133	3122	3121	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3131	3121	3123	3122	3111	3113	3112	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3132	3123	3122	3121	3113	3112	3111	3133	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3133	3122	3121	3123	3112	3111	3113	3132	3131	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3211	3311	3313	3312	3331	3333	3332	3321	3323	3322	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3212	3313	3312	3311	3333	3332	3331	3323	3322	3321	3213	-	-	-	-	-	-	-	-
3213	3312	3311	3313	3332	3331	3333	3322	3321	3323	3212	3211	-	-	-	-	-	-	-
3221	3331	3333	3332	3321	3323	3322	3311	3313	3312	3231	3233	3232	-	-	-	-	-	-
3222	3333	3332	3331	3323	3322	3321	3313	3312	3311	3233	3232	3231	3223	-	-	-	-	-
3223	3332	3331	3333	3322	3321	3323	3312	3311	3313	3232	3231	3233	3222	3221	-	-	-	-
3231	3321	3323	3322	3311	3313	3312	3331	3333	3332	3221	3223	3222	3221	3213	3212	-	-	-
3232	3323	3322	3321	3313	3312	3311	3333	3332	3331	3223	3222	3221	3213	3212	3211	3233	-	-
3233	3322	3321	3323	3312	3311	3313	3332	3331	3333	3222	3221	3223	3212	3211	3213	3232	3231	-
3311	3211	3213	3212	3231	3233	3232	3221	3223	3222	3111	3113	3112	3131	3133	3132	3121	3123	3122
3312	3213	3212	3211	3233	3232	3231	3223	3222	3221	3113	3112	3111	3133	3132	3131	3123	3122	3121
3313	3212	3211	3213	3232	3231	3233	3222	3221	3223	3112	3111	3113	3132	3131	3133	3122	3121	3123
3321	3231	3233	3232	3221	3223	3222	3211	3213	3212	3131	3133	3132	3121	3123	3122	3111	3113	3112
3322	3233	3232	3231	3223	3222	3221	3213	3212	3211	3133	3132	3131	3123	3122	3121	3113	3112	3111
3323	3232	3231	3233	3222	3221	3223	3212	3211	3213	3132	3131	3133	3122	3121	3123	3112	3111	3113
3331	3221	3223	3222	3211	3213	3212	3231	3233	3232	3121	3123	3122	3111	3113	3112	3131	3133	3132
3332	3223	3222	3221	3213	3212	3211	3233	3232	3231	3123	3122	3121	3113	3112	3111	3133	3132	3131
3333	3222	3221	3223	3212	3211	3213	3232	3231	3233	3122	3121	3123	3112	3111	3113	3132	3131	3133



◆ **觀察**

1. 利用編碼好的 SET 牌，列出所有 SET 情況，我們發現其中每張牌均出現 40 次，81 張牌總共出現 3240 次。在 3240 次中，以三張牌成為一組 SET 來看，會重複三次，再將  $3240 \div 3 = 1080$ ，故我們得知 81 張牌總共可以組成 1080 種不同的 SET。

◆ **數據結果整理**

控制屬性	牌的張數 n	SET 組數	計算方法 (一)	計算方法 (二)
顏數填	3	1	$3 \times 1 \div 3 = 1$	$3 \times 2 \times 1 \div 6 = 1$
顏數	9	12	$9 \times 4 \div 3 = 12$	$9 \times 8 \times 1 \div 6 = 12$
顏	27	117	$27 \times 13 \div 3 = 117$	$27 \times 26 \times 1 \div 6 = 117$
×	81	1080	$81 \times 40 \div 3 = 1080$	$81 \times 80 \times 1 \div 6 = 1080$

◆ **深入探討**：再深入研究單張牌（舉例：牌 2323），列出與其配對的 40 組 SET

主牌	組數	SET 配對		SET 類型
2323	1	1111	3232	4B
	2	1112	3231	4B
	3	1113	3233	3B1A
	4	1121	3222	3B1A
	5	1122	3221	3B1A
	6	1123	3223	2B2A
	7	1131	3212	4B
	8	1132	3211	4B
	9	1133	3213	3B1A
	10	1211	3132	4B
	11	1212	3131	4B
	12	1213	3133	3B1A
	13	1221	3122	3B1A
	14	1222	3121	3B1A
	15	1223	3123	2B2A
	16	1231	3112	4B
	17	1232	3111	4B
	18	1233	3113	3B1A
	19	1311	3332	3B1A
	20	1312	3331	3B1A
	21	1313	3333	2B2A
	22	1321	3322	2B2A
	23	1322	3321	2B2A
	24	1323	3323	1B3A
	25	1331	3312	3B1A
	26	1332	3311	3B1A
	27	1333	3313	2B2A
	28	2111	2232	3B1A
	29	2112	2231	3B1A
	30	2113	2233	2B2A
	31	2121	2222	2B2A
	32	2122	2221	2B2A
	33	2123	2223	1B3A
	34	2131	2212	3B1A
	35	2132	2211	3B1A
	36	2133	2213	2B2A
	37	2311	2332	2B2A
	38	2312	2331	2B2A
	39	2313	2333	1B3A
	40	2321	2322	1B3A

◆ **說明：** 根據上表，統計主牌 2323 所配對出的 40 種 SET 情況，其 SET 類型統計如下。

「2323」	SET 類型				合計
	4B	3B1A	2B2A	1B3A	
出現次數	8	16	12	4	40

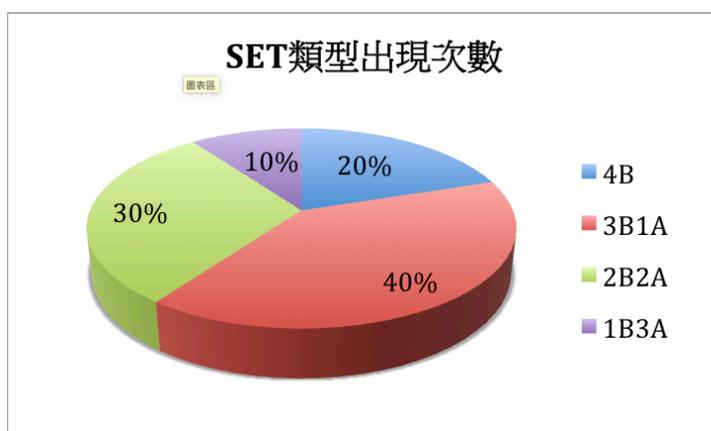
◆ **觀察**

1. 配合研究二的 SET 類型，再深入研究單張牌 (ex. 2323)，將單張牌的 SET 類型記錄如下：
2. 利用數學計算，計算出 40 次所出現的 SET 類型分配。
3. 列出來的 40 組 SET，裡面的牌均不重複，即是抽出一張牌當作主牌後，剩下的 80 張牌，會兩兩一組，與主組形成 SET。我們發現每張牌都會有這樣的情況發生。

項次	屬性				類型	將 40 種情況再深入分析	
	顏色	數量	填充	形狀		出現次數	小計
1	B	B	B	B	4B	8	8
2	A	B	B	B	3B1A	4	16
3	B	A	B	B		4	
4	B	B	A	B		4	
5	B	B	B	A		4	
6	A	A	B	B	2B2A	2	12
7	A	B	A	B		2	
8	A	B	B	A		2	
9	B	A	A	B		2	
10	B	A	B	A		2	
11	B	B	A	A		2	
12	A	A	A	B	1B3A	1	4
13	A	A	B	A		1	
14	A	B	A	A		1	
15	B	A	A	A		1	
合計						40	

◆ **小結**

1. 根據研究二，我們發現 SET 的類型可以分為 15 種，其中以 2B2A 的類型出現六種為最多，但在仔細統計單張牌出現次數，發現出現最多次數的，反而是 3B1A 這一種，40 次就出現了 16 次，占了全部的 40%。因此，遊戲中尋找 3B1A 的 SET，機率將高達 40%。
2. 我們將出現的類型繪製成圓形圖，以利觀察，如下表所示：



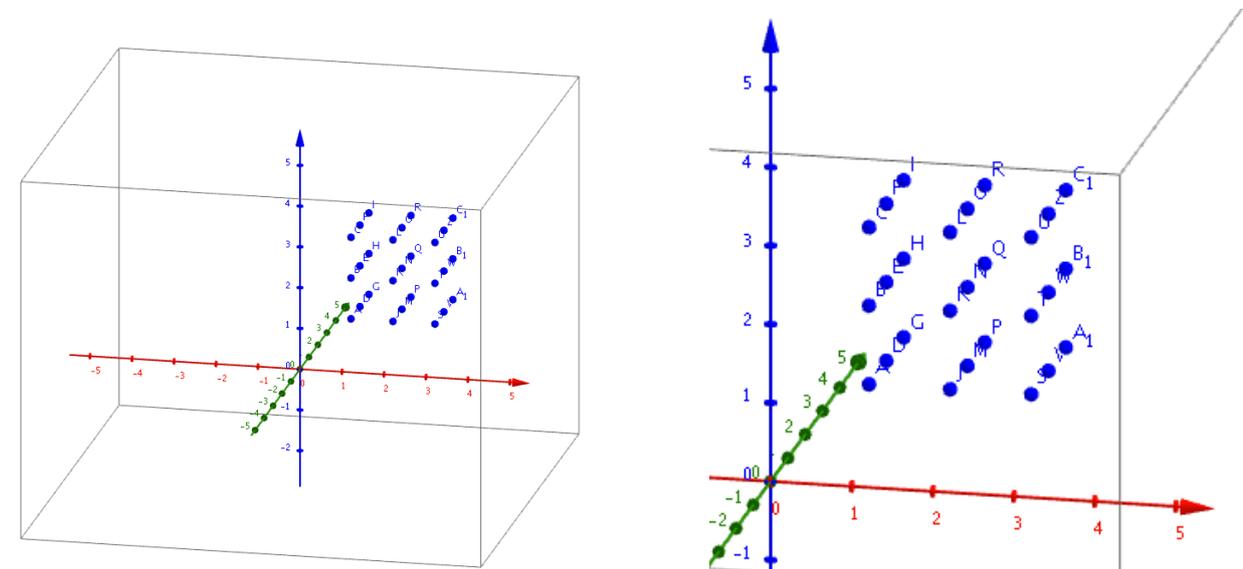
3. 利用上面的研究結果，我們亦可以推出 1080 組的 SET 中，不同類型所占的次數，如下表：

SET 類型	出現百分比	佔有次數	
		計算	次數
4B	20%	$1080 \times 20\%$	216
3B1A	40%	$1080 \times 40\%$	432
2B2A	30%	$1080 \times 30\%$	324
1B3A	10%	$1080 \times 10\%$	108
合計			1080 次

◆ **空間上延伸思考**：81 張 SET 牌包含 4 個屬性，每個屬性有 3 個元素，可以組成 SET 的組合，其實 3 張牌可以看成是空間上的 3 個點，這 3 個點會是在同一條線上 (colinear)。在 SET 牌的遊戲中，任取兩張 SET 牌，只會有一張牌與其形成 SET，而在 SET 牌的空間中，任取兩點連成一線，將直線延長，就會接到第三點，即三點共線的概念。

1. 一種屬性 (3 張) 為一度空間：一條線。
2. 兩種屬性 (9 張牌) 為二度空間：平面九宮格
3. 三個屬性 (27 張牌) 為三度空間：立體三個九宮格
4. 四個屬性 (81 張牌) 為四度空間：立體九個九宮格

ex. 利用 GeoGebra 軟體，我們利用我們的編碼，繪製出三度空間的 27 點。如下圖：



## 陸、討論

### 一、研究一

1. SET 牌由 4 個屬性所組成，其中每個屬性又包含 3 種不同的元素，故會有  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  張不同的牌。
2. 我們分析 SET 牌的類型，發現總共可以分為 4B、3B1A、2B2A、1B3A 四種，再根據 4 個屬性去分析，總共可以找到 15 種情況。
3. SET 牌由 4 個屬性所組成，4 個屬性可以完全相同或是完全不同，故我們可以用  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  去計算，但不可能出現 4A，四個屬性均相同（81 張牌均為獨立不相同），故  $16 - 1 = 15$  種。

### 二、研究二

1. 透過模擬計算，我們算出 12 張牌會出現 SET 的機率為 58.57%，故以此張數來進行遊戲，難度適中，不會太容易或太難找到 SET。
2. 出現 SET 的機率，隨著張數增加而增加，到了 15 張牌以後，出現 SET 的機率已經高達 80% 以上，與我們實際遊戲的情況吻合，幾乎在 15 張牌的時候都可以找到 SET；到了 21 張牌，出現 SET 的機率為 100%。

n 張牌	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
SET 機率	1.27%	3.85%	7.79%	13.16%	18.67%	27.03%	34.25%	41.67%	49.30%	58.57%
n 張牌	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
SET 機率	66.67%	72.06%	82.09%	87.88%	89.23%	95.31%	96.82%	98.39%	100%	

### 三、研究三

1. 透過實際操作和程式設計模擬遊戲進行，計算每盤會剩下的張數，我們發現到兩者的結果還是有些不同。但我們相信樣本數越高，將越接近準確值。模擬 100000 盤的結果，剩下 9 張的無法形成 SET 的機率高達 50%。
2. 此外，我們一直認為剩下張數為 3 張的機率應該也會很高，結果是 0%。

### 四、研究四

1. 接著我們思考如何用完 81 張牌的方法，找到了 12 組關鍵密碼，透過關鍵密碼，我們可以找到很多不同的方法，讓 81 張牌重新組合排列，不重複形成 27 組 SET。
2. 關鍵密碼包括 (1) (1,2,3) (4,5,6) (7,8,9)、(2) (1,4,7) (2,5,8) (3,6,9)  
(3) (1,5,9) (2,6,7) (3,4,8)、(4) (1,6,8) (2,4,9) (3,5,7)

### 五、研究五

1. 最後我們破解所以的 SET 情況，發現 81 張不同的 SET 牌，三張一組，總共可以配對出 1080 組不同的 SET： $(40 \times 81) \div 3 = 1080$ 。
2. 再深入研究 1080 組 SET 當中的 SET 類型，我們發現到 3B1A 的情況為最多，出現了 432 次，出現機率為 40%。故遊戲中往這方面尋找，將更容易獲勝。

## 柒、結論

本研究針對「SET 牌」這個桌遊來進行全面性的深入研究，回想起第一次玩這個桌遊，我們所產生的疑問，最後的結論，我們希望再回到桌遊本身來做總結：

- 一、**SET 牌由 81 張不同的牌所組成**：每張 SET 牌均包含 4 個屬性，每個屬性又包含 3 個不同的元素。像是另外一組桌遊-IOTA 形色牌，每張牌包含 3 個屬性，每個屬性包含 4 個不同的元素，則有 64 張牌（ $4 \times 4 \times 4 = 64$ ）
- 二、**至少發 21 張牌，一定會出現 SET**：經過我們模擬和計算，我們發現當發到第 21 張牌的時候，一定會出現一組 SET。儘管如此，在實際遊戲中，我們大多在 15 張牌就可以找到 SET，頂多在 18 張牌時也可以找得到。這一點可以由數學計算的機率可以證明，因為在 18 張牌，出現 SET 的機率已經高達 95.31%。
- 三、**利用「關鍵密碼」，可以將 81 張 SET 牌，拆解成 27 組 SET**：透過我們找出來的關鍵密碼，我們可以將 81 張不同的 SET 牌，做出很多不同的排列組合和分配，並且可以將 81 張牌都用完，形成 27 組 SET。
- 四、**一副 81 張的 SET 牌，可以湊出 1080 組不同的 SET**：利用 SET 牌的 4 個屬性，我們將每張牌進行編碼，亦即將複雜的「圖案」轉換成「數字」的形式，亦又利於我們尋找 SET，透過編碼好的數字，我們破解出 SET 牌總共可以排出 1080 組不同的 SET。此外也可以用數學上的組合機率的方式計算出來： $(81 \times 80 \times 1) \div 6 = 1080$
- 五、**三點共線形成 SET**：根據 SET 牌的四個屬性（顏色、數量、填充、形狀），每個屬性代表一個空間，我們將其想像成散佈的四度空間的 81 個點，這 81 個點，每三個點連成一線，即是一組 SET。81 個 SET 點交織出 1080 條美麗的線段，即是屬於 SET 牌的數學美麗形體！

## 捌、參考資料及其他

- 一、翰林文教事業（2015）。國民小學數學學習領域第十一冊第六單元統計圖表。台北：翰林文教事業股份有限公司。
- 二、翰林文教事業（2015）。國民小學數學學習領域第十二冊第二單元怎樣解題。台北：翰林文教事業股份有限公司。

## 【評語】 080408

本研究的作品命名頗具巧思，研究過程的說明亦清楚明確。惟進行探究前，可做相關文獻的搜尋，並於作品中說明。除可使討論的問題更具獨特性，也能相對提昇本研究的價值。