由電腦與數學的相互應用
談「拈」(NIM) 遊戲的必勝策略

高中組應用科學科第一名

國立華僑實驗高級中學

作　　者：嚴文亨、廖文佐
　　　　　徐正誠
指導教師：曾政清

一、研究動機

「拈」是我國民間一種流行很廣的遊戲，甚至在歐美地區亦廣為風行，由於曾在坊間數學趣談的書籍中，了解其中的一些理論架構，與電腦邏輯的思考模式頗為接近，遂興起了設計電腦程式的念頭。

二、研究目的

由於「拈」這個遊戲本身具有數學理論，我們希望嘗試藉由嚴密邏輯的數學推演結合電腦本身快速分析驗證的特性，研究出一種必勝策略。並將「拈」的傳統玩法推廣至所有的變型玩法，使得「拈」的問題能一併解決；亦可藉此了解我們老祖宗們是如何神算。

三、研究設備器材

(一) IBM PC/AT 相容主機一部。
(二) 24pin 列表機一台 (NEC P5300)。
(三)磁片數張。
(四)倚天中文系統 V1.6。
(五)人腦三具。

四、研究過程或方式

(一)事實上有關「拈」的專文研究並不多見（僅收集到三篇）而且大多是「拈」的傳統玩法（基本型）即「撿好三堆石子，每堆數目不拘，甲乙兩人輪流自其中一堆拿取石子，拿多少隨意。（至少拿一個），但不得同時自兩堆拿取，最後拿光石子的人贏。」

上述的傳統玩法其理論架構均源自於 Charles Bouton 的二進位表示法，即將拈的各堆石頭數目轉換成二進位如此便可將「拈」的所有型態區分成二大類。

(1)偶性型態的必勝殘型。

(2)奇性型態的必敗殘型。

而且當一方佔有偶性型態之後，即可按照一定規則的邏輯拿法，一直佔有偶性型態到底。即直到你佔有｛ 0 ， 0 ， 0 ｝，即三堆石子均拿光宣告勝利爲止。

(二)此部份的數學理論和電腦本身的邏輯極爲接近，因此稍加轉換思考模式便可以將程式設計出來。

至於三堆石子以上的玩法，其致勝之道仍和三堆相同，因此稍加修改程式即可解決。

(三)將「拈」的傳統玩法，稍加推廣，即限制每次所拿的石頭個數（例如一次最多只能拿 7 個）如此一來拈的致勝規則必需加以重新尋找。

由於此部份欠缺完整的理論架構，甚至找不到任何一篇文獻可供參考，因此只好回過頭研究「拈推廣型玩法」中的數學理論。

(四)許多的數學問題，如果在極端化的狀況下加以考慮，問題常會變得比較簡單，因此我們首先研究只有一堆石子 ($n = 1$ ，n 表堆數)，限制拿取個數最多爲 2 （ $m = 2$ ，m 表限制數 ）的玩法，經過數學運算式的推演，和必勝規律的尋求，我們發現一定的邏輯拿法可以致勝。

(五)因此我們想推測在一堆時限制個數玩法之必勝殘型利用電腦模擬拈的玩法（一邊 Random ，一邊採取推測的邏輯拿法，透過充分有系統步驟的模擬各種狀況，我們便得到了一些電腦模擬的結果。

(六)接下來我們把目標放在兩堆石頭 （ $n = 2$ ）限制個數的玩法，由於 $n = 1$ 是 $n = 2$ 的特殊化結果，我們猜想其中必有某種對應關係存在，因此我們想利用，拈的非「必勝殘型」即爲「必敗殘型」的特性，模擬兩堆石子的限制個數玩法，首先取 $m = 2$ 每次最多拿兩個，而將各種必勝狀況列印（即將必勝殘型列印出）在事先設計的 （ X ， Y ）座標平面上，其中 X ，Y 分別表兩堆石子的個數。

(1)考慮 $X = 0$ 或 $Y = 0$ 即圖形在 X 軸或 Y 軸上，其必勝情況必需和前面所提「一堆石頭的必勝狀況」相吻合。

(2)而由序對 （ X ， Y ）本身並無所謂的次序關係，如此圖形必對稱在 $X = Y$ 直線上。

⑶當限制個數 m 大於每一堆石子數時，如此拈推廣型玩法又變成拈的基本型玩法。

經過上述三種狀況的考慮，透過電腦的各種模擬分析和快速驗證，我們便可以由 m = 2 一步一步推展到 m = 3 ， m = 4 及其他的情況。

㈦緊接著如法泡製得到 n = 3 限制玩法規則：

藉由規律的尋求我們利用數學運算，歸納出 n ＞ 3 以上的情況，再藉由電腦的驗證，很快地我們便可發現了拈的「推廣型」之必勝策略。

㈧至於程式設計部份，我們曾考慮建立必勝殘型的資料庫，再藉由搜尋的方法，以制定必勝的邏輯拿法，可惜此種方式費時且資料庫過於龐大不易設計。因此我們想藉由數學式子去歸納出必勝或必敗型態經過反覆的研討，我們運用了中國的餘式定理巧妙地將 n ， m 各種狀況予以「餘數表」判斷出必敗與必勝型態，以供程式設計，邏輯拿取使用。

㈨有關 WYTHOFF 的玩法（拈的變型玩法之一）即兩堆石子兩人輪流自其中取一些棋子，不過每人每次只能自其中任何一堆取出任意數目的棋子或是同時在兩堆中取走相同數目的棋子。

有關此部份的必勝策略，可以利用數學上的費氏數列法，得其致勝之道。

五、研究結果

所設計的電腦程式已能利用所有歸納出的原理在公平的原則下與人競賽。

以下是本程式執行的部份結果(如下頁表)。

（限於篇幅未能把所有的程式列印出來，有興趣研究此程式者請洽國立華僑實驗高級中學科學館）。

六、討論

㈠由於拈的玩法本身牽涉到拿的先後次序，堆數，各堆石子數及遊戲的規則，因此理論架構本身所設計出的程式只能說是處於優勢罷了，並不可能百戰百勝。

㈡而對於一些深通「拈」道之士，死記某些遊戲本身的必勝殘型，仍可將電腦擊敗。尤其是懂得邏輯拿法的高手，如果先拈到了「必勝殘型」電腦頂多是採托延戰術期待對手失誤，才能反敗為勝否則終究也是會輸。

㈢但是如果數目較大堆數較多，再加上時間限制。

（譬如每十秒拿一次），個數限制（每次最多只能拿十個）等因素，除非是心算高手，否則縱使是選定先拿（先拿贏的機率較大）而電腦十之八九仍可

☆NIM主選單☆

1. 拈的規則介紹
2. 電腦摸擬示範
3. 進入遊戲程式
4. 結束本單元

請作選擇………

本遊戲可分爲下列五種:

(1) 拈的基本型玩法

(2) 拈的推廣型玩法

(3) 拈的變型(Wythoff)玩法

(4) 拈的其它玩法

(5) 拈推廣型(Wythoff)玩法

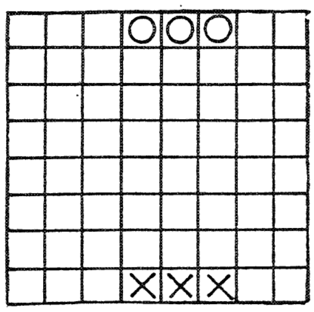
請選擇你要的玩法:(或按Esc回主選單)

能是最後的贏家。

七、結論

(一)電腦與數學相結合可以發揮很大的作用，而將拈的問題作一完整的分析。而且透過電腦我們可將拈的一些創新玩法（推廣型）加以研究，找出其必勝策略來，再經由數學式子的推廣及證明，我們可以建立一套致勝的理論。甚至程式只要經過部份修改，便可將拈的基本推廣兩型的特殊變型玩法解決，諸如：

型一：這種變形遊戲是在西洋棋盤上玩的，其玩法如下：在西洋棋盤上選定 3 行，雙方在底線擺上不同色的棋子（以○及×代表），如下圖所示棋子只能在該行上下移動，最後無法動自己的棋子者爲敗家。〔拈基本型變型〕

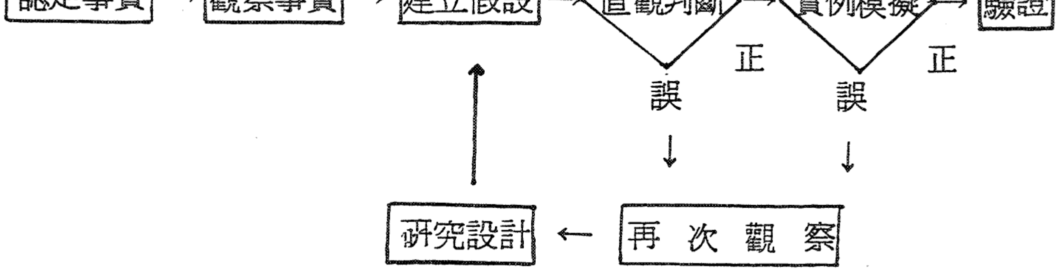


由此不難看到，這種變形等於「拈」的｛6，6，6｝的型態。先手者只要把一棋子走到底，使對手那行的棋子不能動；即佔有｛6，6，6｝的必勝殘型。其後一直保持｛o，n，n｝的型，即可致勝。

型二：兩個人輪流選定 1 ～ 10 之中的數將兩人所選的數相加，誰先到 100 誰便贏。〔拈推廣型變型〕

型三：將拈的玩法改成拿最後一顆石頭者輸。

(二)由以上的研究過程，我們可以發現許多策略的推理，似乎不斷地重覆著一套思考流程。



由於電腦高效率的運算分析與模擬，使我們在理論推測的驗證上及判斷的周全性上提供很大的幫助。

此次主題的結論或許不多，但在電腦與數學相互應用的思考方式上卻給了我們相當豐富的體驗和啓示，相信可供日後研究發展使用。

㈢透過此次的研究，我們了解電腦的重要特性之一便是在轉換邏輯思維上較爲容易，譬如對於一個習慣於「拿光者贏」的「拈」高手，要叫其適應「拿光者輸」的玩法恐怕在遊戲的思考上會有些許的困難，而對電腦程式本身而言卻甚爲簡單。

㈣有關 WYTHOFF 的變型玩法限於研究時間的因素，無法完全將其理論加以推廣至任意堆數。（即同時可取二堆以上的情形）實爲可惜。

不過我們已仔細歸納出一些原則輪廓，假以時日便可將拈的問題作一終結。

八、參考資料

*1.*數學世界的萬花筒　　黃敏晃著

牛頓出版社

（一個名爲「拈」的遊戲）　　P. 210 ～ P.　230

*2.*寓數學於遊戲第二輯　　趙文敏著

九章出版社

（拈㈠，拈㈡）　　P. 74 ～ P. 79

評語

針對「拈」這個遊戲的推廣型玩法，探討其數學理論，找出致勝的規則。在研究過程中，先用電腦模擬各種情況，歸納出必勝或必敗之殘型，並運用中國餘數定理，求出餘數判斷的方法，設計遊戲程式。作者對於這樣一個「人工智慧」的問題，從歸納、推理、到找出規則，充份表現其對於解決問題的科學精神及研究過程的細密思考，很值得獎勵。