

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩士論文

利用擺動系統研究失真與渾沌
Investigations of chaos and aliasing with oscillated system

研究生：黃佳琪

指導教授：陳永富 教授

中華民國 一百零一 年 六月

利用擺動系統研究失真與渾沌

Investigations of chaos and aliasing with oscillated system

研究生：黃佳琪

Student : Huang Chia Chi

指導教授：陳永富

Advisor : Yung-Fu Chen

國立交通大學
理學院科技與數位學習學程
碩士論文



Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年六月

利用擺動系統研究失真與渾沌

研究生：黃佳琪

指導教授：陳永富教授

國立交通大學理學院科技與數位學習學程

摘要

本論文主要是藉由蛇擺的擺動與彈簧擺的運動來研究失真效應與渾沌現象。首先介紹失真效應與渾沌現象，並以物理學中常見的簡諧運動為基礎，來介紹蛇擺與彈簧擺。一組非耦合單擺的擺動被稱為蛇擺，其擺動圖案有時看似行進波、有時是駐波、有時看似渾沌不明，而這組蛇擺的擺動週期是遠大於每一個組成單擺的擺動週期。而彈簧擺則是由一個富有彈性的彈簧和單擺所組成，此彈簧擺可以在三維空間中自由的擺動，其擺動的圖案時有規律、時而渾沌。其次，利用波函數來描述蛇擺的運動，再經由 mathcad 這套數學軟體來模擬蛇擺的擺動情形，並從中研究失真效應。最後，探討二維、三維的彈簧擺擺動情況，並討論改變初始條件時，彈簧擺運動軌跡之變化；並藉由 mathcad 模擬彈簧擺的二維、三維運動軌跡(改變初始位置和初始速度等參數)，且利用傅立葉轉換來探究彈簧擺擺動軌跡的規律與渾沌現象。

Investigations of chaos and aliasing with oscillated system

Student : Huang Chia Chi

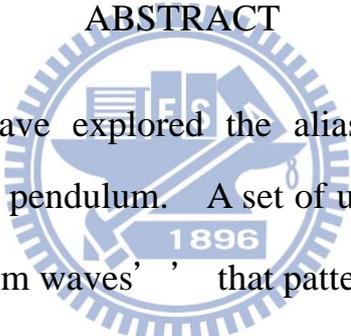
Advisor : Dr.Yung-Fu Chen

Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University

ABSTRACT

The logo of National Chiao Tung University is a circular seal. It features a central emblem with a book and a torch, surrounded by the university's name in Chinese and English. The year '1896' is inscribed at the bottom of the seal.

In this thesis, we have explored the aliasing effect and chaos with pendulum waves and spring pendulum. A set of uncoupled pendulums may be used to exhibit ‘ ‘pendulum waves’ ’ that patterns look like traveling waves, standing waves, and chaos. The pendulum patterns cycle spectacularly in a time that is large compared to the oscillation period of the individual pendulums. We derive a continuous function to explain the pendulum patterns using a simple equation for traveling waves in one dimension. We show that the cycling of the pendulum patterns arises from aliasing of this underlying continuous function. On the other hand, we investigate the trajectories of two dimensional and three dimensional spring pendulum as a function of its two control parameters (the initial position and velocity of pendulum). With the Fourier analysis, it shows that the dynamics of the spring pendulum is predominantly regular, while at special parameter values the majority of initial conditions lead to chaotic trajectories.

誌 謝

能夠完成本論文，首先要感謝永富教授的提攜，謝謝永富教授耐心的教導，永富教授對學生永遠是充滿愛心的關懷、溫和的語氣但是嚴格的態度來要求學生、對學生總是毫不保留的傾囊相授，讓學生受益良多！而在修習研究所課程的期間，課業學習和撰寫論文常常遇到困難，非常感謝興弛助教用心的帶領，從一開始的先備工具-強大的數學軟體 Mathcad 的使用方式介紹，一步一步教會我們撰寫程式，針對我們每週的課程做規劃和釋疑，幫我們擬定進度並教導我們專業知能，若是沒有興弛助教不厭其煩的教導，本論文無法順利完成！

再來，要感謝我最敬愛的公公、婆婆，他們無怨無悔的幫我帶兩個孩子，不斷的鼓勵我完成課業，體諒我每個假日都得到交大上課，無法回家探望他們，幫我撫慰孩子們思念媽媽的心情，讓我專心於課業無後顧之憂！而在這兩年的修業期間，我的先生非常體貼我，常常在下班時撐著疲憊的眼皮陪我讀書，找資料一起討論、放假時趕快搭車回家陪伴小孩，安慰我時常緊繃的情緒，家人的支持就是我進步的動力，謝謝您們！

最後，我要感謝我的父母給了我很多信心與支持，我的實驗室同學們：鳳蘭、錦玫、瑋涵、國寧、長壽彼此互相提醒和鼓勵，交大固態物理系的學長姐們的包容、交大理學院數位組和應科組同學們的愛戴，我要感謝的人太多了，謝謝所有幫助過我的人，讓我感覺學習是如此溫暖而美好！

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖表目錄	v
一、	緒論.....	1
1.1.	研究動機.....	1
1.2.	本論文結構.....	2
二、	週期性運動.....	3
2.1.	簡諧運動與單擺.....	3
2.1.1	簡諧運動.....	3
2.1.2	單擺.....	5
2.2.	古典彈子球台.....	6
2.2.1	方形彈子球檯.....	7
2.2.2	圓形彈子球檯.....	10
三、	基本定義與原理.....	13
3.1.	同餘與完全剩餘系.....	13
3.1.1	同餘的概念.....	13
3.1.2	完全剩餘系的性質.....	14
3.2.	失真效應.....	16
3.2.1	時間取樣頻率不足所造成的失真效應.....	16
3.2.2	空間取樣頻率不足所造成的失真效應.....	17
3.3.	渾沌現象.....	18
四、	蛇擺 Pendulum Waves.....	22
4.1.	蛇擺的組成.....	22
4.2.	蛇擺的失真現象.....	23
4.3.	分群與同餘.....	26
五、	彈簧擺 Spring Pendulum.....	30
5.1.	有限差分法.....	30
5.2.	二維與三維彈簧擺.....	32
5.3	傅立葉轉換.....	34
5.3.1	離散傅立葉轉換.....	34
5.3.2	快速傅立葉變換.....	35
5.4	彈簧擺的渾沌現象.....	36
六、	結論與未來展望.....	45
參考文獻	46

圖表目錄

圖 2-1	簡諧振盪.....	4
圖 2-2	單擺受力示意圖.....	5
圖 2-3	一維彈子球台.....	7
圖 2-4	形成一個振幅為 $a/2$ ，週期為 $2a/v$ 的三角.....	7
圖 2-5	二維彈子球台.....	9
圖 2-6	(p:q) 為有理數之二維彈子球台軌跡.....	9
圖 2-7	二維圓形彈子球台.....	11
圖 2-8	圓形彈子球檯軌跡.....	11
圖 2-9	圓形彈子球檯(無理數 $\sqrt{2}:1$).....	12
圖 3-1	時間取樣不足所造成的失真效應.....	16
圖 3-2	當格子畫的不夠細時，邊緣會呈現鋸齒狀.....	17
圖 3-3	左圖為 622×756 pixels，右圖為空間的 aliasing.....	17
圖 3-4	左圖為 the logistic map，右圖為 Evolution of the logistic map.....	19
圖 3-5	左圖為 the logistic map，右圖為 Evolution of the logistic map.....	20
圖 3-6	左圖為 the logistic map，右圖為 Evolution of the logistic map.....	20
圖 3-7	左圖為 the logistic map，右圖為 Evolution of the logistic map.....	21
圖 3-8	為固定 x_0 時，改變 μ 的 the logistic map.....	21
圖 4-1	蛇擺示意圖 (a)裝置設置圖 (b)整體示意圖.....	23
圖 4-2	蛇擺在不同時間下所呈現的結果.....	25
圖 4-3	蛇擺在不同時間下失真的結果.....	26
圖 4-4	蛇擺分群的現象.....	29
圖 5-1	彈簧擺表示圖.....	30
圖 5-2	彈簧擺.....	32
圖 5-3	$u=6$ 、 $V_{x0}=8.44$ (a)xy 平面軌跡 (b)傅立葉分析.....	42
圖 5-4	$u=4$ 、 $V_{x0}=3$ (a)xy 平面軌跡 (b)傅立葉分析.....	43
圖 5-5	$u=6$ 、 $V_{x0}=3.972$ (a)xy 平面軌跡 (b)傅立葉分析.....	43
圖 5-6	$u=6$ 、 $V_{x0}=3.972$ 、 $y=0.1$ (a)xy 平面軌跡 (b)傅立葉分析.....	44
表 3.1	同餘在答數上的表示.....	13
表 3.2	完全剩餘系在月曆上的表示.....	15
表 4.1	時間為 4 秒時，每個單擺的擺動情況.....	27
表 4.2	時間為 7 秒時，每個單擺的擺動情況.....	28
表 4.3	時間為 10 秒時，每個單擺的擺動情況.....	28
表 4.4	時間為 20 秒時，每個單擺的擺動情況.....	29
表 5.1	$u=4$ 時不同 V_{x0} 的二維彈簧擺軌跡.....	38
表 5.2	$u=6$ 時不同 V_{x0} 的二維彈簧擺軌跡.....	38

表 5.3	$u=6, V_{x0} = 8.44$ 時不同初始位置的二維彈簧擺軌跡.....	39
表 5.4	$u=6, V_{x0} = 4$ 時不同初始位置的二維彈簧擺軌跡.....	39
表 5.5	$u=6, V_{x0} = 8.44$ 時不同初始位置的二維彈簧擺軌跡與傅立葉分析...	40
表 5.6	$u=6, V_{x0} = 4$ 時不同初始位置的二維彈簧擺軌跡與傅立葉分析.....	41



第一章緒論

1.1.研究動機

我們生活的世界存在著許多周而復始的週期性運動，其中簡諧振盪可能是自然界中最普遍地運動形式：大海的波濤起伏、鐘擺的擺動、心臟的跳動、樹梢隨著微風輕輕搖晃...無所不在的簡諧振盪！小到微觀世界中的電子圍繞原子核的運動，大到太空中地球和其他行星繞太陽的運動，都是各種形式的簡諧振盪現象。

然而，在科技的日新月異發展之下，我們的 MP3、手機、示波器、顯示器、相機...不斷的標榜高畫數、低失真。那麼，單擺、彈簧擺是簡諧振盪中最基礎而重要的運動模式，我們能否以單擺這個簡諧振盪中最基礎而重要的運動模式描述失真的概念，並且藉由 MathCad 電腦軟描繪出單擺的運動軌跡，更能清楚地視覺化筆者想傳達的概念。

渾沌現象又稱蝴蝶效應，蝴蝶效應是在 1972 年，美國的氣象學家 Lorenz 提出。90 年代以後的科學家將其現象應用在科學上才說成「混沌理論」，曾經氣象學家 Edward Lorenz 發現，簡單的熱對流現象居然能引起令人無法想像的氣象變化，產生所謂的「蝴蝶效應」。亦即某地下大雪，經追根究底卻發現是受到幾個月前遠在異地的蝴蝶拍打翅膀產生氣流所造成的。一九六零年代，美國數學家 Stephen

Smale 發現，某些物體的行徑經過某種規則性的變化之後，隨後的發展並無一定的軌跡可尋，呈現失序的混沌狀態。

本論文主要有兩大部分，一部分為研究透過一連串非耦合的單擺形成一個的擺動系統，利用數學軟體不但給予視覺化的呈現，並且藉由這個擺動系統，可以分析研究失真的現象，讓人可以清楚了解失真的原理。另一部分為利用彈簧與單擺的結合，透過數值運算，我們可以描繪出彈簧擺的軌跡，藉由不同參數的改變，可以觀察其軌跡的變化，並且利用傅立葉分析，給予定量的討論。



1.2. 論文架構

本論文第二章從週期性運動出發，首先介紹簡諧振盪與單擺、古典彈子球台等概念、第三章介紹同餘與完全剩餘系、失真效應，並探討有關渾沌現象的涵意。第四章介紹蛇擺的組成、針對蛇擺的失真效應與分群現象作探討。第五章討論彈簧擺的二維運動與三維運動、並利用有限差分法和傅立葉轉換等技巧，找出彈簧擺運動軌跡的規律與渾沌。第六章為心得及可能的發展方向。

第二章 週期性運動

週期性運動對於科學始終是一個基礎又重要的問題：虎克發現虎克定律：一個彈簧上振盪的小球所受的力和彈簧伸長量成正比。克卜勒寫下了宇宙的秘密：敘述天體是循一個軌道的週期性運動。牛頓則發現了萬有引力：小至蘋果大至星體，都依循著相同的規律，成功地解釋天體間的運動狀態，更造成當時極大的振奮。

週期性的運動常會形成一個封閉性的週期性軌道(periodic orbits, PO) 形成特定的曲線，其中彈子球檯圖形及李賽羅圖形，最為人們熟悉。在本論文中將藉由彈子球檯及李賽羅的曲線圖形，探討渾沌與週期性軌道的關係。



2.1. 簡諧運動與單擺

2.1.1 簡諧運動

簡諧運動指得是一個"簡"單而具"諧"和性的運動，物理系統會在一定範圍內已某種規則不斷地來回。然而自然界很多系統只要稍微偏離平衡狀態都是呈簡諧運動型式，如：小角度的單擺風輕吹時，樹葉呈簡諧運動；風稍大時，樹葉不再是簡諧運動，但樹枝仍會呈簡諧運動。地震時，地表也是呈現簡諧運動，還有水面的漣波...等也屬於簡諧運動。

要滿足這樣運動形式的條件為：物理系統的加速度和其位移的負數成正

比，也就是 $\ddot{a} = -k\bar{x}$ 或 $\ddot{x} = -k\bar{x}$ ，唯有加速度和位移成正比，且方向相反時，才能讓系統在位移的方向上被迫減速至零而產生折返以形成簡諧運動。

等速率圓周運動在徑向上的投影滿足簡諧運動，故我們可由等速率圓周運動來推知簡諧運動的運動關係。最簡單的範例是彈簧繫物的運動，物體的位移和受力成正比，但是方向相反，因此其運動就是簡諧運動，其解正好是正弦波。

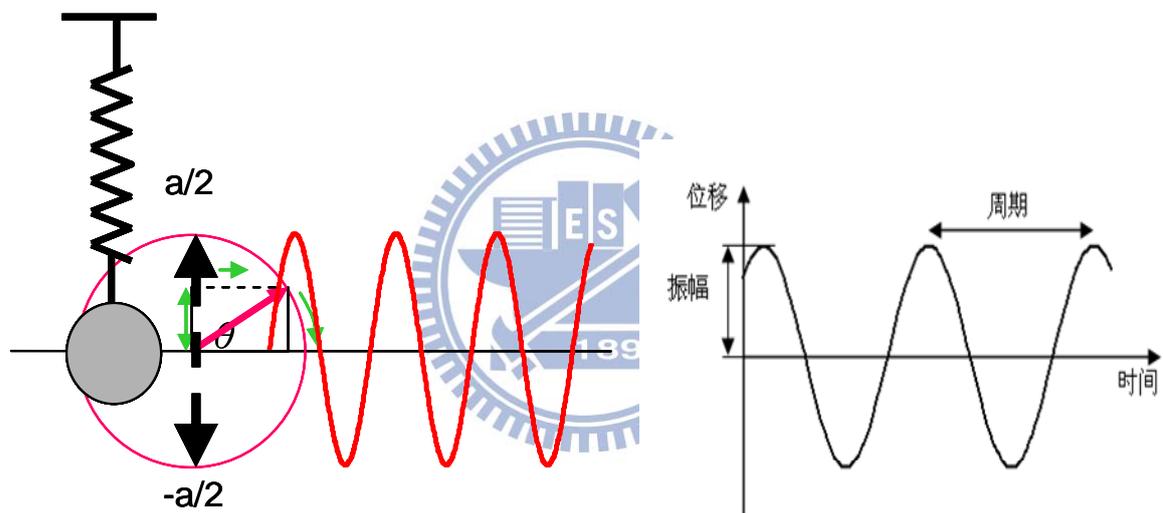


圖2-1 簡諧振盪

可知根據虎克定律 $F = -kx$ 又 $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$ 故簡諧運動的運動關係式為：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (2.1)$$

所以滿足虎克定律的彈簧： $F = -k \cdot x$ ，亦為簡諧運動，其對應 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

因此彈簧的運動週期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 。

2.1.2 單擺

在偏角不太大的情況（一般認為小於 10° ）下，單擺的運動可以近似地視為簡諧運動。理論上，單擺是一個擺錘體積為零、而質量極大的質點，並以一質量為零之擺線懸吊。如圖2-2所示，有一單擺懸掛於天花板上，擺長為 l ，擺錘質量為 m ，對通過O點的鉛垂線作往復擺動。

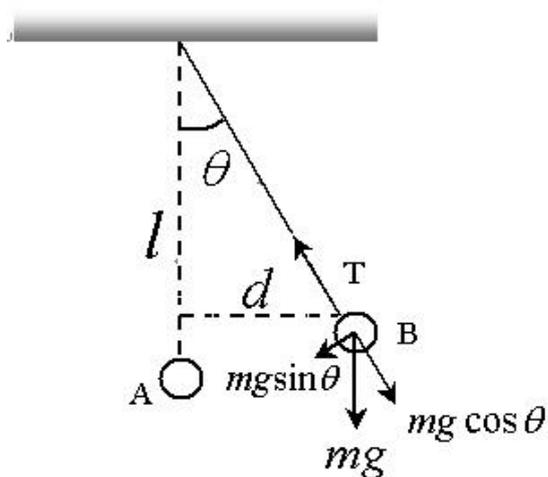


圖2-2 單擺受力示意圖

究單擺而言，由於力矩可表示為力與其垂直力臂的乘機、或轉動慣量與角加速度的乘積可以寫成 $\tau = I\alpha$ ，所以 $-mg \sin(\theta) \cdot l = m \cdot l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ，因此可以得到其動力學方程式如下：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (2.2)$$

當 $\theta \ll 1$ 時候， $\sin(\theta) \approx \theta$ ，方程式可以近似為：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (2.3)$$

由(2.3)式與(2.1)比較，可以發現當單擺的角度較小時，即可視為簡諧運動，其擺動的周期 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ ，把 $k = \frac{mg}{l}$ 帶入，得到 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ 故，單擺的週期僅跟擺長與重力加速度有關，而與擺的質量無關。

2.2 古典彈子球台

彈子球的模型在物理及化學中，應用的非常早，約在 16、17 世紀，人們就有空氣是由許許多多的小粒子所組成的概念。而後原子、分子的概念漸為人所接受。對於氣體溫度與壓力、體積間變化的也越發的清楚。而此時的熱力學仍停留在觀察的階段，並沒有辦法提出具有預測性、完整性的理論解釋。然而伯努力(Bernoulli)提出壓力來自粒子對於壁面的碰撞。克勞修斯引入統計方法、提出自由度及平均自由徑的觀念，麥斯威爾(Maxwell)則發現氣體分子的速度分佈，將一個巨觀的系統，視為一群粒子的整體表現。成功的解釋粒子動能、溫度與壓力之間的關係。

由此延伸發展了：固、液、氣態變化的粒子模型，物質內電阻係數的粒子模型，粒子能量分佈的探討。至此，大量統計技巧引入，由微觀的粒子出發，探討眾多複雜系統的科學現象，促發了統計力學等領域的發展。

2.2.1 方形彈子球檯

首先討論一個粒子在一個一維封閉的盒內的狀況，其邊界為圖 2-3。

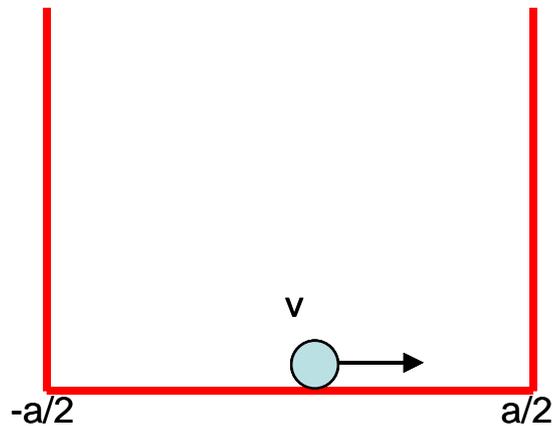


圖 2-3 一維彈子球檯

粒子位置無法出現在邊界外，形成一個無限位能井，若彈子球的初速度為 v ，且彈子球與盒壁間的碰撞為彈性碰撞，即無能量耗損，則彈子球將在邊界內來回碰撞，且速度不變。而彈子球的位置 x 和時間 t 係如圖

2-4

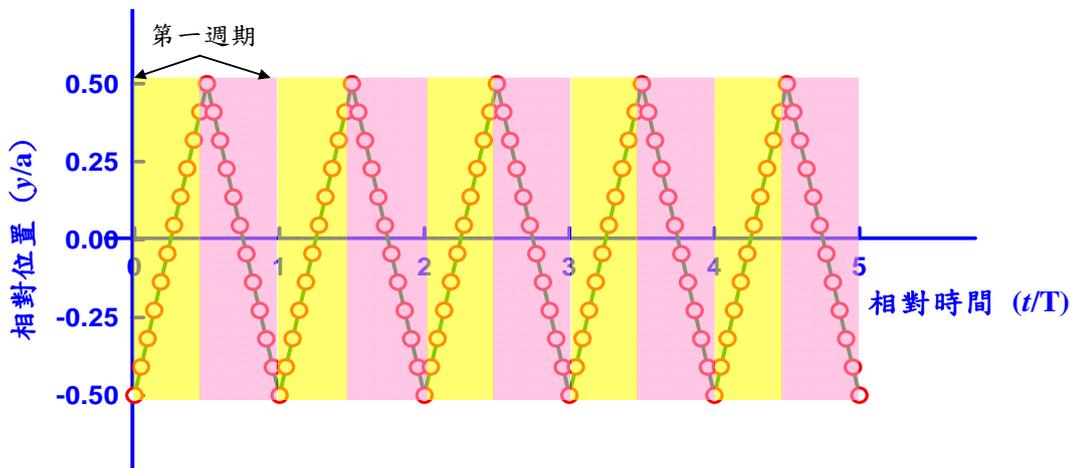


圖 2-4 形成一個振幅為 $\frac{a}{2}$ ，週期為 $\frac{2a}{v}$ 的三角波

(設 $x = -a/2$, $t = 0$ 時), 在第一週期, 可以兩個方程式表示:

$$\begin{cases} x = vt - \frac{1}{2}a, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ x = -vt + \frac{3}{2}a, & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad (2.4)$$

一個二維的彈子球檯圖 2-5, 則可以視為 x 、 y 二個方向垂直且獨立的彈子球運動, 則在 x 方向速度為 v_x , 其位置和時間關係, 將符合上式的三角波函數, 週期為 $\frac{2a}{v_x}$, 在 y 方向速度為 v_y , 其位置、時間關係, 亦要符合三角波函數, 週期為 $\frac{2a}{v_y}$ 。 x 、 y 兩方向運動的合成則形成了 2 維彈子球檯的圖形。

在此考慮 3 個參數 (p, q, ϕ) , 其中 $v_y : v_x = p : q$, 而 $\phi (-\pi \leq \phi \leq \pi)$ 則代表彈子球出發的起始位置(圖 2-6)。試著改變不同的參數比較 billiard 的軌跡是否有所變化。可以看到當 ϕ 為 0 時, 彈子球由 x 軸上的原點出發; 當 ϕ 為 $\frac{\pi}{3}$ 時, 代表由 x 軸邊界的 $1/3$ 處出發。當初始位置不是在原點且兩者互質時, 則和 x 軸、 y 軸碰撞的次數和 $p : q$ 有關, p 為和 x 軸方向碰撞的次數, q 為和 y 軸碰撞的次數, 而 $p : q$ 比值為有理數時, 則整個圖形成為一個封閉的圖形, 或是結束於邊界的端點, 當 $p : q$ 提高至 $(5, 13)$, 可發現整個圖形會碰撞邊界更多次, 但最終仍會形成一個封閉性的週期性軌道。

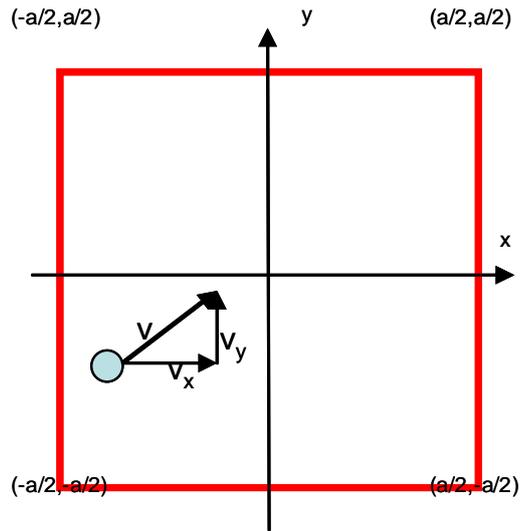


圖 2-5 二維彈子球台

ϕ (p,q)	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
(1,1)					
(2,1)					
(3,2)					
(5,13)					

圖 2-6 (p:q) 為有理數之二維彈子球台軌跡

2.2.2 圓形彈子球檯

圓形的彈子球檯與方形的彈子球檯屬於軸對稱的邊界不同，具有點對稱的性質，故圓形彈子球檯能表現與方形彈子球檯不同的數學性質。

若我們改變邊界條件，改以一個圓形的彈子球檯，探討彈子球的軌跡。則先假定彈子球在球檯中為彈性碰撞，即每次的碰撞不會損失能量，可以簡單的幾何證明，彈子球在不同的初始條件下，在經過連續的碰撞入射角及反射角維持一個定值。每次的碰撞距離也是固定的。將碰撞距離視為圓中的一弦，可發現，每弦的圓心角 α 為定值，如圖 2-7 表示。

在此命 $\alpha = \frac{q}{p} \cdot 2\pi$ 。可將 p 視為將圓心均分為 p 等分，也就是在圓周上打上 p 個點，而 q 代表每隔幾個點畫上連線(圖 2-8)。當 $q=1$ 時隨著 p 的增加，可以發現，畫成一個多邊形，而且其圖形越接近圓形的邊界。引入完全剩餘系的性質，我們將圓型彈子球台的軌跡視為一個以 p 為模的剩餘系，而所有的碰撞點組成一個完全剩餘系，則 p, q 兩個為互質的整數時，代入不同的 q 仍會是一個完全剩餘系，表現在圖形上則仍是一個封閉且完整的路徑。

我們也可以計算當給定一個固定 q 值時，有幾種圖形的呈現，在此我們引入尤拉函數(所謂「尤拉函數」是指設 p 為自然數，則 $\phi(p)$ 為「不大於 p 與 p 互質的自然數之個數」)，計算在小於 q 的情況下，有幾個 p

值被允許，在此因為碰撞點排列可有順時鐘、逆時鐘兩個方向，然在圖形表現在並沒有差別。故可得 $n = \phi(p)/2$ ，以 $p=11$ 為例， $n = (11-1)/2 = 5$ ，計有 5 種分類。

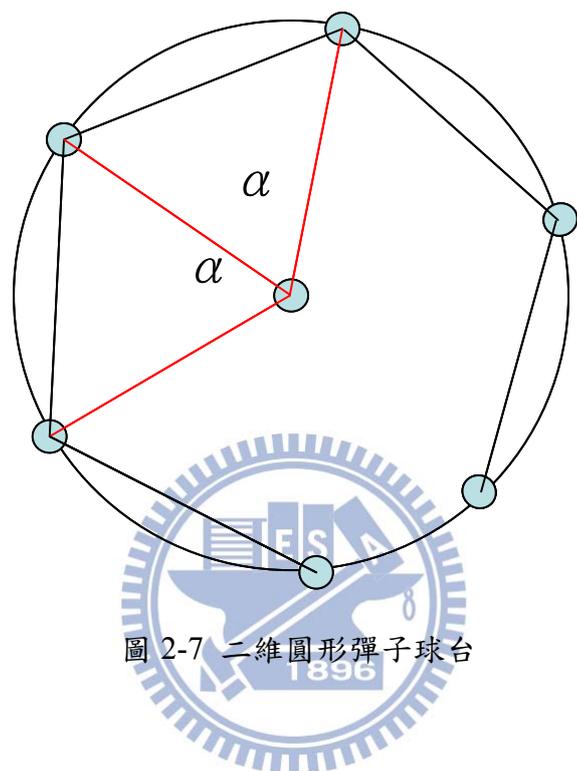


圖 2-7 二維圓形彈子球台

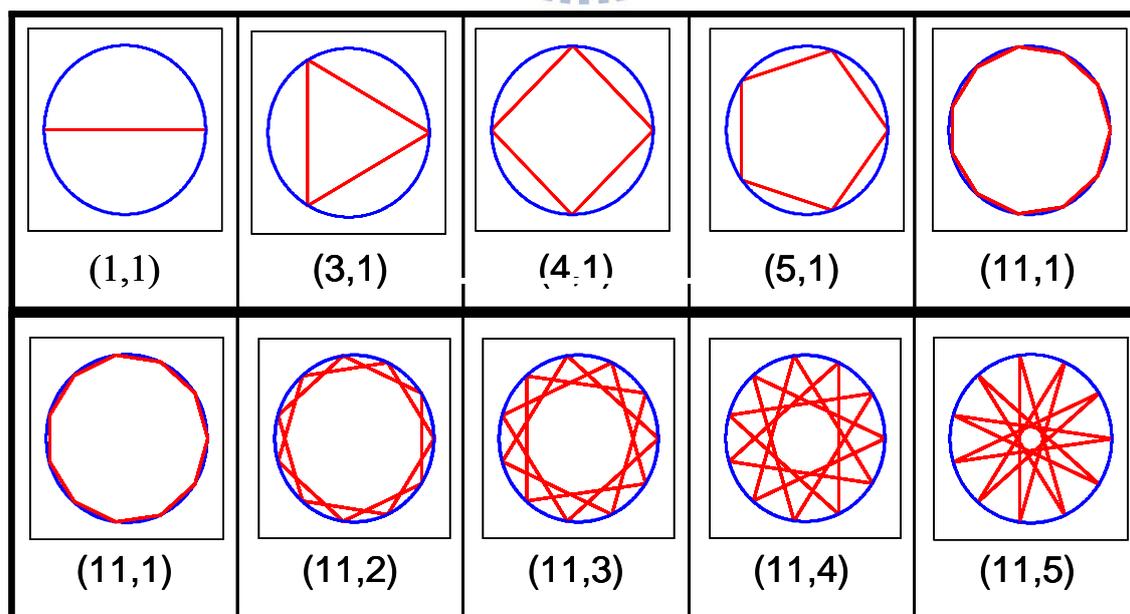


圖 2-8 圓形彈子球檯軌跡

若 p, q 的比值為無理數時(圖 2-9)，則會發現，隨著碰撞次數的增加軌跡也會越來越密，且不形成封閉的路徑。

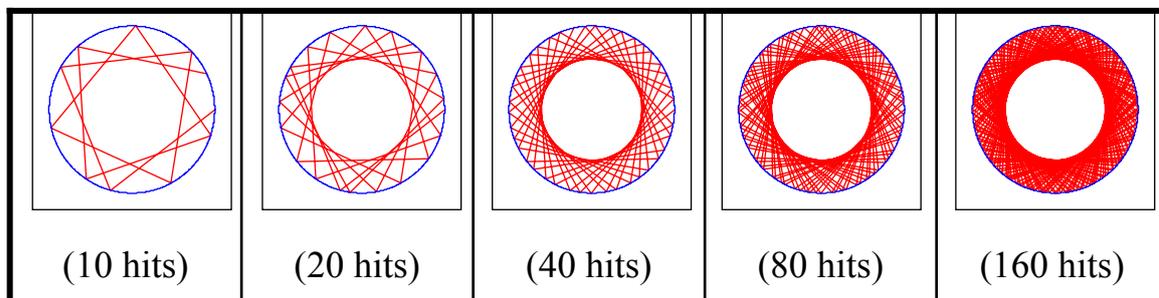


圖 2-9 圓形彈子球檯(無理數 $\sqrt{2}:1$)



第三章 基本定義與原理

3.1 同餘與完全剩餘系

3.1.1 同餘的概念

同餘這個概念是由高斯所提出的，我們先從幾個簡單的除式問題出發，藉此以了解什麼叫同餘。

例 1：一群軍士 45 人，以一至九為一班依序報數，若某軍士番號為 28 則答數為何多少？

因每數到九就重新循環， $28 \div 9 = 3 \dots 1$ ，或寫成 $28 = 9 \times 3 + 1$ ，所以答數是 1。

例 2：若答數為 1 者為班長，則除了 28 號外，還有那些人是班長？

由第一題我們知道，計有： $\{1, 10, 19, 33\}$



一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36

表 3.1 同餘在答數上的表示

在日常生活中，類似的問題很多，例如：今天是星期一、過了 15 日是星期幾？早上八點上課，一節課 45 分鐘，上了四節課是幾點幾分？這

些問題本質上都是將總數除了一個固定的除數，求餘數的問題。因此產生了同餘的概念，以第二題為例： $\{1、10、19、28、33\}$ 。這些數的共同點為除於9的餘數相同，皆為1。故，同餘其實就是餘數相同的數。

不只是同餘的概念，高斯還引進了新的符號，讓許多計算有更方便的方式，而同餘的定義為：

給定一個正整數 m ，如果用 m 去除 a, b 所得的餘數相同，則稱 a 與 b 對模 m 同餘，記作 $a \equiv b \pmod{m}$ ，並讀作 a 同餘 b ，模 m 。

例： $\frac{10}{7} = 1 \dots 3$ 、 $\frac{3}{7} = 0 \dots 3$ 。

則 $10 \equiv 3 \pmod{7}$ ，若 a 與 b 對模 m 同餘，設 $a = m q_1 + r$ ， $b = m q_2 + r$

得， $a - b = m (q_1 - q_2)$ ， $m \mid a - b$ 。

反之，若 $m \mid a - b$ ，設 $a = m q_1 + r_1$ ， $b = m q_2 + r_2$ ， $0 \leq r_1, r_2 \leq m - 1$ ，

則有 $m \mid r_1 - r_2$ ，因 $|r_1 - r_2| \leq m - 1$ ，故 $r_1 - r_2 = 0$ ，即 $r_1 = r_2$ 。

於是得到同餘的另一等價定義。

3.1.2 完全剩餘系的性質

完全剩餘系在同餘理論中是一個非常重要的概念，我們也可以從一個簡單的例子了解完全剩餘系：

日	一	二	三	四	五	六
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

表 3.2 完全剩餘系在月曆上的表示

這是某個月份的日曆，我們可以將一個月分，以 7 天一周作為一個單位，可以分成數周。在表內我們可以發現。周日的日期分別為{4、11、18、25}號，都對模 7 同餘，餘數為 4，則我們將{4、11、18、25}，稱作模 7 的一個剩餘類，即屬於周日為一個剩餘類。一周有七天，故可分為周日、周一、周二、周三、周四、周五、周六 7 個剩餘類。再將周日至周六，各挑一個數字出來，例：{4、5、6、7、8、9、10}，則這些整數將涵蓋周日至周六每一類。則，這樣的整數集合，我們即稱作完全剩餘系。由此可知，若一個以 m 正整數為模的完全剩餘系，具有下列特性：

- (1) 一個完全剩餘系有 m 個整數組成的元素。
 - (2) 完全剩餘系的元素，兩兩不同餘。
 - (3) $(a, m) = 1$ ， x 為 m 的完全剩餘系，則 $ax + b$ 也是 m 的完全剩餘系。
- 例： $m = 7$ ，則 $(1, 8, 15, 22 \dots)$ 為同一類， $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 成為一個完全剩餘系。

若 $a = 2$, $b = 3$ 則發現

$$2 \cdot \{0,1,2,3,4,5,6\} + 3 = \{3,5,7,9,11,13,15\} = \{3,5,0,2,4,6,1\}$$

各剩餘類的排列不同，但仍為一個完全剩餘系。

3.2 失真效應

又稱為膺頻效應，早期用於通訊傳輸時，信號經取樣後，頻譜發生重疊的現象。在統計、信號處理及相關科學中，當抽樣時，失真現象導致不同的連續信號變得難以區分，故原本的信號無法被真實的重建。

3.2.1 時間取樣頻率不足所造成的失真效應

若原有一個頻率 6Hz 的波，當時間取樣點數不足時(例如：時間取樣頻率為 5Hz 時)，重建的波形會被誤認為是頻率為 1Hz 的波，如圖 3-1 所示。

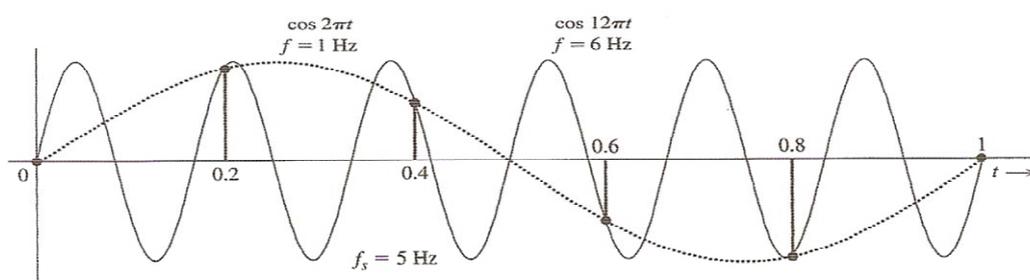


圖 3-1 時間取樣不足所造成的失真效應

聲音的擷取、收錄即是如此，當我們透過話筒時，由於電話的取樣頻率約為 10KHz ，所以我們聽到的聲音仍然跟原音有落差，但是，當我們聽

MP3 時，由於 MP3 的取樣頻率約為 40KHz，所以我們聽到的聲音跟原音相似度高。取樣時我們要考慮取樣的頻率，為了達到不失真的效果，經過科學家的證明，只要取樣頻率大於原始訊號頻率的兩倍以上，即可減低錯誤，達到和原始聲音極真實的音訊。舉例來說，人類聽覺頻率範圍大約是 20KHz，因此我們就要以 40KHz 的取樣頻率來對聲音作取樣。

3.2.2 空間取樣頻率不足所造成的失真效應

除了在時間取樣的方式不當會造成失真效應之外，空間取樣的精細度不夠時，亦會造成失真效應，例如：影像失真即為此例，當空間取樣頻率不足時，會造成圖片扭曲或鋸齒狀邊緣，如圖 3-2 與圖 3-3。

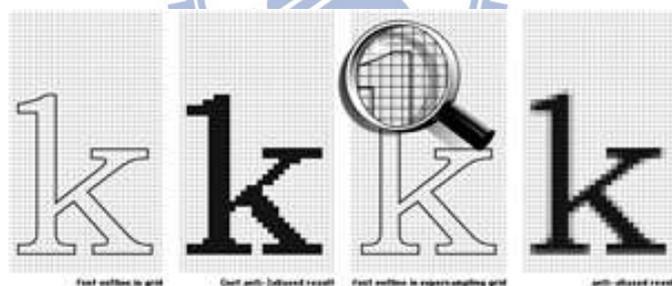


圖 3-2 當格子畫的不夠細時，邊緣會呈現鋸齒狀

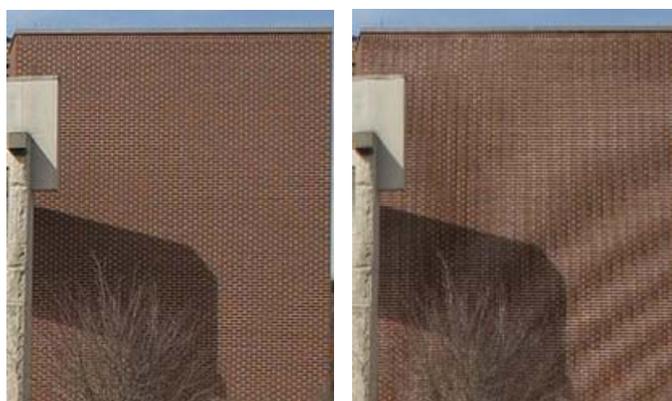


圖 3-3 左圖為 622 × 756 pixels，右圖為空間的 aliasing

3.3 渾沌現象

渾沌現象起因於物體不斷以某種規則複製前一階段的運動狀態，而產生無法預測的隨機效果。所謂「差之毫釐，失之千里」正是此一現象的最佳註解。渾沌現象發生於易變動的物體或系統，該物體在行動之初極為單純，但經過一定規則的連續變動之後，卻產生始料所未及的後果，也就是渾沌狀態。

渾沌現象是指一個週期性運動系統軌跡呈現不規則重現的狀態，這個運動的起始條件深深地影響著這個運動系統最終的運動軌跡。我們可以用一個最簡單的一維非線性圖 the logistic map 來解釋這個現象。

首先，先給訂一個集合 V ，目標是藉由集合 V 繪製出函數 f 。當以下的條件成立時， V 將會是渾沌的：

- 函數 f 對於起始條件是敏感的
- 函數 f 是 topologically transitive
- V 裡面的週期函數點是密集的

一維圖形的定義：

- 一個集合 V (從實數 $0 \sim 1$) 所以 $0 \leq x_n \leq 1$
- 此一維圖形的軌跡函數 $x_{n+1} = f(x_n)$

線性圖形： $x_{n+1} = a x_n + b$ ，其中， a 、 b 為常數，線性圖形唯一解。

非線性圖形：the logistic map，可用幾何學中的函數 $f(x) = \mu x(1-x)$ 來表

示，其中 $0 \leq x \leq 1$ 。

選定參數 μ 、 x_0 ，按照下列步驟畫出 the logistic map：

步驟一、利用圖上的 x_0 ，垂直往上找出相對應的 $f(x)$ 函數的值。

步驟二、利用 $f(x)$ 函數的值，水平往左對應出 $y=x$ 的值。

步驟三、在利用新找到的 x ，垂直往上找出相對應的 $f(x)$ 函數的值。

步驟四、重複步驟一、二、三。

以 $\mu=0.8$ 、 $x_0=0.7$ 為例，當 $x_0=0.7$ 代入函數 $f(x)=\mu x(1-x)$ 時，得到 $f(x_0)=0.8*0.7(1-0.7)=0.168$ ，將 $f(x_0)=0.168$ 當作下一個函數的起始條件，也就是 $x_1=f(x_0)=0.168$ 再次帶入函數 $f(x)=\mu x(1-x)$ ，不斷疊代。由圖 3-4 可以發現，疊代過後趨於收斂為某一數值，而不是混亂。

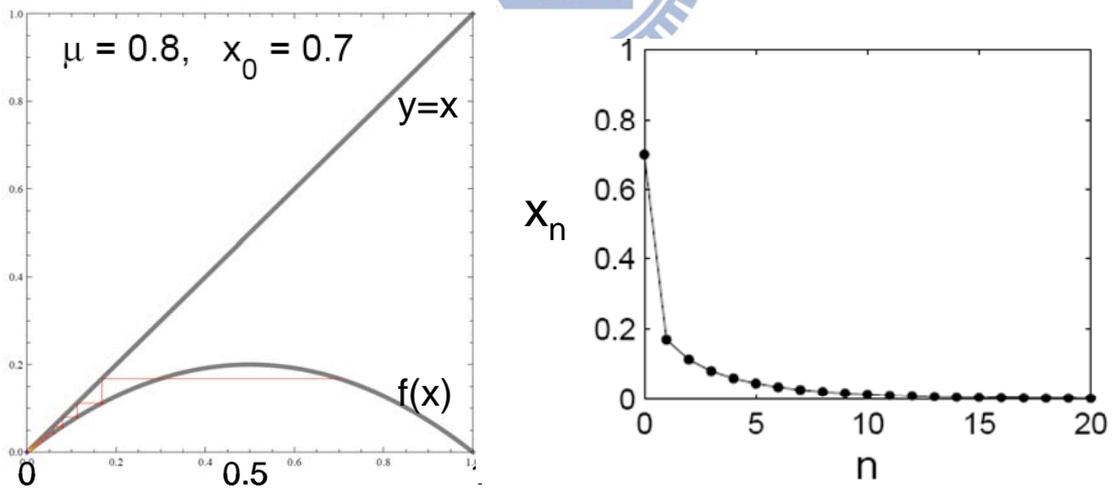


圖 3-4 左圖為 the logistic map，右圖為 Evolution of the logistic map

除此之外，當 $\mu=2.8$ 、 $x_0=0.2$ 時候，其結果如圖 3-5 所示，如同圖 3-4 一樣是穩定在某一個數值。

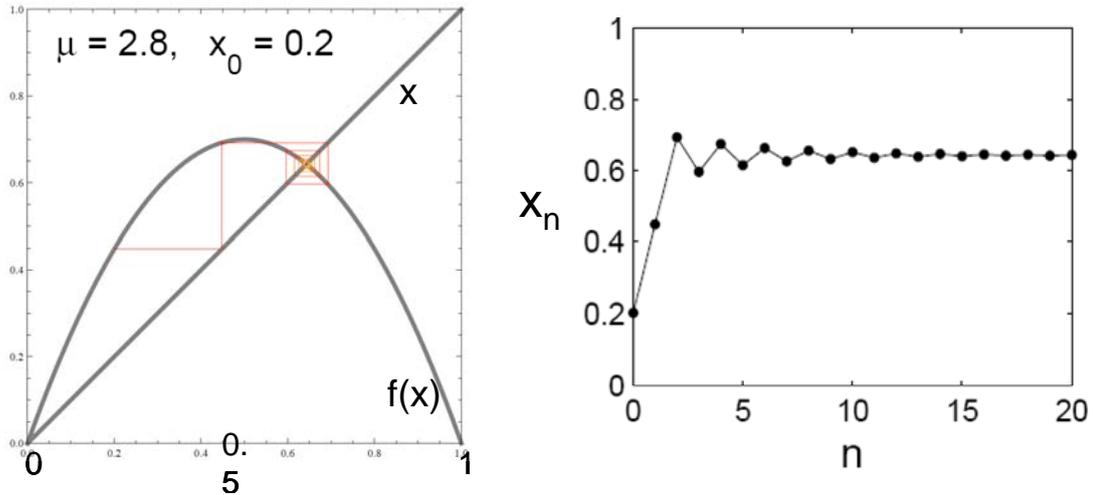


圖 3-5 左圖為 the logistic map，右圖為 Evolution of the logistic map

但是當 $\mu=3.4$ 、 $x_0=0.2$ 時候，由圖 3-6 可以發現，疊代過程中，不再是趨於一個定值，反而是兩個數值，已經漸漸開始變亂。

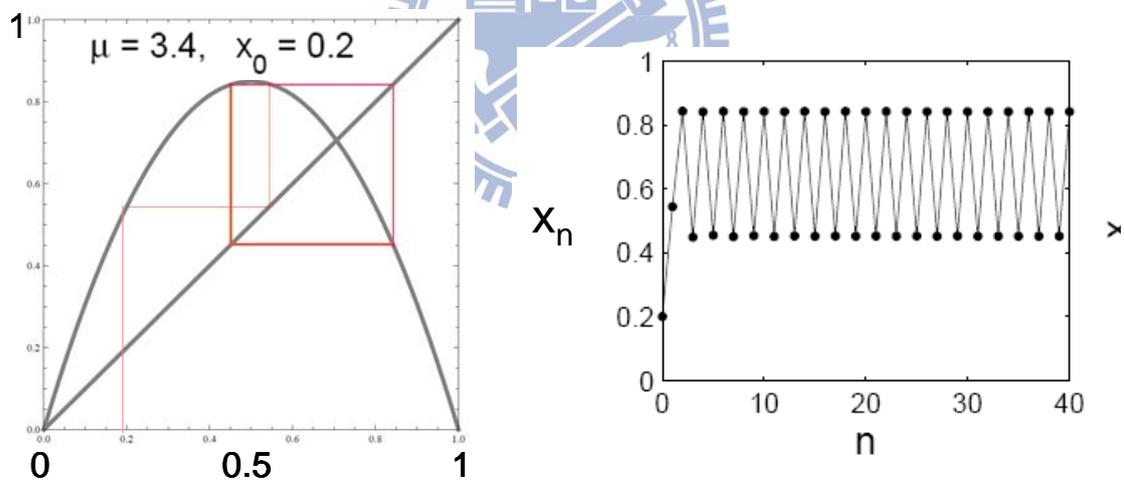


圖 3-6 左圖為 the logistic map，右圖為 Evolution of the logistic map

最後當 $\mu=4.0$ 、 $x_0=0.2$ 時候，透過不斷的疊代，每經過一次計算，其數值皆不一樣，不會穩定或收斂在同一數值上，反而呈現凌亂的面貌，這時候即可以稱為渾沌的情況，如下圖 3-7。

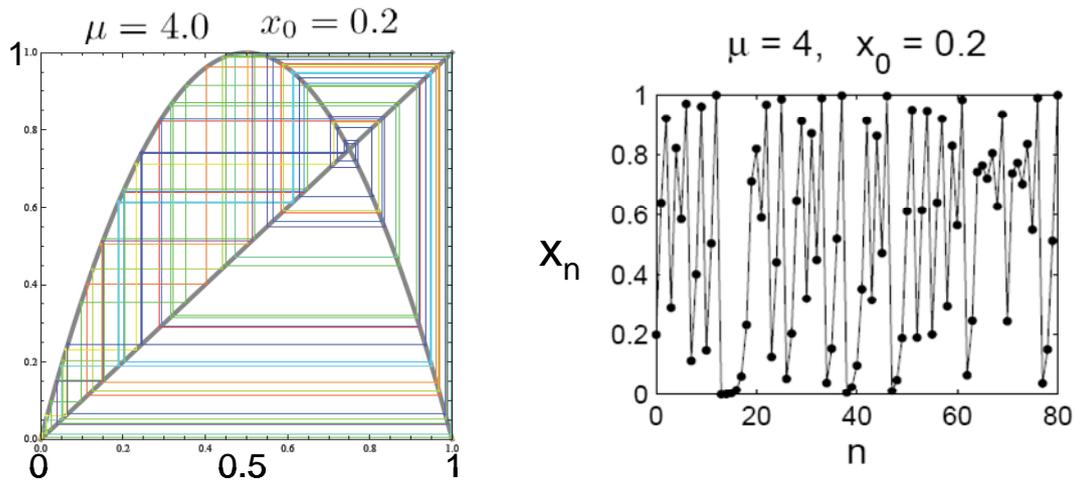


圖 3-7 左圖為 the logistic map，右圖為 Evolution of the logistic map

將上述的情況整合如下圖 3-8 表示，可以發現當 μ 改變微小差異時候，透過不斷的疊代，其結果會有著很大的差異，有時為收斂於某一數值，有時卻會很凌亂，這種現象及稱為渾沌現象。

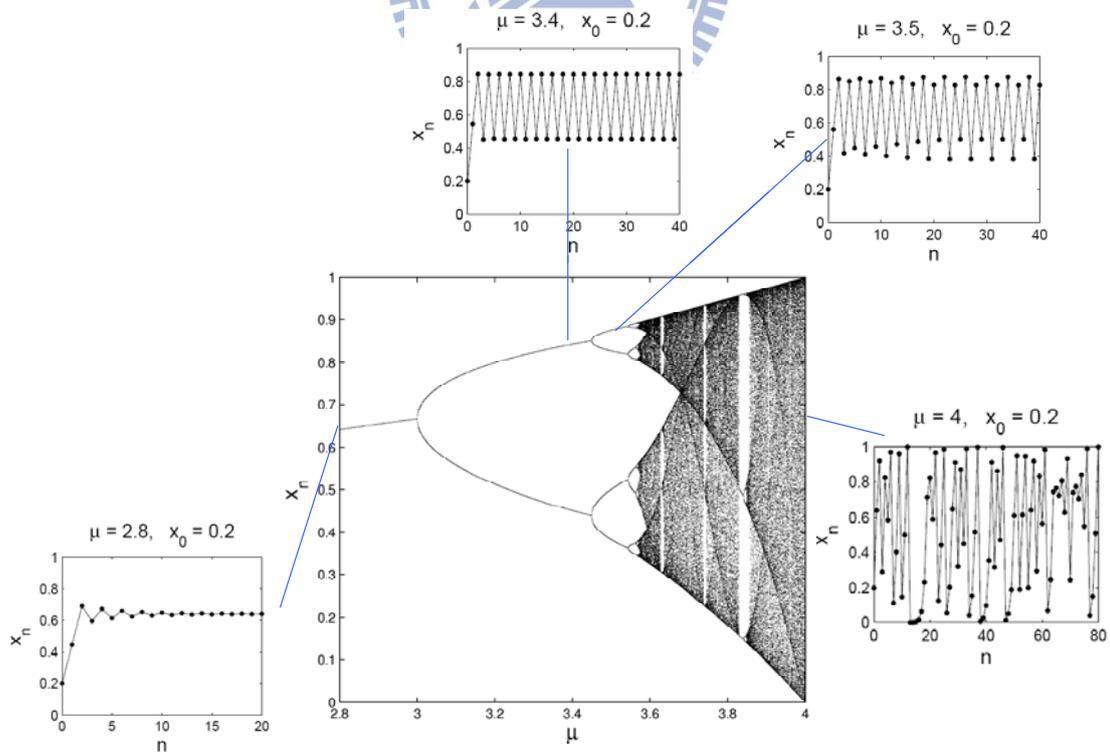


圖 3-8 為固定 x_0 時，改變 μ 的 the logistic map

第四章 蛇擺 Pendulum Waves

早在 1991 年，Richard Berg 發表一篇期刊論文：如何建立一組非耦合的單擺 ”pendulum waves”，這個實驗的圖案令人相當驚艷，而這個圖案似乎有它的週期存在！這個理論亦在 The Video Encyclopedia of Physics Demonstrations 中出現。

這一組非耦合的單擺在擺動時，會出現像在運動中的橫波一般的美麗圖案，而這個美麗的圖案讓我們發現了它的循環性之外，也經由數學的連續方程式之推導，發現了失真現象。

4.1 蛇擺的組成



蛇擺的裝置是由數個非耦合單擺所組成，擺長最長的單擺設為 L ，這些單擺被設計為：當第一個單擺(擺長最長的單擺)擺動整數 N 次時，下一個單擺(擺長次長的單擺)恰擺動 $N+1$ 次，再下一個單擺(擺長第三長的單擺)擺動 $N+2$ 次...以此類推；當所有的單擺都回到起始位置，這段時間稱為一個完整運動週期「 Γ 」。

若由上方觀察所有的單擺，發生了什麼現象？首先單擺組呈現像是波浪，像是扭動的蛇，接著似乎變成混亂的擺動，沒多久，像是分二邊擺動，奇數與偶數的單擺各佔一邊，最後則又會變回像是扭動的蛇，等到「 Γ 」時間後，所有的單擺又再度會到起始位置，就這樣周

而復始的擺動著。

蛇擺設置的示意圖如下圖 3-1 表示，若每個單擺的橫軸距離設為 d ，則單擺的橫向位置可標示為 $x_n = nd$ ，其中 n 為從 0 開始的整數，而每個單擺必須在 Γ 時間內完成 $N+n$ 次的擺動，所以每個單擺的擺動週期可以表示為 $T_n = \Gamma / (N+n)$ ，擺動頻率可以表示為 $f_n = (N+n) / \Gamma$ 。

故，每個單擺的角頻率為 $\omega_n = 2\pi / T_n = 2\pi(N+n) / \Gamma$ ，將 $x_n = nd$ 代入，可得 $\omega_n = 2\pi(N + (x_n/d)) / \Gamma$ 。

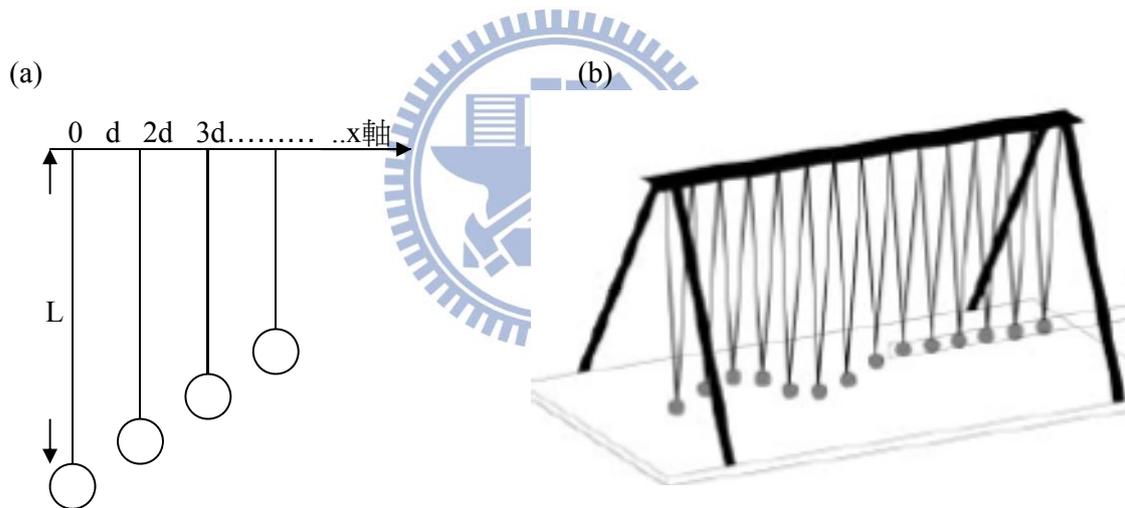


圖 4-1 蛇擺示意圖 (a)裝置設置圖 (b)整體示意圖

4.2 蛇擺的失真現象

利用波函數 $y(x,t) = A \cos(kx + \omega t + \Phi)$ 模擬 pendula 擺動圖型。

其中， A ：振幅(amplitude)、

k ：波數(wave number) = $2\pi/\lambda$ 、

ω ：角頻率(angular frequency) = $2\pi/T$ 、

Φ ：相位差(phase)、

y ：在位置為 x ，時間為 t 時之位移(displacement)。

當時間 t 為零時，所有之單擺一起在同一個相位出發，所以 $\Phi=0$ ；

而 λ 、 T 為固定值，所以 k 、 ω 也固定。將 $\omega_n=2\pi(N+(x_n/d))/T$ 代回波函數，得到：

$$y(x,t) = A \cdot \cos(\omega_n t + \Phi) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + k(t) \cdot x_n) \quad (4.1)$$

其中 $\omega_0 = 2\pi \cdot N/T$ ， $k(t) = 2\pi \cdot t/d \cdot T$ ，又 $\lambda = 2\pi/k$ ，所以可以得到

$$\lambda(t) = 2\pi \cdot (d \cdot T/2\pi \cdot t) = d \cdot T/t。$$

讓我們利用數學軟體 Mathcad 來模擬單擺之擺動情形，如圖 3-2 所示，其中紅點代表單擺的擺錘位置，這些圖為從上往下看之俯視圖。當 $t=T/2$ 時，相鄰之單擺相位差洽為 π ；當 $t=T$ 時，所有之單擺又回到原來的位置。

由圖可以看出：在時間 $t=T/16$ 與 $t=15T/16$ 時，單擺擺動的位置所形成的波形圖案相同、在時間 $t=T/8$ 與 $t=7T/8$ 時，單擺擺動的位置所形成的波形圖案相同、在時間 $t=7T/16$ 與 $t=9T/16$ 時，單擺擺動的位置所形成的波形圖案相同、在時間 $t=0$ 與 $t=T$ 時，單擺擺動的位置所形成的波形圖案相同，回到起點位置。但是其實由於每個單擺的週期將隨的不同位置的擺長不同而改變，故 ω 應表示為 $\omega(x)$ 所以

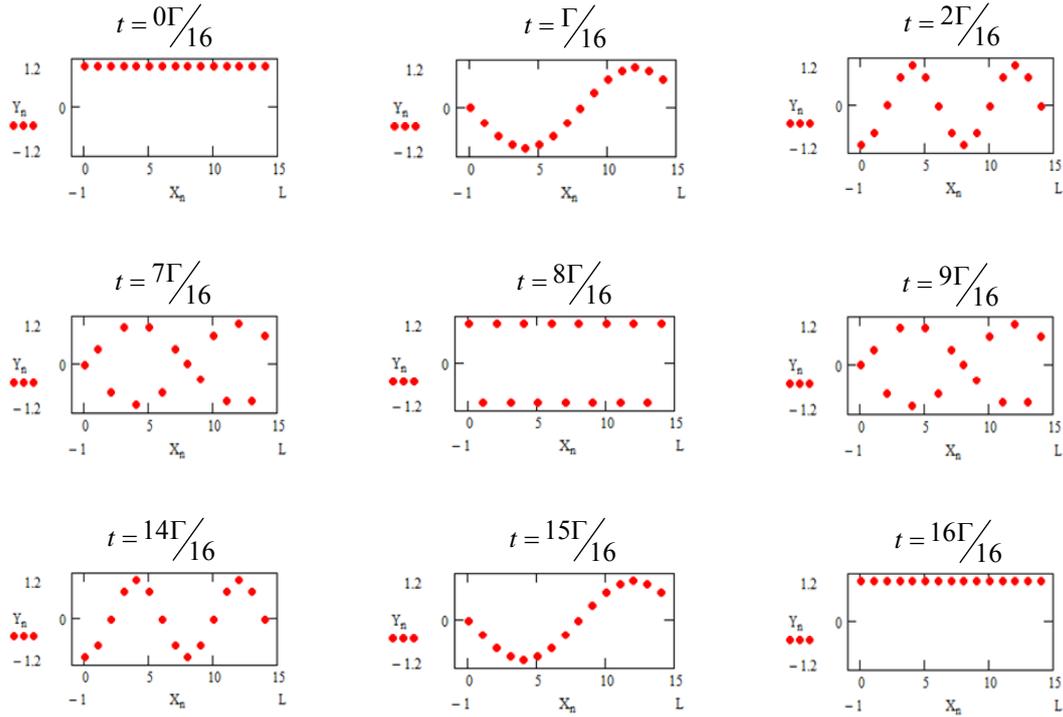


圖 4-2 蛇擺在不同時間下所呈現的結果

$y(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$ ，應表示為 $y(x, t) = A \cos(k_0 x + \omega(x)t)$ ，且當 $t=0$ 、 $k_0=0$ 時， $\omega(x) = \sqrt{g/L(x)}$ ， L 為單擺之擺長。若每個單擺間隔設為 d ，則 $x_n = n d$ ，每個單擺的週期 $T_n = \Gamma/(N+n)$ ， $\omega_n = 2\pi/T_n = 2\pi(N+n)/\Gamma$ ，將 $n = x_n/d$ 帶入上列式子，可得 $\omega_n = 2\pi(N + (x_n/d))/\Gamma$ ，當 x 為一連續方程式時，則 $\omega(x) = 2\pi(N + (x/d))/\Gamma = 2\pi(Nd + x)/\Gamma d$ ，這樣就可以得到 $L(x) = g(\Gamma d/2\pi)^2(x + Nd)^{-2}$ ，所以 $y(x, t)$ 的表示式子如下：

$$y(x, t) = A \cos\left[\left(\frac{2\pi(x + Nd)}{\Gamma d}\right)t\right] = A \cos\left[\left(\frac{2\pi(t/\Gamma d)}{x}\right) + 2\pi(N/\Gamma)t\right] \quad (4.2)$$

因此由式子(4.2)可以發現其波數 $k(t) = 2\pi(t/\Gamma d)$ ，而波數 $k = 2\pi/\lambda$ ，所以隨著時間的變化，蛇擺對應的波長也會跟著改變，隨著時間拉長，所對應的波長越來越短，如下圖 4-3 所呈現。

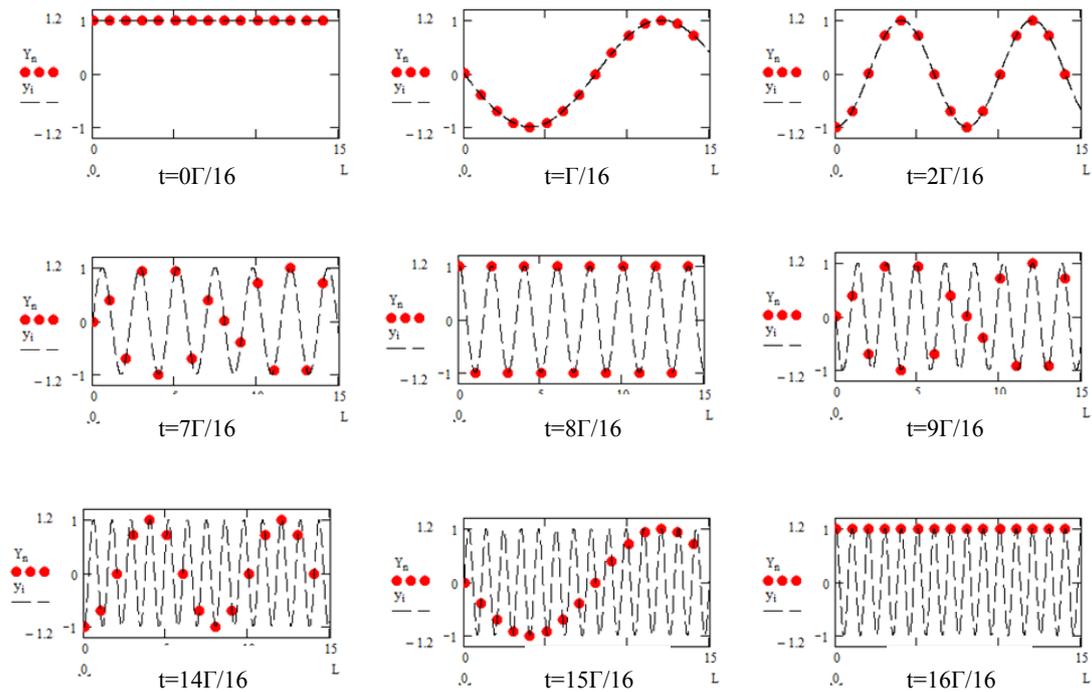


圖 4-3 蛇擺在不同時間下失真的結果

由圖 4-3 所知，事實上在時間 $t=\Gamma/2$ 之後，有更多的波峰跟波谷在方程式 $y(x,t)$ 中，但由於單擺的個數不夠多，導致無法充分的呈現方程式 $y(x,t)$ 完整的樣貌，此即為失真現象，透過這樣的結果，可以發現蛇擺可以用來介紹一為空間上的失真現象，然而除了失真的現象，蛇擺在視覺上分群的現象在 4.3 中給予討論。

4.3 分群與同餘

除了 4.2 介紹蛇擺的失真現象之外，蛇擺在視覺上還有一種分群的現象，這是由於此裝置是由 15 個等間隔頻率的單擺所組成的，當這 15 個單擺同時在同一相位出發時，可以觀察到這 15 個單擺時而混

亂，時而分群，似乎有其規則，在這小節裡將會詳細介紹。

蛇擺中，我們設定第一個單擺的周期設定為 1 秒(20/20 秒)時，
 下一個單擺周期則設定為 20/21 秒，第三個周期設定為 20/22 秒...以此類推。所以周期 $T_n=20/(20+n)$ ， n 為從 0 開始的整數，透過週期
 那麼每一個單擺的擺動頻率為 $f_n=(20+n)/20$ ， Γ 為這 15 個單擺都回到起始位置的
 時間，在這裡設定為 20 秒， F 為每個單擺都回到起始位置時擺動次數，所以 $F_n=f_n*\Gamma$ 也就是說：

第一個單擺： $n=0$ 、 $f=(20+0)/20$ 、 $F=(20/20)*20=20$

第二個單擺： $n=1$ 、 $f=(20+1)/20$ 、 $F=(21/20)*20=21$

第三個單擺： $n=2$ 、 $f=(20+2)/20$ 、 $F=(22/20)*20=22$

以此類推，當時間在增加時，有些單擺的擺動次數相同，就會形成同一群，因為他們擺動到了相同的相位，下表 4.1 以時間為 4 秒時為例。

表 4.1 時間為 4 秒時，每個單擺的擺動情況

時間四秒時															
單擺	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
擺動次數	4	4.2	4.4	4.6	4.8	5	5.2	5.4	5.6	5.8	6	6.2	6.4	6.6	6.8
$F*t/\Gamma$ 餘數	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16

經由表 4.1 我們發現，當 $F*t/\Gamma$ 的餘數相同時，就會是同一群。也就是說：當時間經過 4 秒時，這 15 個單擺會分成五群，其中餘數均是 0 的是同一群，因為它擺動了整數次，餘數均是 4 的是同一群，因為

它們擺動了 4.2 次、5.2 次、6.2 次，

餘數均是 8 的是同一群，因為它們擺動了 4.4 次、5.4 次、6.4 次，

餘數均是 12 的是同一群，因為它們擺動了 4.6 次、5.6 次、6.6 次，

餘數均是 16 的是同一群，因為它們擺動了 4.8 次、5.8 次、6.8 次，

由這樣分類，會發現其分為五群。

而當時間經過 7 秒時，這 15 個單擺沒有分群現象，其實大部分時間都沒有分群現象，可以觀察到餘數均不相同。

表 4.2 時間為 7 秒時，每個單擺的擺動情況

時間七秒時															
次 數	7	7.35	7.7	8.05	8.4	8.75	9.1	9.45	9.8	10.15	10.5	10.85	11.2	11.55	11.9
餘 數	0	7	14	1	8	15	2	9	16	3	10	17	4	11	18

當時間經過 10 秒時，這 15 個單擺會分成兩群，其中餘數均是 0 的是同一群，餘數均是 10 的是同一群，共兩群。

表 4.3 時間為 10 秒時，每個單擺的擺動情況

時間十秒時															
次數	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17
餘數	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0

當時間經過 20 秒時，這 15 個單擺會變成同一群，因為它們都剛

好回到起始位置。

表 4.4 時間為 20 秒時，每個單擺的擺動情況

時間二十秒時															
次數	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
餘數	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

由以上的分析可以得知，此蛇擺的一個完整的運動週期為 Γ 秒時，當 $F \cdot t / \Gamma$ 的餘數相同，即會是同一群，下圖 4-4 為以圖像表示。

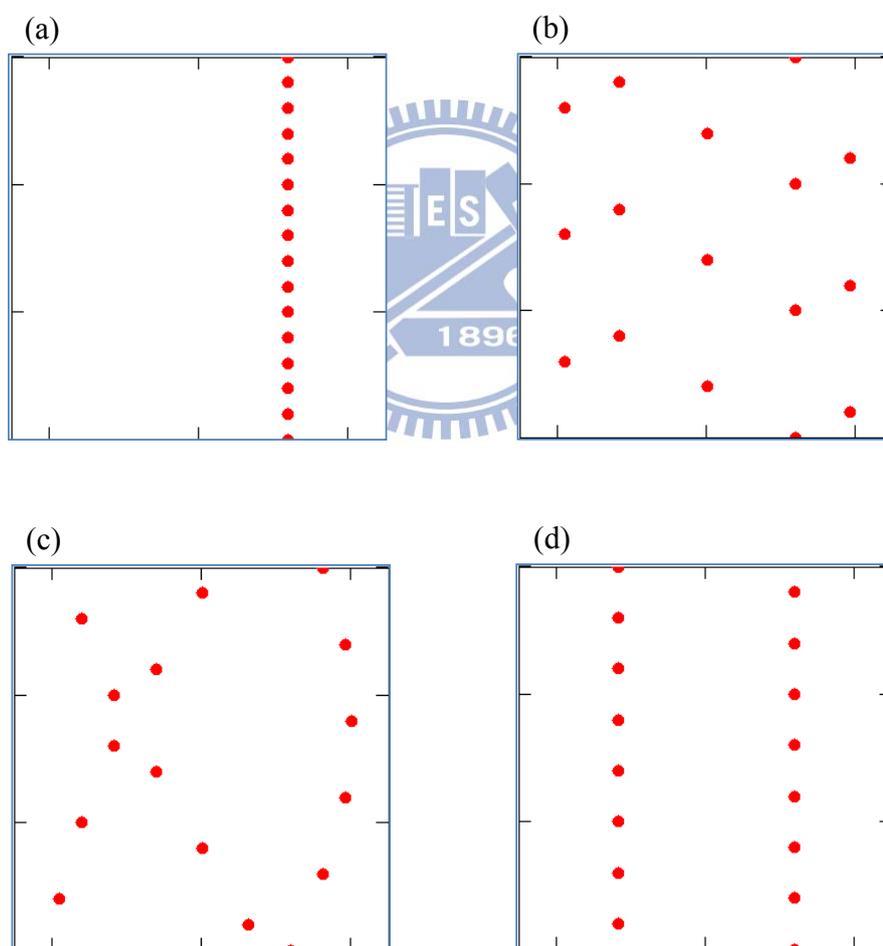


圖 4-4 蛇擺分群的現象

第五章彈簧擺 Spring Pendulum

彈簧擺即是一個富彈性之彈簧與單擺的結合，其下方懸掛一重錘，此重錘與彈簧以某一端固定點作為擺動軸，可在三維空間中自由擺動，如圖 5-1 所表示。

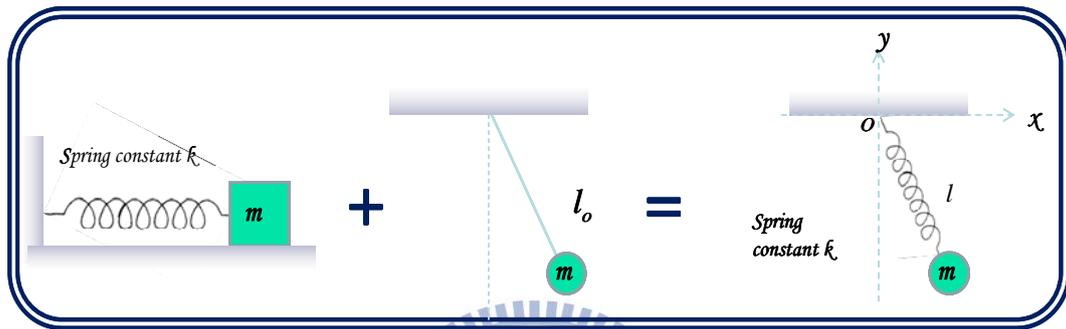


圖 5-1 彈簧擺表示圖

如果選擇適當長度的彈簧和重量，就可以得到一個會共振的彈簧擺。把這樣的擺往下拉，使它在垂直方向上做振動，他會上下振一振之後左右擺起來，然後又上下振，然後左右擺，這樣不斷的繼續下去。能量就在這二種振動模式間轉換，如果沒有摩擦力、空氣阻力等的消耗，它會一直不斷的持續運動下去。

5.1 有限差分法

有限差分法是一種微分方程的數值分析方法，把微分方程近似地用差分方程(代數方程)代替，並進行求解的方法，是微分方程的一種近似數值解法。對於橢圓型、雙曲型和拋物型等方程的求解、彈性力

學中的扭轉問題、平面問題、薄板彎曲問題，薄殼問題，以及各種場問題：如溫度場問題、電磁場問題、流體力學問題等，都可以用有限差分法進行求解。

首先，先了解微分方程中的一次微分： $f'(t_0) = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$

其中 t_0 為起始時間、 Δt 為時間間隔，且 $\lim \Delta t \rightarrow 0$ ，移項得：

$f(t_0 + \Delta t) = f(t_0) + f'(t) \cdot \Delta t$ ，在某一段長時間 T 中，等切割成 N 等份，

則時間間隔 $\Delta t = \frac{T}{N}$ ，若令 $N \rightarrow \infty$ ，則 $t_n = T_0 + n \cdot \Delta t$ ，其中 t_n 為第 n 時刻。

則(1)式可改寫為： $f'(t_n) = f'_n = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{\Delta t} = \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta t}$

得： $f_{n+1} = f_n + f'_n \cdot \Delta t$ ，其中 $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ，若給定初始條件 f_0 ，則可獲得 f_n 。

再來了解微分方程中的二次微分：

$$f''(t_0) = \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \left[\frac{df}{dt} \right] \Big|_{t=t_0} = \frac{\frac{df}{dt} \Big|_{t=t_0+\Delta t} - \frac{df}{dt} \Big|_{t=t_0}}{\Delta t}$$

$$\text{又 } \frac{df}{dt} \Big|_{t=t_0+\Delta t} = \frac{f(t_0 + 2 \cdot \Delta t) - f(t_0 + \Delta t)}{\Delta t} \quad , \quad \text{且} \quad \frac{df}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

整理可得：

$$f''(t_0) = \frac{f(t_0 + 2\Delta t) - 2f(t_0 + \Delta t) + f(t_0)}{\Delta t^2}$$

$$f''(t_n) = \frac{f(t_{n+2}) - 2f(t_{n+1}) + f(t_n)}{\Delta t^2}$$

$$f''_n = \frac{f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n}{\Delta t^2}$$

所以 $f_{n+2} = 2f_{n+1} - f_n + f''_n \cdot \Delta t^2$ 其中 $n=0, 1, 2, \dots, N$

若給定初始條件 f_0 、 f_1 ，其中 $f_1 = f'_0$ ，則可獲得 f_n 。

5.2 二維與三維彈簧擺

彈簧擺包含了一條自然長度為 l_0 、彈力常數為 k 、質量可忽略不計的彈簧，及一個質量為 m 之擺錘，如圖 5-2 所示。當此彈簧繫上擺錘，其因擺錘重量 mg 的影響，使其離開平衡位置，最終長度為 l_e ，則

$l_e = l_0 + \frac{mg}{k}$ 。而，此彈簧之振動角頻率 $\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，擺動之角頻率

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l_e}} = \sqrt{\frac{g}{l_0 + mg/k}}。$$

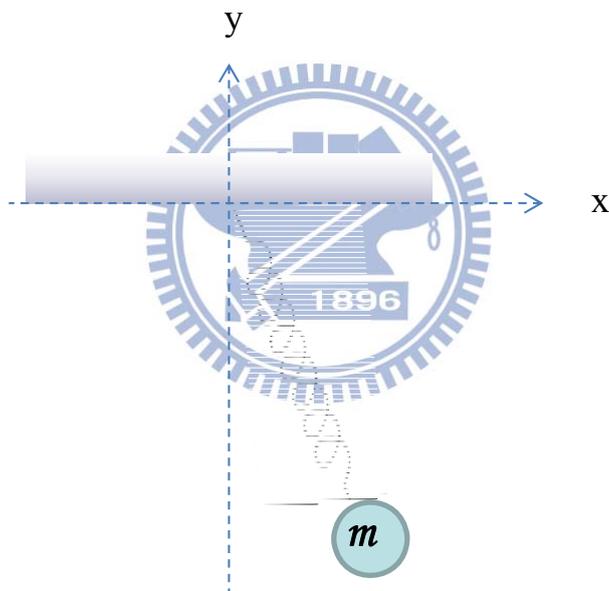


圖 5-2 彈簧擺

透過虎克定律，將彈簧的恢復力表示如下：

$$\vec{F}_s = -k \left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0 \right) \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -k \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) (x\hat{x} + y\hat{y}) \quad (5.1)$$

加上重力為 $\vec{F}_g = -mg\hat{y}$ 故，合力等於 $\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_g = m \frac{d^2x}{dt^2} \hat{x} + m \frac{d^2y}{dt^2} \hat{y}$ ，因

為 xy 為獨立系統，可以將其受力分成 x 分量與 y 分量，其各分量的受力表示如下：

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)x \\ \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -g - \frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)y \end{cases} \quad (5.2)$$

若考慮三維的彈簧，其所受恢復力為：

$$\vec{F}_S = -k\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l_o\right) \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (5.3)$$

加上重力 $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ 故，合力等於 $\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_g = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + m\frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} + m\frac{d^2z}{dt^2}\hat{z}$

一樣的可以分解成 xyz 三個獨力的方向，所受力分別為：

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)x \\ \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)y \\ \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = -g - \frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)z \end{cases} \quad (5.4)$$

有了力學方程式，我們可以透過上一小節所述的有線差分法來計算，

就可以得到其彈簧擺運動的軌跡，觀察不同情況下的結果為何，在

5.4 小節會詳細的討論。

5.3 傅立葉轉換

1812年，法國數學家約瑟夫-傅立葉在解「熱傳導定律」時被提出的。後來應用在波與頻譜分析上，傅立葉轉換屬於諧波分析。傅立葉轉換的逆轉換容易求出，而且形式與正轉換非常類似，任一週期函數可以分解成許多不同振幅、不同頻率的正弦諧波與餘弦諧波的合成。

在不同的研究領域，傅立葉轉換具有多種不同的變體形式，如：連續傅立葉轉換和離散傅立葉轉換。離散形式的傅立葉轉換可以利用數字計算機快速的實現，其演算法稱快速傅立葉轉換（FFT）。

一般而言頻率與時間的傅立葉轉換表示式如下，這為連續的傅立葉轉換：

$$\begin{cases} f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt \\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (5.5)$$

5.3.1 離散傅立葉轉換

為了在科學計算和數字信號處理等領域使用計算機進行傅立葉變換，必須將函數定義在離散點而非連續域內，且須滿足有限性或周

期性條件。這種情況下，使用離散傅立葉變換，將函數表示為下面的求和形式：

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^N f(t_n) \cdot e^{i\omega t_n} \Delta t \quad , \quad \text{其中 } \Delta t = \frac{T}{N} \quad \text{則 } t_n = t_0 + n \cdot \Delta t$$

$$\text{令 } t_0 = 0 \text{ 則 } t_n = n \cdot \Delta t \quad , \quad \text{可得 } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^N f(\omega_m) \cdot e^{i\omega_m t} \Delta \omega \quad \text{其中 } \Delta \omega = \frac{2\pi}{N} \quad \text{則}$$

$\omega_m = \omega_0 + m \cdot \Delta \omega$ ，令 $\omega_0 = 0$ 則 $\omega_m = m \cdot \Delta \omega$ ，這就是離散的傅立葉轉換。

5.3.2 快速傅立葉變換

快速傅立葉轉換，是離散傅立葉變換的快速演算法，也可用於計算離散傅立葉變換的逆變換。快速傅立葉變換有廣泛的應用，如數位訊號處理、計算大整數乘法、求解偏微分方程等等。

早期的傅利葉轉換大都利用手算來完成，因此傅利葉轉換標本個數都很小，儘管早在 1865 年 Gauss 就曾提出有關於如何更快的計算傅利葉轉換的演算技巧，但快速傅利葉轉換的演算法真正開始受到重視是在 1965 年 Cooley 及 Tukey 發表一系列快速傅利葉轉換的論文，由於計算機能力的加強，傅利葉轉換標本個數增大了，大家開始關心如何使用更快的計算方式來節省計算機的時間，因此快速傅利葉轉換才有它的價值。

FFT (Fast Fourier Transform)，大幅提高頻譜的計算速度，FFT 使用條件：

信號必須是週期性的、取樣週期必須為信號週期的整數倍、取樣頻率必須高於信號最高頻率的 2 倍以上、取樣點數 N 必須為 2^n 個資料。如果提供的快速傅利葉轉換樣本個數是 2^n 個點的話，所花費的計算時間將會比樣本個數不是 2^n 個點要節省 8 倍以上。

5.4 彈簧擺的渾沌現象

三維的彈簧擺的合力為式子(5.4)，接著我們利用有限差分法求可以求得其軌跡表示式如下式表示：

$$\begin{aligned}
 x_{j+1} &= \left[-\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) x \right] (\Delta t)^2 + 2x_j - x_{j-1} \\
 y_{j+1} &= \left[-\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) y \right] (\Delta t)^2 + 2y_j - y_{j-1} \\
 z_{j+1} &= \left[-g - \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) z \right] (\Delta t)^2 + 2z_j - z_{j-1}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

同樣的我們也可以求得其各個分量的速度分佈：

$$\begin{aligned}
 v_{x_0} &= \frac{x_1 - x_0}{\Delta t} \rightarrow x_1 = x_0 + v_{x_0} \Delta t \\
 v_{y_0} &= \frac{y_1 - y_0}{\Delta t} \rightarrow y_1 = y_0 + v_{y_0} \Delta t \\
 v_{z_0} &= \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} \rightarrow z_1 = z_0 + v_{z_0} \Delta t
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

然而整個彈簧擺的總能量為就可以用下面式子表示：

$$E = mgz + \frac{1}{2}k \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l_o \right)^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \quad (5.8)$$

當 $x_o = 0$, $y_o = 0$, $z_o = -l_o$, $v_{zo} = 0$ 時，為最低能量

$$E_{\min} = mg \left[- \left(l_o + \frac{mg}{k} \right) \right] + \frac{1}{2}k \left[\left(l_o + \frac{mg}{k} \right) - l_o \right]^2 = -mg \left(l_o + \frac{1}{2} \frac{mg}{k} \right) \quad (5.9)$$

將總能量以動能形式表示為 $E = -mgl_o + \frac{1}{2}mv_{x_o}^2 + \frac{1}{2}mv_{y_o}^2$ ，而為了方便討論，我們定義兩個控制彈簧擺運動系統的重要參數為：(1)能量比率

R，(2)頻率比率 u，其定義如下：

$$R \equiv -\frac{E}{E_{\min}} \quad \rightarrow \quad R: -1 \sim \infty \quad (5.10)$$

$$u \equiv \frac{\omega_s^2}{\omega_p^2} = 1 + \frac{k l_o}{mg} \quad \rightarrow \quad u: 1 \sim \infty \quad (5.11)$$

有了這些軌跡的運動方程式，我們就可以利用數學軟體 Mathcad 模擬出彈簧擺運動軌跡，接下來探討部分，主要為觀察 xy 平面的投影，我們會先固定 u 值 (例如：u=4)，且不變動 V_{y_o} 、 V_{z_o} (例如： $V_{y_o}=0$ 、 $V_{z_o}=0$)，並將起始點定在 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=-L_0$ ，觀察當改變起始速度 V_{x_o} 時，彈簧擺的運動將會是何種軌跡。當 u=4 時，改變初始速度 V_{x_o} ：

當我們改變 u 值 (例如：u=6)，但仍不變動 V_{y_o} 、 V_{z_o} (例如： $V_{y_o}=0$ 、 $V_{z_o}=0$)，並將起始點定在 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=-L_0$ ，觀察當改變起始速度 V_{x_o} 時，彈簧擺運動軌跡，如下表 5.2。

表 5.1 $u=4$ 時不同 V_{x0} 的二維彈簧擺軌跡

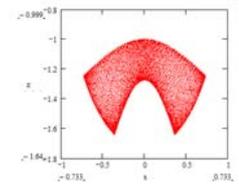
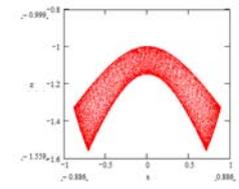
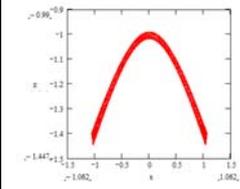
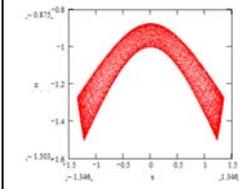
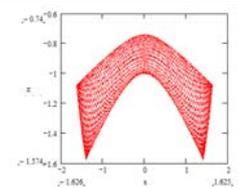
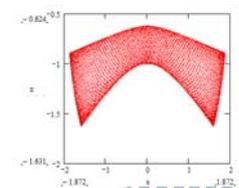
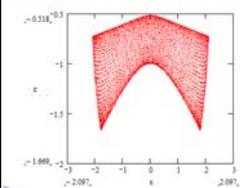
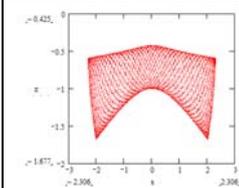
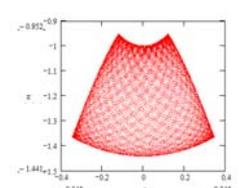
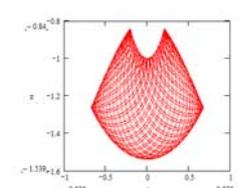
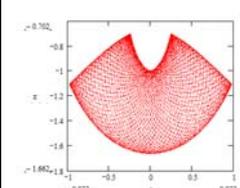
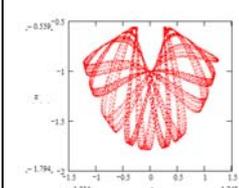
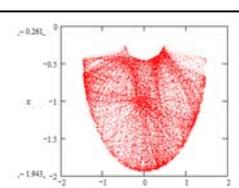
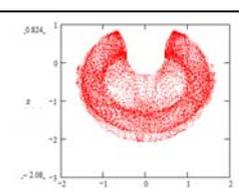
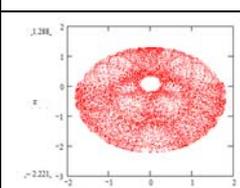
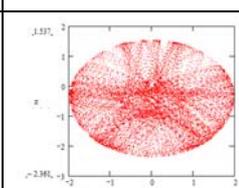
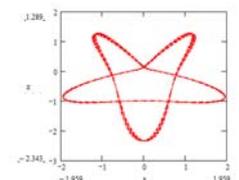
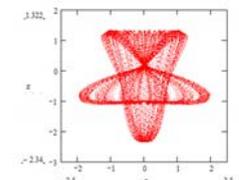
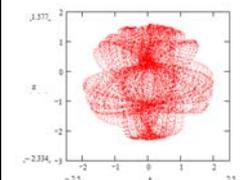
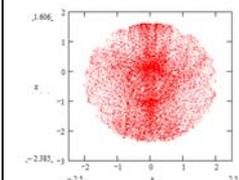
$u=4$	$V_{x0}=1$ ($R = -0.813$)	$V_{x0}=2$ ($R = -0.682$)	$V_{x0}=3$ ($R = -0.464$)	$V_{x0}=4$ ($R = -0.157$)
軌跡				
$u=4$	$V_{x0}=5$ ($R=0.236$)	$V_{x0}=6$ ($R=0.717$)	$V_{x0}=7$ ($R=1.286$)	$V_{x0}=8$ ($R=1.942$)
軌跡				

表 5.2 $u=6$ 時不同 V_{x0} 的二維彈簧擺軌跡

$u=6$	$V_{x0}=1$ ($R = -0.863$)	$V_{x0}=2$ ($R = -0.724$)	$V_{x0}=3$ ($R = -0.492$)	$V_{x0}=4$ ($R = -0.167$)
軌跡				
$u=6$	$V_{x0}=5$ ($R = 0.25$)	$V_{x0}=6$ ($R = 0.761$)	$V_{x0}=7$ ($R = 1.364$)	$V_{x0}=8$ ($R = 2.059$)
軌跡				

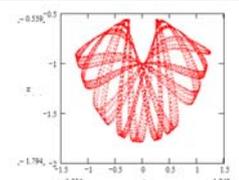
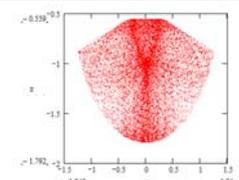
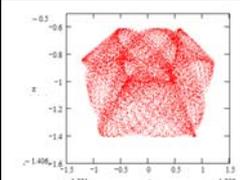
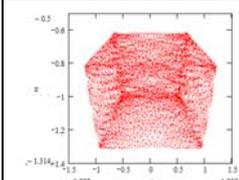
當我們固定 u 值 (例如： $u=6$)，且固定 V_{x0} 、 V_{y0} 、 V_{z0} (例如： $V_{x0}=8.44$ 、 $V_{y0}=0$ 、 $V_{z0}=0$)，但改變起始點位置 y ，觀察彈簧擺軌跡，如表 5.3。

表 5.3 $u=6$, $V_{x0}=8.44$ 時不同初始位置的二維彈簧擺軌跡

$u=6$	$x=0$	$x=0$	$x=0$	$x=0$
V_{x0}	$y=0$	$y=0.01$	$y=0.02$	$y=0.03$
$=8.44$	$z=-L_0$	$z=-L_0$	$z=-L_0$	$z=-L_0$
軌跡				

另外，當我們固定 u 值 (例如： $u=6$)，且固定 V_{x0} 、 V_{y0} 、 V_{z0} (例如： $V_{x0}=4$ 、 $V_{y0}=0$ 、 $V_{z0}=0$)，但改變起始點位置 y ，觀察彈簧擺軌跡。

表 5.4 $u=6$, $V_{x0}=4$ 時不同初始位置的二維彈簧擺軌跡

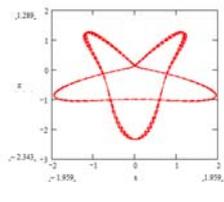
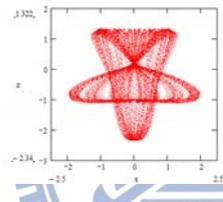
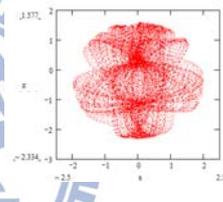
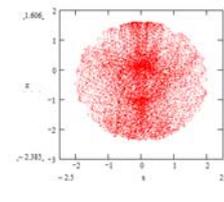
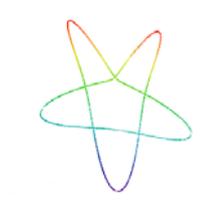
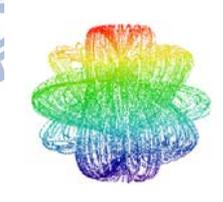
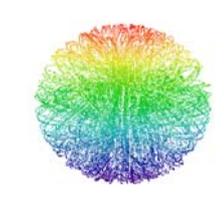
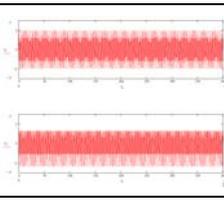
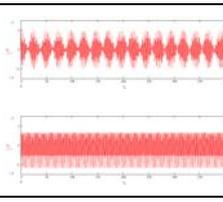
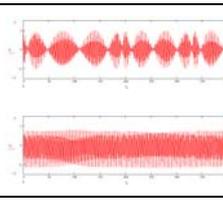
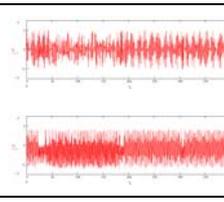
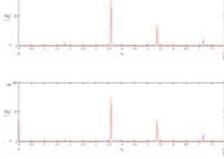
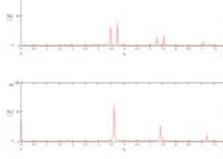
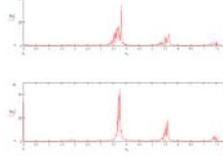
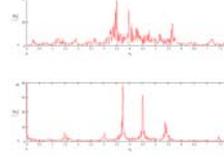
$u=6$	$x=0$	$x=0$	$x=0$	$x=0$
V_{x0}	$y=0$	$y=0.01$	$y=0.4$	$y=0.5$
$=4$	$z=-L_0$	$z=-L_0$	$z=-L_0$	$z=-L_0$
軌跡				

我們發現，當些微改變彈簧擺的起始條件，例如：改變起始速度、起始位置...，竟然能使彈簧擺的運動軌跡有如此大的差異！有些軌跡

看起來簡單規律、有些則看似雜亂無章，下面我們將利用傅立葉轉換以及 Mathcad 軟體來協助我們解開彈簧擺運動軌跡的神秘面紗。

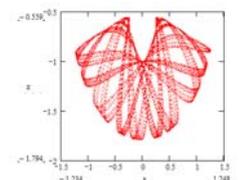
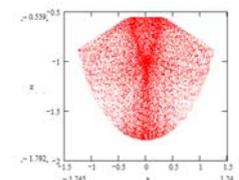
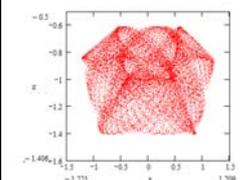
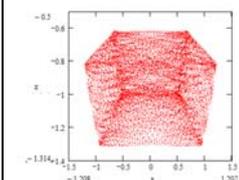
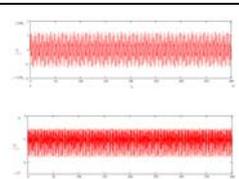
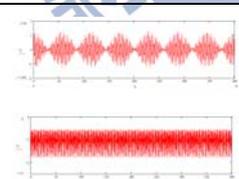
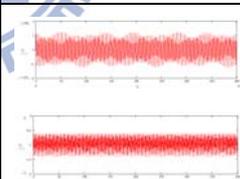
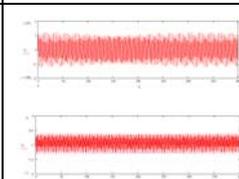
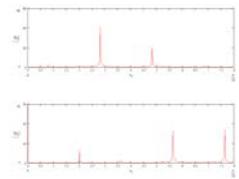
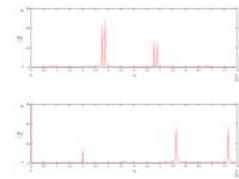
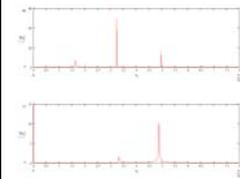
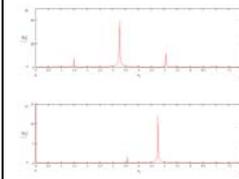
當我們固定 u 值 (例如： $u=6$)，且固定 V_{x0} 、 V_{y0} 、 V_{z0} (例如： $V_{x0}=8.44$ 、 $V_{y0}=0$ 、 $V_{z0}=0$)，但改變起始點位置 y ，觀察彈簧擺的運動軌跡、及傅立葉轉換之後的頻譜。

表 5.5 $u=6$, $V_{x0}=8.44$ 時不同初始位置的二維彈簧擺軌跡與傅立葉分析

$u=6$	$x=0$	$x=0$	$x=0$	$x=0$
V_{x0}	$y=0$	$y=0.01$	$y=0.02$	$y=0.03$
$=8.44$	$z=-L_0$	$z=-L_0$	$z=-L_0$	$z=-L_0$
二維軌跡				
三維軌跡				
				
				

當我們固定 u 值 (例如： $u=6$)，且固定 V_{x0} 、 V_{y0} 、 V_{z0} (例如： $V_{x0}=4$ 、 $V_{y0}=0$ 、 $V_{z0}=0$)，但改變起始點位置 y ，觀察彈簧擺的運動軌跡、及傅立葉轉換之後的頻譜。

表 5.6 $u=6$, $V_{x0}=4$ 時不同初始位置的二維彈簧擺軌跡與傅立葉分析

$u=6$	$x=0$	$x=0$	$x=0$	$x=0$
$V_{x0}=4$	$y=0$	$y=0.01$	$y=0.4$	$y=0.5$
	$z=-L_0$	$z=-L_0$	$z=-L_0$	$z=-L_0$
二維軌跡				
三維軌跡				
				
				

經過了傅立葉轉換，我們可以發現，當我們看到彈簧擺的運動軌跡是一個簡單規律的圖案時，其頻譜也是個簡單的頻率，甚至分析其頻率之間的比值，約略為一個簡單的整數比：

例如：

下圖為 $u=6$ 、 $V_{x0}=8.44$ 、 $V_{y0}=0$ 、 $V_{z0}=0$ 、 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=-L_0$ ，其軌跡圖為 $x-z$ 平面圖，故我們分析其 f_x 、 f_z 頻譜，發現了有趣的現象。

這個圖形的頻譜，傅立葉轉換後的頻率很純，且頻率之間呈現簡單整數比的關係！所以圖形簡單又規律！

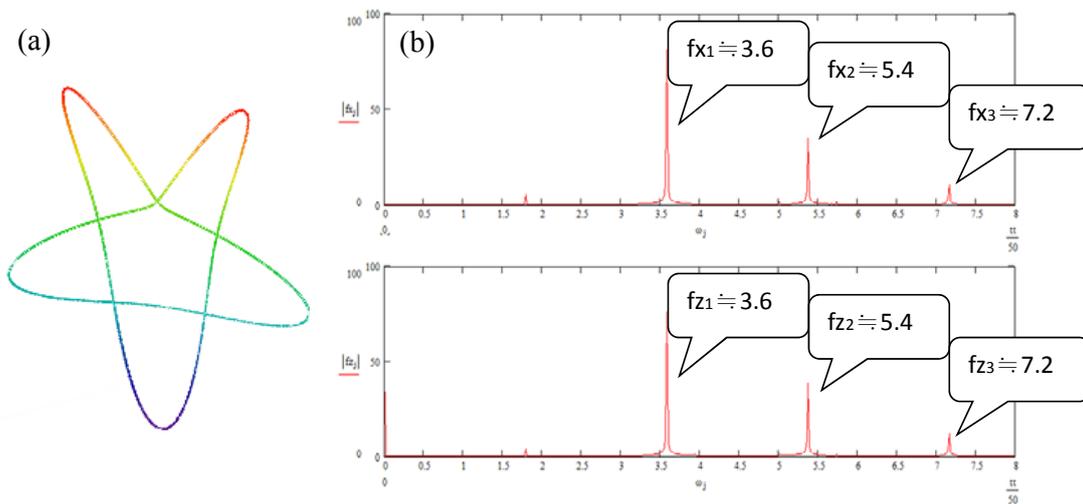


圖 5-3 $u=6$ 、 $V_{x0}=8.44$ (a) xy 平面軌跡 (b)傅立葉分析

另外，下圖為 $u=4$ 、 $V_{x0}=3$ 、 $V_{y0}=0$ 、 $V_{z0}=0$ 、 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=-L_0$ 時，彈簧擺之 $x-z$ 平面軌跡圖，並分析其 f_x 、 f_z 頻譜。

這個圖形的頻譜，傅立葉轉換後的頻率很純，且頻率之間呈現簡單整數比的關係！所以圖形簡單又規律！

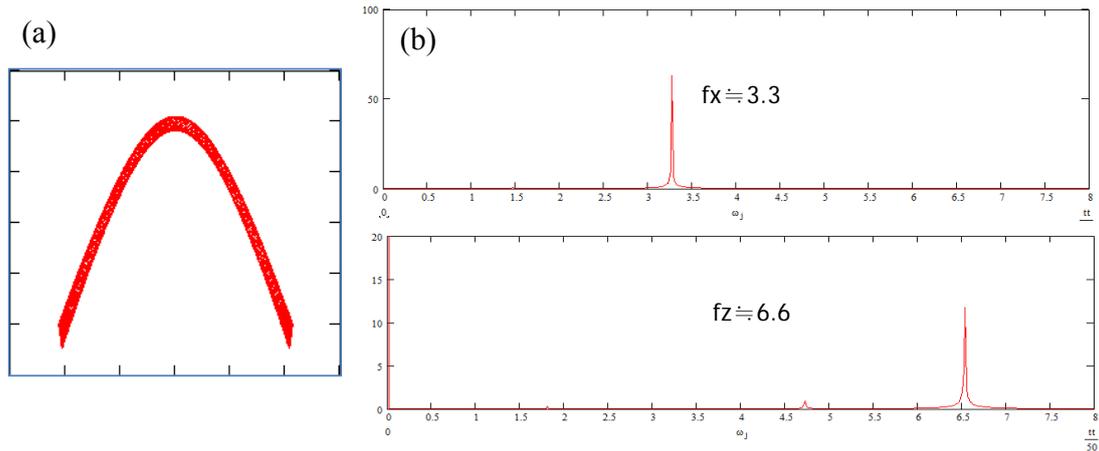


圖 5-4 $u=4$ 、 $V_{x0}=3$ (a)xy 平面軌跡 (b)傅立葉分析

當我們看到彈簧擺的運動軌跡是一個漂亮但是看似規律的圖案時，其頻譜又是呈現何種樣貌呢？下圖 5-5 為 $u=6$ 、 $V_{x0}=3.972$ 、 $V_{y0}=0$ 、 $V_{z0}=0$ 、 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=-L_0$ ，其軌跡圖為 x-z 平面圖，故我們分析其 f_x 、 f_z 頻譜，發現了有趣的現象。這個圖形的頻譜，傅立葉轉換後的頻率雖然很純，但是不只一個，且沒有簡單整數比的關係，所以這個軌跡應是這些頻率組合的結果。

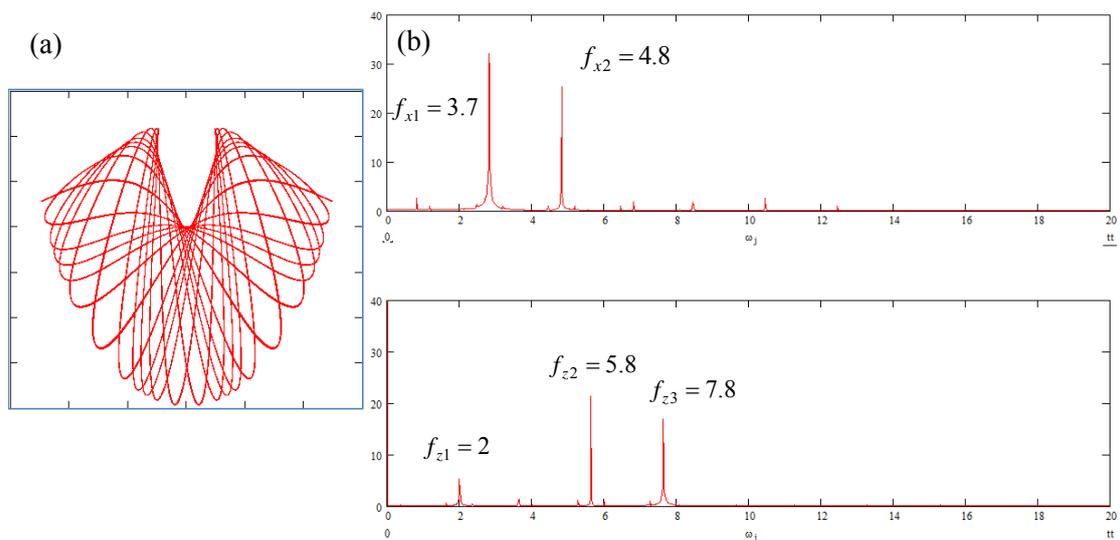


圖 5-5 $u=6$ 、 $V_{x0}=3.972$ (a)xy 平面軌跡 (b)傅立葉分析

最後，當我們看到彈簧擺的運動軌跡是一個看起來相當複雜且無規律的圖案時，其頻譜又是呈現何種樣貌呢？下圖 5-6 為 $u=6$ 、 $V_{x0}=8.44$ 、 $V_{y0}=0$ 、 $V_{z0}=0$ 、 $x=0$ 、 $y=0.1$ 、 $z=-L_0$ ，其軌跡圖為 $x-z$ 平面圖，故我們分析其 f_x 、 f_z 頻譜，發現這個圖形的頻譜，傅立葉轉換後的頻率果然頻寬很寬、且雜亂無序，所以這個軌跡即是渾沌。

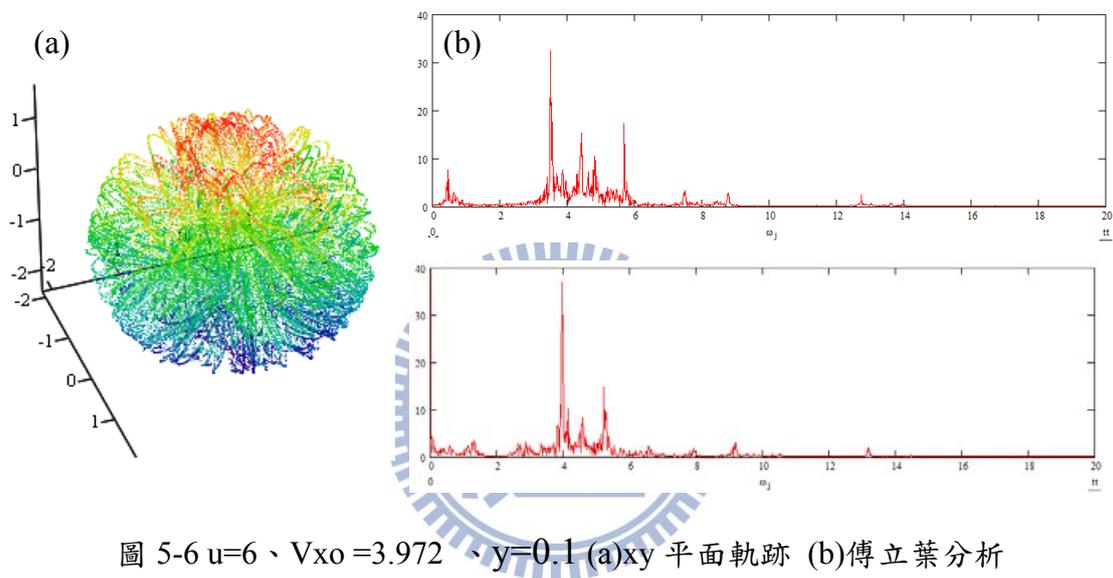


圖 5-6 $u=6$ 、 $V_{x0}=3.972$ 、 $y=0.1$ (a) xy 平面軌跡 (b)傅立葉分析

第六章 心得與展望

現代的電腦功能極為強大，有許多我們以往的物理實驗都必須透過實際操作、不斷試錯與修正，來驗證我們的想法與推論，往往是曠日廢時。而現在，我們可以經由電腦軟體(例如本文所使用的 Mathcad 軟體)之逼真模擬，先做一些推導與預測，並將之圖像化、視覺化，如此一來，除了可以幫助我們想像與理解，更能節省我們實驗和演算的時間。

在自然科學中有許多奇特的現象，具有深刻的物理意義，希望未來能藉由不同的週期性現象，發現更有趣的物理現象及視覺呈現，也希望透過電腦軟體工具的協助將抽象的數學、物理概念用具體、視覺化的方式運用到教學上並和中學教育做結合。

參考文獻

- [1] J. A. Flaten and K. A. Parendo, “Pendulum waves: A lesson in aliasing,” Am. J. Phys. **69**, 778 (2001).
- [2] James Flaten and Ronnie Cooper, “Improving Upon Mach’s Wave Machines to Demonstrate Traveling Waves,” THE PHYSICS TEACHER Vol. **43**,304 (2005).
- [3] R. E. Berg, “Pendulum wave:A demonstration of wave motion using pendula,” Am. J. Phys. **59(2)**, 186 (1991).
- [4] J. P. van der Weele and E. de Kleine, “The order-chaos-order sequence in the spring pendulum,” Physica A **228** 245(1996).
- [5] <http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%82%85%E9%87%8C%E5%8F%B6%E5%8F%98%E6%8D%A2>.
- [6] 李金航，自然科學中的數學概念，國立交通大學理學院碩士在職專班網路學習組，碩士論文，民國98年。
- [7] 陳同孝、張真誠、黃國峰，數位影像處理技術(第一版,民92)。
- [8] 彭芳麟，計算物理基礎(第一版,2010)。
- [9] 劉延柱，趣味振動力學(第一版,2012)。