

嘉義縣第 52 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書（封面）

科 別：物理

組 別：國中組

作品名稱：「擺」尺竿頭，更進一步

關鍵詞：單擺 秒擺 蛇擺（最多三個）

編號：

## 摘要：

本實驗首先來探討單擺來回擺動一次的時間（也就是週期）和擺長、擺錘質量以及擺角之間的關係，實驗結果發現單擺的擺動週期只和擺長有關，擺長愈長、擺動週期愈大、擺動得愈慢；擺長愈短、擺動週期愈小、擺動得愈快；接著探討秒擺（週期為二秒）和半秒擺（週期為一秒）要如何製作，秒擺和半秒擺的擺長和擺動週期之間有什麼關係；最後則由蛇擺的實驗探討組成蛇擺之各個單擺擺長之間的關係，還有蛇擺的週期和各個單擺週期之間的關係，以及不同蛇擺之間的關係。

## 壹、研究動機

在上個學期科學工藝博物館有幾項趣味的實驗器材在本校展出，由一年級和二年級共二十位同學擔任解說員，有本校的同學進行參觀之外也有附近的國小學生來觀摩，而其中有一項是蛇擺的實驗，我們覺得這個實驗非常有趣，為什麼用長度不同的線把金屬球吊起來，這些球在擺動的時候會有規律呢？我們想更深入探討蛇擺這個實驗的一些原理和物理觀念。

## 貳、研究目的

- 一、探討影響單擺週期的因素為何？
- 二、了解秒擺和半秒擺的製作以及原理。
- 三、探討蛇擺實驗中各個單擺擺長之間的關係為何？
- 四、蛇擺的週期和各個單擺的週期有什麼關係？
- 五、探討不同蛇擺（相鄰單擺擺長差不同）之間的關係。

## 參、研究設備及器材

棉線、量角器、膠帶、剪刀、碼錶、螺帽、捲尺、文件夾、竹籤、單擺架



## 肆、研究過程或方法

### 一、第一部份

(一) 取一條棉線固定在單擺架上

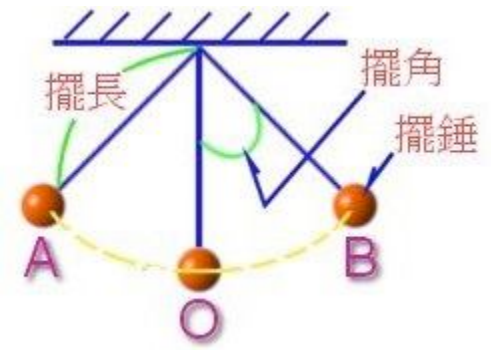
1. 擺長固定為 30cm，擺錘質量固定（掛一個螺帽）。
2. 擺角由 4、8、12、20、30、40(度)逐漸增加。
3. 紀錄每個角度擺動 10 次所需的時間。

(二) 取一條棉線固定在單擺架上

1. 擺長固定為 30 cm，擺角固定為 10 度。
2. 擺錘依次用大、中、小來測量（大：掛三個螺帽、中：掛二個螺帽、小：掛一個螺帽）。
3. 紀錄每個擺錘擺動 10 次所需的時間。

(三) 取一條棉線固定在單擺架上

1. 擺錘質量固定（掛一個螺帽），擺角固定為 10 度。
2. 擺長由 10、20、40、60、80、100(cm)逐漸增加。
3. 紀錄每個擺長擺動 10 次所需的時間。



### 二、第二部份

(一) 製作「秒擺」：秒擺是從一側最高點擺到另一側最高點所需的時間剛好等於一秒之單擺（週期=2 秒）。由第一部份（三）的實驗結果發現擺長為 100 公分的時候週期大約等於 2 秒，所以我們取擺長 90 公分至 110 公分的單擺來作實驗。

首先取一條棉線固定在單擺架上

1. 擺錘質量固定（掛一個螺帽），擺角固定為 10 度。
2. 擺長由 90、95、100、105、110(cm)逐漸增加。
3. 紀錄每個擺長擺動 10 次所需的時間。

(二) 製作「半秒擺」：半秒擺是從一側最高點擺到另一側最高點後又擺回原來的位置所需的時間剛好等於一秒之單擺（週期=1 秒）。由第一部份（三）的實驗結果發現週期為 1 秒的單擺擺長介於 20 公分與 40 公分之間，所以我們取擺長 20 公分至 40 公分的單擺來作實驗。

首先取一條棉線固定在單擺架上

1. 擺錘質量固定（掛一個螺帽），擺角固定為 10 度。
2. 擺長由 20、25、30、35、40(cm)逐漸增加。
3. 紀錄每個擺長擺動 10 次所需的時間。

### 三、第三部份

蛇擺中兩兩相鄰的單擺之頻率差是固定的（頻率成等差數列），這樣的話才會形成蛇擺的週期性，我們由第一部份的實驗中發現單擺週期  $T \propto \sqrt{L}$ ，所以單擺頻率  $f = \frac{1}{T} \propto \frac{1}{\sqrt{L}}$ ，所以構成蛇擺的每個單擺擺長的平方根之倒數是成等差數列的。

我們選擇做兩種蛇擺來探討：蛇擺的週期和各個單擺的週期有什麼關係、不同蛇擺（相鄰單擺擺長差不同）之間的關係。

上網查資料得到一些可作為構成蛇擺之單擺擺長的數據如下：

編號 1：9.85 公分    編號 2：10.4 公分    編號 3：11.0 公分    編號 4：11.6 公分  
 編號 5：12.3 公分    編號 6：13.1 公分    編號 7：13.9 公分    編號 8：14.8 公分  
 編號 9：15.8 公分    編號 10：16.9 公分    編號 11：18.1 公分    編號 12：19.5 公分  
 編號 13：21.0 公分    編號 14：22.7 公分    編號 15：24.7 公分    編號 16：26.6 公分

（一）第一種蛇擺：相鄰單擺之間的擺長差比較小

選擇 10.4 公分、11.0 公分、11.6 公分、12.3 公分、13.1 公分、13.9 公分、14.8 公分、15.8 公分這 8 個單擺。分別算出各個的週期（s/次）、頻率（次/s）、頻率差（次/s）。

（二）第二種蛇擺：相鄰單擺之間的擺長差比較大

選擇 10.4 公分、11.6 公分、13.1 公分、14.8 公分、16.9 公分、19.5 公分、22.7 公分、26.6 公分這 8 個單擺。分別算出各個的週期（s/次）、頻率（次/s）、頻率差（次/s）。

## 伍、研究結果

### 一、第一部份

表一 不同擺角的單擺週期實驗(擺長固定為 30cm，擺錘質量固定【掛一個螺帽】)

擺角	4 度	8 度	12 度	20 度	30 度	40 度
擺動 10 次所需時間(s)	10.93	11.06	11.19	11.09	11.35	11.41
	11.00	11.15	11.16	11.31	11.22	11.37
平均(s)	10.965	11.105	11.175	11.200	11.285	11.390
週期(s)	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.14

由表一的最後得到擺動週期的範圍都在 1.10~1.14 秒之間，因為數值相差非常地少，

我們可以看成擺動週期都相同，因此可以知道擺角的大小對擺動週期來說沒有影響。

表二 不同擺錘質量的單擺週期實驗(擺長固定為 30cm，擺角固定 10 度)

擺錘質量	大【掛三個螺帽】	中【掛二個螺帽】	小【掛一個螺帽】
擺動 10 次所需時間(s)	11.06	11.09	11.25
	11.09	11.25	11.31
	11.19	11.07	11.13
平均(s)	11.113	11.137	11.230
週期(s)	1.11	1.11	1.12

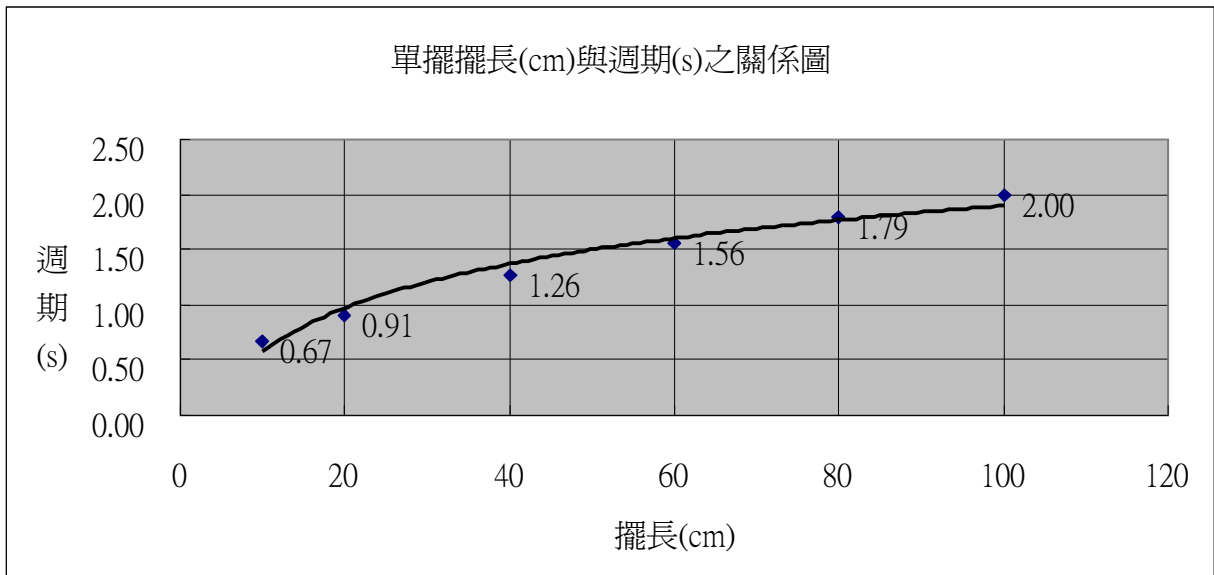
而由表二的最後得到擺動週期的範圍都在 1.11~1.12 秒之間，因為數值也相差非常地少，我們也可以看成擺動週期都相同，因此也可以知道擺錘質量的大小對擺動週期來說沒有影響。

表三 不同擺長的單擺週期實驗(擺錘質量固定【掛一個螺帽】，擺角固定為 10 度)

擺長(cm)	10	20	40	60	80	100
擺動 10 次所需時間(s)	6.68	9.09	12.62	15.56	17.97	19.96
	6.74	9.04	12.57	15.62	17.84	20.06
平均(s)	6.710	9.065	12.595	15.590	17.905	20.010
週期(s)	0.67	0.91	1.26	1.56	1.79	2.00

由表三的最後得到擺動週期都不相同而且相差很多，表示擺長和擺動週期之間有某種關係存在著，所以需要進一步分析擺長和擺動週期之間的關係。我們把實驗得到的每個數據畫在座標圖上，以單擺擺長(cm)為 X 座標、擺動週期(s/次)為 Y 座標，作出一個座標圖如圖一所示。我們大致上可以看出來單擺擺長愈長的話，它的擺動週期也愈長。

圖一

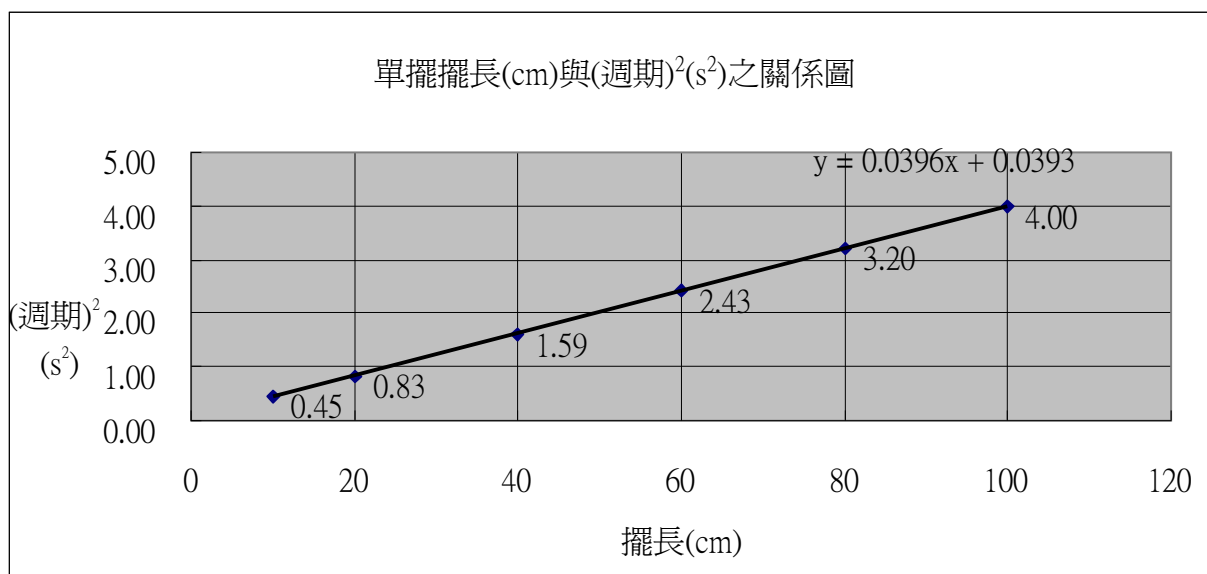


圖一不是一個直線線性關係圖，而是有一個曲線的弧度，它看起來像是一個拋物線，因為我們還沒有在數學課學習到有關拋物線的內容，所以請教老師高中數學的拋物線課程。拋物線的方程式  $y^2=2px$  ( $p>0$ )。所以我們如果想要得到一個直線的線性關係，就必須以擺動週期的平方為 Y 座標，單擺擺長為 X 座標，就可以得到  $Y=aX$  的直線線性關係。我們先把表三的數據整理一下，最後整理成為表四，將表四的數據畫在座標圖上，以單擺擺長(cm)為 X 座標、擺動週期的平方( $s^2$ )為 Y 座標，作出一個座標圖如圖二所示。很明顯地畫出來的圖是直線線性圖，表示擺動週期的平方和單擺擺長成正比例的關係。

表四

擺長(cm)	10	20	40	60	80	100
週期(s)	0.67	0.91	1.26	1.56	1.79	2.00
(週期) <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )	0.45	0.83	1.59	2.43	3.20	4.00

圖二

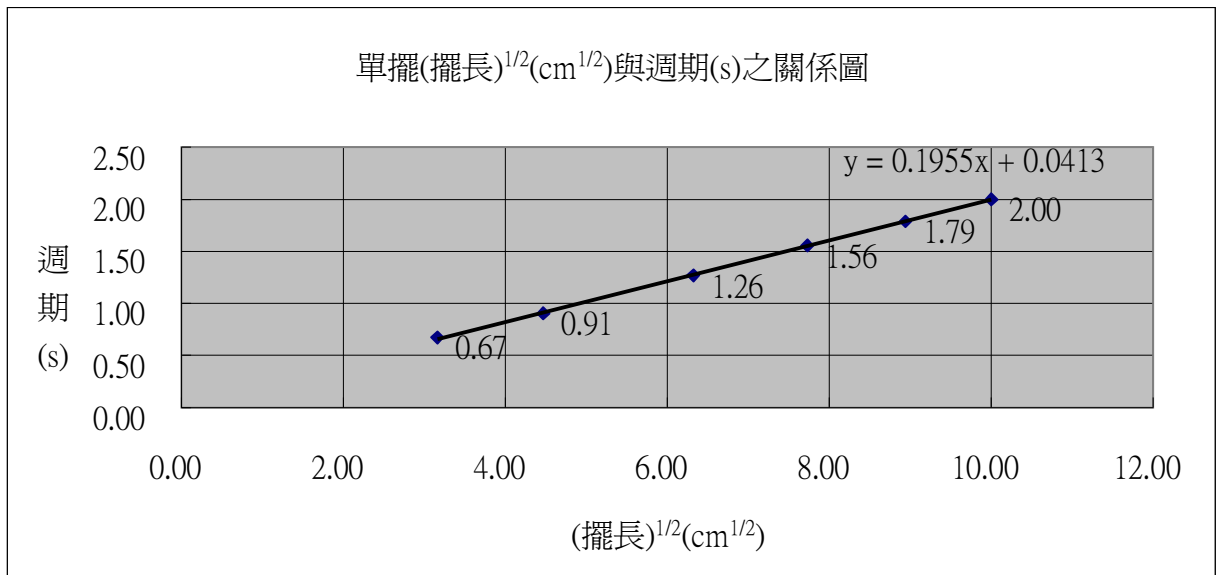


拋物線的方程式  $y^2=2px$  ( $p>0$ )也可以改為方程式的平方根式子  $y=(2px)^{1/2}$ ，推導得到  $y=(2p)^{1/2}(x)^{1/2}$ ， $(2p)^{1/2}$ 是常數，所以如果以單擺擺長的平方根為 X 座標，擺動週期(s/次)為 Y 座標，就可以得到  $Y=aX$  的直線線性關係。我們先把表三的數據整理一下，最後整理成爲表五，將表五的數據畫在座標圖上，以單擺擺長的平方根(cm)<sup>1/2</sup>爲 X 座標、擺動週期(s/次)爲 Y 座標，作出一個座標圖如圖三所示。很明顯地畫出來的圖也是直線線性圖，表示擺動週期和單擺擺長的平方根成正比例的關係。

表五

擺長(cm)	10	20	40	60	80	100
(擺長) <sup>1/2</sup> (cm <sup>1/2</sup> )	3.16	4.47	6.32	7.74	8.94	10.00
週期(s)	0.67	0.91	1.26	1.56	1.79	2.00

圖三



## 二、第二部份

(一) 製作「秒擺」：

表六 不同擺長的單擺週期實驗(擺錘質量固定【掛一個螺帽】，擺角固定為 10 度)

擺長(cm)	90	95	100	105	110
擺動 10 次所需時間(s)	18.95	19.54	19.95	20.46	20.79
	19.06	19.47	20.01	20.41	20.81
平均(s)	19.005	19.505	19.980	20.435	20.800
週期(s)	1.90	1.95	2.00	2.04	2.08

由以上的實驗結果可以發現擺長 100 公分的單擺，其週期大約等於 2 秒，所以秒擺的擺長大約等於 100 公分。





(二) 製作「半秒擺」：

表七 不同擺長的單擺週期實驗(擺錘質量固定【掛一個螺帽】，擺角固定為 10 度)

擺長(cm)	20	25	30	35	40
擺動 10 次所需時間(s)	9.07	10.06	10.98	11.79	12.58
	9.04	9.98	10.91	11.76	12.61
平均(s)	9.055	10.02	10.945	11.775	12.595
週期(s)	0.91	1.00	1.09	1.18	1.26

由以上的實驗結果可以發現擺長 25 公分的單擺，其週期大約等於 1 秒，所以半秒擺的擺長大約等於 25 公分。



### 三、第三部份

(一) 第一種蛇擺 ( $\Delta f$  頻率差  $\approx 0.042$  次/s)

n 編號	L 擺長 (cm)	T 週期 (s/次)	f 頻率 (次/s)	$\Delta f$ 頻率差(次/s)
1	10.4	0.64821	1.543	$f_n - f_{n+1}$
2	11.0	0.66664	1.500	0.043
3	11.6	0.68458	1.461	0.039
4	12.3	0.70493	1.418	0.043
5	13.1	0.72750	1.375	0.043
6	13.9	0.74938	1.334	0.041
7	14.8	0.77326	1.293	0.041
8	15.8	0.79896	1.252	0.041

此蛇擺的週期： $\frac{1}{0.042} = 23.809\cdots \cong 23.81$  秒

編號 1 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{23.81}{0.64821} = 36.731\cdots \cong 37$  次

編號 2 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{23.81}{0.66664} = 35.716\cdots \cong 36$  次

編號 3 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{23.81}{0.68458} = 34.780\cdots \cong 35$  次

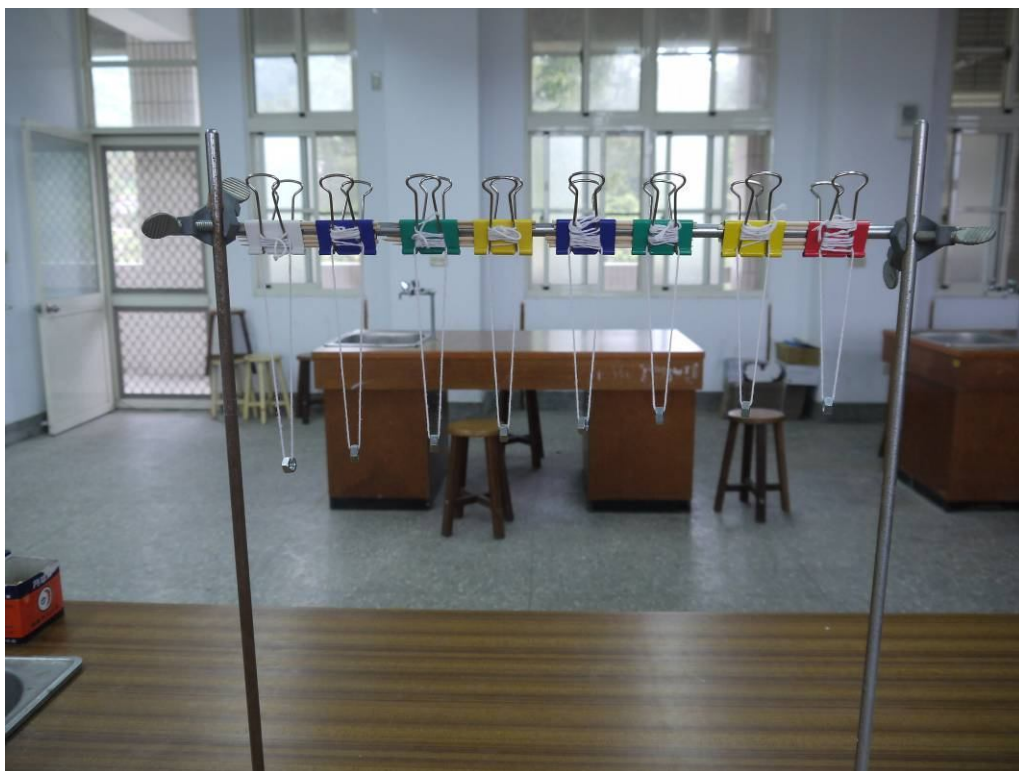
編號 4 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{23.81}{0.70493} = 33.776\cdots \cong 34$  次

編號 5 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{23.81}{0.72750} = 32.728\cdots \cong 33$  次

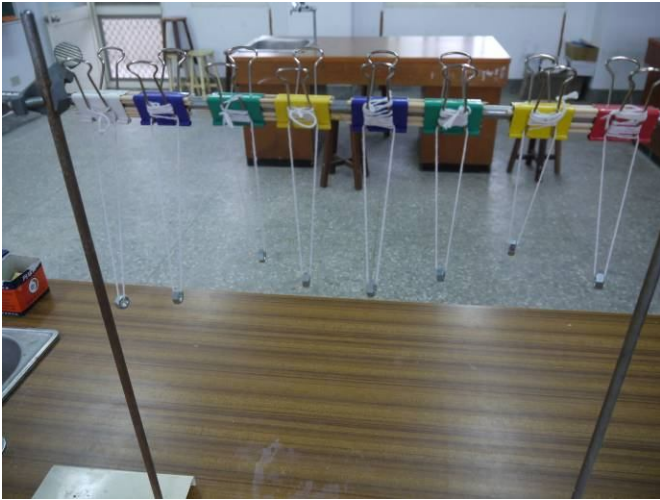
編號 6 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{23.81}{0.74938} = 31.772\cdots \cong 32$  次

編號 7 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{23.81}{0.77326} = 30.791\cdots \cong 31$  次

編號 8 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{23.81}{0.79896} = 29.801\cdots \cong 30$  次



第一種蛇擺



相鄰擺錘振幅逐漸加大



相鄰擺錘振幅達到最大



相鄰擺錘振幅逐漸減小



逐漸回到原來相位



回到原來波形



下一個週期-相鄰擺錘振幅逐漸加大

(二) 第二種蛇擺 ( $\Delta f$  頻率差  $\approx 0.083$  次/s)

n 編號	L 擺長 (cm)	T 週期 (s/次)	f 頻率 (次/s)	$\Delta f$ 頻率差(次/s)
1	10.4	0.64821	1.543	$f_n - f_{n+1}$
2	11.6	0.68458	1.461	0.082
3	13.1	0.72750	1.375	0.086
4	14.8	0.77326	1.293	0.082
5	16.9	0.82630	1.210	0.083
6	19.5	0.88759	1.127	0.083
7	22.7	0.95765	1.044	0.083
8	26.6	1.04058	0.961	0.083

此蛇擺的週期： $\frac{1}{0.083} = 12.048\cdots \approx 12.05$  秒

編號 1 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{12.05}{0.64821} = 18.589\cdots \approx 19$  次

編號 2 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{12.05}{0.68458} = 17.602\cdots \approx 18$  次

編號 3 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{12.05}{0.72750} = 16.563\cdots \approx 17$  次

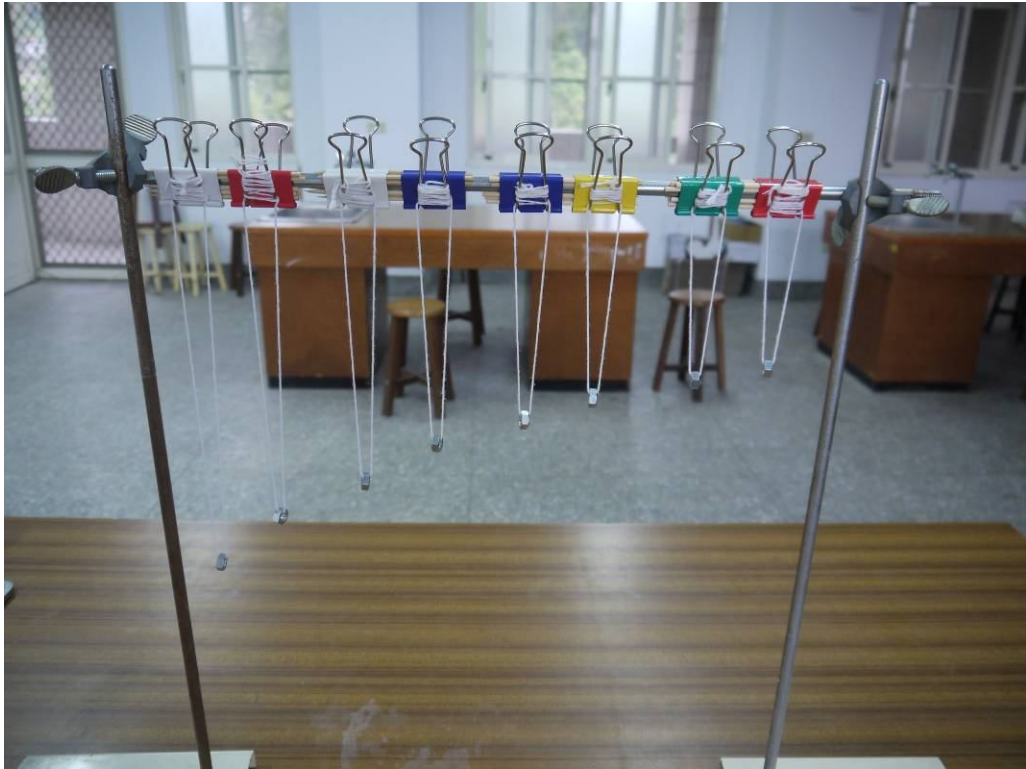
編號 4 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{12.05}{0.77326} = 15.583\cdots \approx 16$  次

編號 5 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{12.05}{0.82630} = 14.583\cdots \approx 15$  次

編號 6 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{12.05}{0.88759} = 13.576\cdots \approx 14$  次

編號 7 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{12.05}{0.95765} = 12.582\cdots \approx 13$  次

編號 8 單擺在蛇擺一個週期內擺動了  $\frac{12.05}{1.04058} = 11.580\cdots \approx 12$  次



第二種蛇擺



相鄰擺錘振幅逐漸加大



相鄰擺錘振幅達到最大



相鄰擺錘振幅逐漸減小



逐漸回到原來相位



回到原來波形



下一個週期-相鄰擺錘振幅逐漸加大

## 陸、討論

### 一、第一部份

(一) 單擺的擺長固定時，擺動週期和擺角大小無關，擺動週期也和擺錘質量大小無關。

(二) 單擺的擺動週期只和擺長有關。擺長愈長，擺動週期愈長，也就是擺動得愈慢；相反地，擺長愈短，擺動週期愈短，也就是擺動得愈快。我們由圖三可以知道，單擺的擺動週期和擺長的平方根成正比例的關係。

$$T \propto \sqrt{L}$$

(三) 單擺的擺動週期  $T$  和擺長  $L$  滿足下式：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (g: \text{重力加速度})$$

這個公式的推導要到高中的物理課程才會學到。所以如果我們測量出單擺的擺

動週期  $T$  和單擺擺長  $L$  的話，就可以得到當地的重力加速度  $g$  了。

## 二、第二部份

(一) 我們由單擺週期的公式  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  :

$\therefore$  秒擺的週期  $T = 2$  秒、重力加速度  $g \doteq 9.8$  公尺/秒<sup>2</sup>

$\therefore$  秒擺的擺長  $L \doteq 1$  公尺 = 100 公分

(二) 我們由單擺週期的公式  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  :

$\therefore$  半秒擺的週期  $T = 1$  秒、重力加速度  $g \doteq 9.8$  公尺/秒<sup>2</sup>

$\therefore$  半秒擺的擺長  $L \doteq 0.25$  公尺 = 25 公分

(三) 秒 擺的週期  $T_1 = 2$  秒、擺長  $L_1 = 100$  公分

半秒擺的週期  $T_2 = 1$  秒、擺長  $L_2$

$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  ,  $2\pi$  、 $g$  都是常數

$\therefore T \propto \sqrt{L}$

$\Rightarrow T_1 : T_2 = \sqrt{L_1} : \sqrt{L_2} = 2 : 1$

$\Rightarrow \sqrt{100} : \sqrt{L_2} = 2 : 1$

$\Rightarrow L_2 = 25$  公分

$\therefore$  半秒擺的擺長  $L_2 = 25$  公分

## 三、第三部份

(一) 假設蛇擺一個週期為  $\Gamma$ ，等於最長的單擺擺動  $N$  次所需的時間，也等於次長的單擺擺動  $N+1$  次所需的時間，也等於最短的單擺擺動  $N+n$  次所需的時間，單擺的週期則為  $\frac{\Gamma}{N+n}$  …… (1)

每個單擺的間隔為  $d$ ，距離可得  $x = nd$ ，由單擺週期的公式： $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  …… (2)

由 (1) 式等於 (2) 式可推得  $L(x) = g \left[ \frac{\Gamma d}{2\pi(Nd+x)} \right]^2$ ，這就是我們所觀察到蛇擺擺錘的連線函數。

(二) 製作蛇擺最重要的是構成蛇擺的每個單擺擺長的微調必須要精準，因為擺長如果稍微長一點或者短一點的話，這樣蛇擺在擺動的時候就不是那麼地有規律好看了，本次實驗在測量蛇擺的每個單擺擺長的時候不是非常地精準，以致於蛇

擺在擺動的時候就不像科工館的蛇擺那麼好看了；而擺錘最好用球狀物比較好，這樣在擺動的時候受到的空氣阻力會比較小，本次實驗用的螺帽在擺動的時候受到的空氣阻力會比較大，以致於蛇擺在進行一個週期之後振幅就會變得很小，而不像科工館的蛇擺可以進行三、四個週期都沒有問題；還有第一種蛇擺的週期大約 23.81 秒、第二種蛇擺的週期大約 12.05 秒，所以第二種蛇擺會比較快進行完一個週期，在拍照時的時機比較難掌握，因為稍微慢一點的話就拍不到想要的照片了；而且由實驗的結果可以發現在蛇擺進行一個週期的時間內相鄰兩個單擺擺動的次數都相差一次。

## 柒、結論

研究蛇擺真的是一件非常有趣的事情，我們從過程中學習到科學實驗就是要實際動手操作，這樣不僅可以學習到科學的知識，也可以讓我們體會到研究科學的過程之趣味；而在本實驗中我們所製作的蛇擺還有需要改進的地方，之後要將蛇擺繼續改良，這樣才能更完美。

## 捌、參考資料及其他

一、中央大學物理實驗演示(蛇擺)

<http://demo.phy.tw/experiment/dynamics/pendulumwave/>

二、清華大學物理系科普教育網站(蛇擺)

<http://140.114.80.32/schoolpad/front/bin/ptdetail.phtml?Part=52&Category=20>

三、中央研究院物理研究所高中科學培育計畫

<http://www.phys.sinica.edu.tw/~youthproject/report/homework.php?nid=521&wid=161>

四、單擺週期運動

[http://140.117.34.2/faculty/org/cs\\_lee/les/photo/bottom08b.htm](http://140.117.34.2/faculty/org/cs_lee/les/photo/bottom08b.htm)

五、宜蘭縣國中自然與生活科技領域（蛇擺～優美的律動！）

<http://blog.ilc.edu.tw/blog/blog/15/post/9273/37968>