

投稿類別：物理類

篇名：
單擺及其應用—蛇擺

作者：
鄭瀚。桃園市私立新興高中。一年 214 班

指導老師：范文賓老師

壹.前言

一. 研究動機：

在生活中，到處都可以見到「擺」的應用，像是盪鞦韆、鐘擺、需上發條的節拍器.....。在這些不同種類的擺中，我們目前所學到的有單擺的週期公式 $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ ，但沒有說明這項公式是如何推導出來的。於是我便去查資料，了解了公式的由來，並查到了其中一項單擺的應用—蛇擺。

二. 研究目的：

(一).了解單擺週期公式的由來。

(二).用圖表認識蛇擺頻率和擺動幅度的變化關係。

三. 研究大綱：

(一).了解單擺週期公式由來(目前課本教的)。

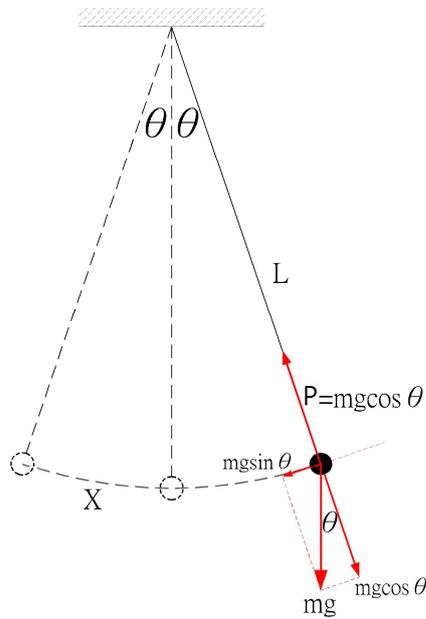
(二).運用軟體繪製出單擺擺長與頻率變化關係圖。

(三). 運用繪圖軟體繪製蛇擺擺垂位置和頻率的變化關係圖。

貳.正文

一. 單擺週期公式由來：

(一).示意圖：



圖(一)

(二).公式推導：

1.符號代表

L: 單擺擺長

m: 單擺擺錘質量

θ : 單擺擺角

x: 擺錘到平衡點的位移

2.公式： $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (擺角 θ 接近零時可用簡諧運動推導)

簡諧運動：若受力滿足 $F=-kx$ 則週期可寫為 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

證明：如圖(一)

擺錘所受重力 mg 可分解成 $mgsin\theta$ 及 $mgcos\theta$

其中 $mgcos\theta$ 和擺繩拉力 P 抵銷，回復力為 $mgsin\theta$

即為 $F=-mgsin\theta$

當擺角 θ 接近零時

$$F=-mg\theta, \theta=\frac{x}{L}$$

單擺及其應用—蛇擺

所以 $F = -mg \frac{x}{L}$

整理可得 $F = -\frac{mg}{L}x$

其中令 $-\frac{mg}{L} = k$ 代入簡諧運動週期公式

單擺週期即可寫成 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

(三).由上述推導過程可知：單擺公式為 $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ 時，擺角 θ 必須接近零，印證課本上寫的擺角 $\theta < 5^\circ$

二. 單擺的應用—蛇擺

(一).蛇擺，由數個單擺組成。

(二)每個單擺的頻率成等差數列。

(三).開始擺動後出現行進波的形狀，行進波波長隨時間變化愈來愈短，漸漸進入紊亂，最後回到初始的一直線狀態。

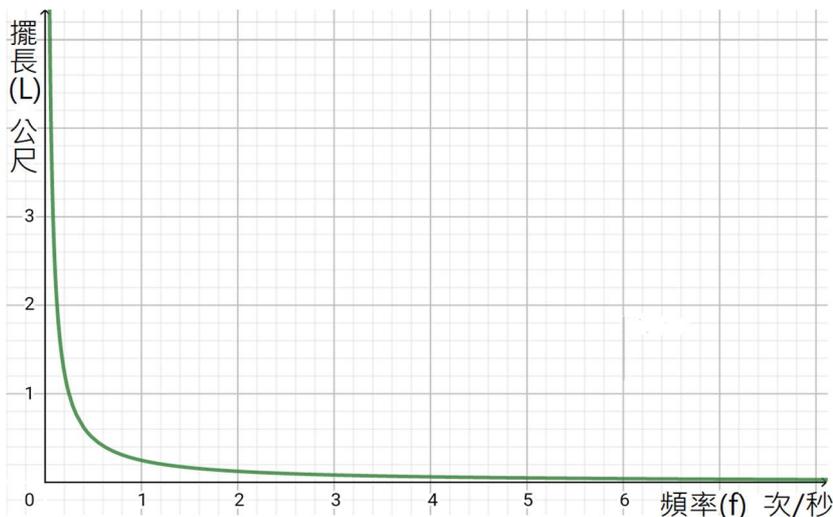
三.以繪圖軟體 (詳：引註資料) 繪製出蛇擺擺動幅度和時間的變化關係圖

(一).蛇擺中各單擺擺長對頻率變化關係：

1.由單擺公式 $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ 及頻率和週期成倒數關係 $T = \frac{1}{f}$

得到 $L = \frac{g}{4\pi^2} \times \left(\frac{1}{f^2}\right)$ ，所以 $L \propto \frac{1}{f^2}$

2.關係圖：



圖(二)

3. 由此圖可知當單擺頻率 f 愈小，擺長 L 的變化愈劇烈。
4. 下列 第(二)點蛇擺擺垂位置和時間的變化關係圖 取上述關係圖中 頻率 0.85 次/秒、頻率 0.9次/秒、頻率 0.95次/秒..... 頻率1.15次/秒 共 7 個單擺作為數據。

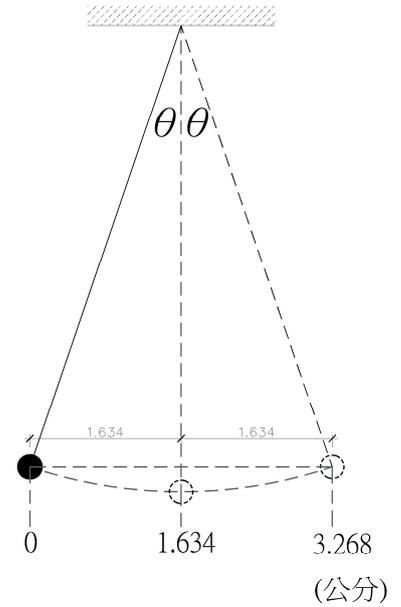
(二). 蛇擺中各單擺擺垂位置與時間關係圖：

1. 已知單擺在擺角 θ 接近零時可用簡諧運動推導。
2. 因此蛇擺中各單擺擺垂位置與時間關係式可寫成

$$x = -d \times \cos(f \times 2\pi t) + d$$

符號代表：

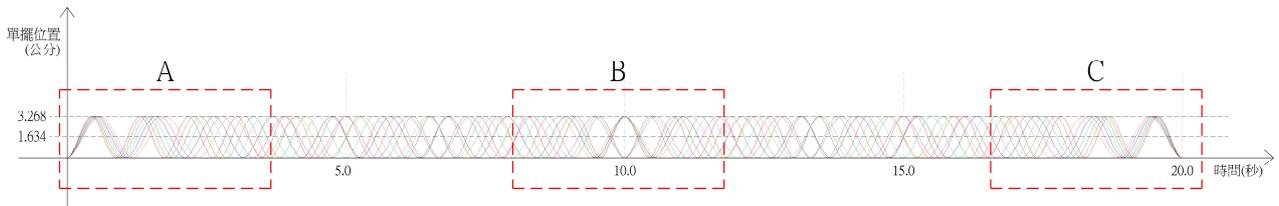
- x : 各單擺擺垂位置(cm)，如右圖(三)，向右為正。
- d : 各單擺擺動幅度(cm)，不超過1.634cm，避免擺角過大。
- f : 各單擺頻率(次/秒)：以下分別以 0.85 次/秒、0.9次/秒、0.95次/秒..... 1.15次/秒共 7 個單擺作為數據。
- t : 從開始擺動所經過的時間(秒)



圖(三)

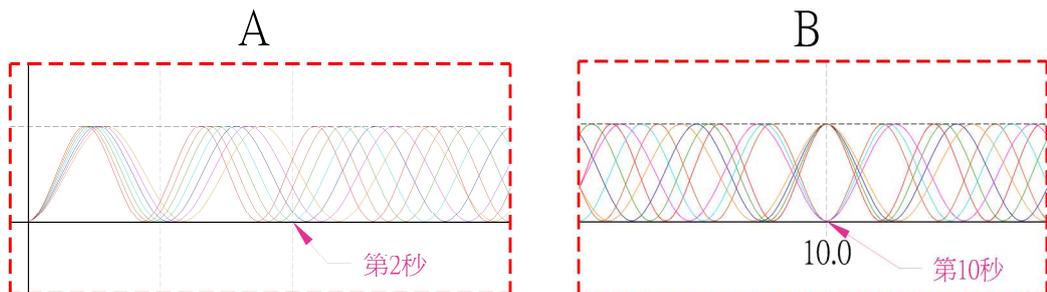
3. 蛇擺中各單擺擺垂位置與時間關係圖：

(1). 關係圖總成：

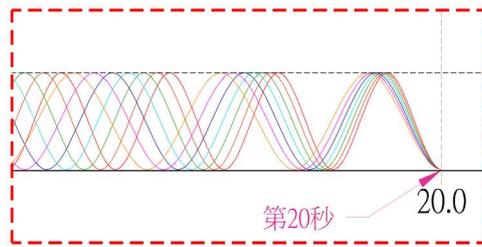


圖(四)

(2). 關係圖段落放大：



C



圖例說明：不同擺長於20秒內擺動次數

a	—	23次
b	—	22次
c	—	21次
d	—	20次
e	—	19次
f	—	18次
g	—	17次

(3).由圖(四)可看出此蛇擺完成一個週期為20秒，會發現以 $t=10$ 當對稱軸時，左右圖形對稱。

(4).從(2).關係圖段落放大中圖B可發現：

取出單擺 a、單擺 c、單擺 e、單擺 g (20秒擺偶數次的單擺)
及單擺 b、單擺 d、單擺 f (20秒擺奇數次的單擺)

在 $t=10$ 的時候：

單擺 a、單擺 c、單擺 e、單擺 g (20秒擺 偶數 次的單擺)

擺垂位置同為 0(cm)

單擺 b、單擺 d、單擺 f (20秒擺 奇數 次的單擺)

擺垂位置同為 3.268(cm)

所以在 $t=10$ 的時候，(20秒擺 偶數 次的單擺) 及 (20秒擺 奇數 次的單擺) 間的距離最遠(2倍振幅)。

(5).設 $n \in \mathbb{N}$ (正整數)

若取 20秒擺 n 次的單擺 (單擺 a、單擺 b 單擺 g)。

可發現：

(單擺 a、單擺 b 單擺 g) 的頻率成等差數列，此等差數列的公差 = $\frac{1}{20}$

而這些20秒擺 n 次的單擺可以構成另一個蛇擺(由(1).關係圖總成可知：此蛇擺週期為20秒)。

若取 20秒擺 $2n$ 次的單擺 (單擺 a、單擺 c、單擺 e、單擺 g)

可發現：

(單擺 a、單擺 c、單擺 e、單擺 g) 的頻率成等差數列，此等差數列的公差 = $\frac{1}{10}$

而這些20秒擺 $2n$ 次的單擺可以構成另一個蛇擺(由(1).關係圖總成可知：此蛇擺週期為10秒)。

所以我認為：

若蛇擺中各單擺頻率間的公差 = k ，且各單擺的頻率不互質，則此蛇擺的週期 = $\frac{1}{k}$ 秒。

參. 結論

一.正文結論：

(一).單擺：

- 1.目前所學的單擺週期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 只適用於小角度擺動。
- 2.當單擺頻率 f 愈小，擺長 L 的變化愈劇烈。

(二). 蛇擺：

1. 由數個單擺組成。
2. 每個單擺的頻率成等差數列
3. 當蛇擺完成一個週期為 x 秒時，會發現蛇擺中各單擺擺垂位置與時間關係圖中以時間 $t = \frac{x}{2}$ 當對稱軸時，左右圖形對稱。
4. 蛇擺完成一個週期為 x 秒，會發現當 $t = \frac{x}{2}$ 時，(x 秒擺 偶數 次的單擺) 及 (x 秒擺 奇數 次的單擺) 距離最遠(2倍振幅)
5. 若蛇擺中各單擺頻率間的 公差 = k ，且各單擺的頻率不互質，則此蛇擺的 週期 = $\frac{1}{k}$ 秒。

二.感想：

(一).研究過程：

這次為了瞭解單擺的週期公式，本以為很簡單，沒想到多方蒐集資料後，發現竟然需要用到高二才會學到的簡諧運動公式。於是便到了圖書館借一些有關力學的書，加上網路的資料，努力了一段時間，才終於了解單擺週期公式的由來。

瞭解了單擺週期公式由來後，我想知道單擺可以做什麼應用、有沒有辦法把單擺的擺錘位置變化畫在座標上，於是查了一些資料，查到了一個單擺的應用—蛇擺，並得知單擺擺垂位置(簡諧運動)畫在座標平面上竟然是正弦曲線，在大概了解正弦曲線後，便設計了一套數據以 autocad 繪製出一蛇擺中各單擺擺垂位置與時間變化關係圖，得到以上結論。

(二).研究中遇到的困難：

- 1.由於我們尚未學到三角函數，所以只好問問老師三角函數是什麼。經過老師清楚的講解，我花了一段時間才得出蛇擺中各單擺擺垂位置與時間關係式： $x = -d \times \cos(f \times 2\pi t) + d$
- 2.在知道蛇擺這樣東西後，本來想自行製作一個蛇擺用來方便觀察它的週期變化及擺盪過程，但技術上的問題(擺長長度的調整、空氣阻力.....外在因素)，很難調到理想狀態，就算調到理想狀態，也很快就停了，最後只好放棄實驗，自行設計數據來繪圖模擬。

(三).未來期望：

- 1.這次了解了單擺公式的由來及其中一項單擺的應用—蛇擺，但還有許多擺的應用是我未知的，衝擊擺、錐擺、傅科擺.....各式各樣不同種類的擺，希望以後可以了解更多。
- 2.了解蛇擺後，知道蛇擺是由數個單擺組成，每個單擺頻率成等差數列，於是我便有了發想，如果改成擺長成等差數列會有什麼改變？如果改成週期成等差數列又會有什麼改變？
- 3.以後有機會，希望能夠克服技術上的問題，真正自己動手做出接近理想狀態的蛇擺。

肆.引註資料：

一. 圖片：

(一). 圖(一)、圖(三)、圖(四)以 autocad 繪製

圖(一)、圖(三) 繪製說明

運用指令「line-線」畫實線及虛線、「circle-畫圓」畫圓、「pline-聚合線」畫箭頭、「hatch-填充線」畫剖面示意材質、「dimangular-角度標註」。

圖(四) 繪製說明

步驟1. 先在作業圖面以「pline-聚合線」畫好輔助線(X 軸為-20秒內擺動次數23次之分割；Y 軸為-單擺位置)。

步驟2. 運用指令「spline-建立由控制框中的頂點所定義的平滑曲線」中的”弦”，通過每一輔助線交叉點，形成自然正弦，得到此23擺動次數的「弦 - 關係圖」。

步驟3. 再以此圖作 X 軸向的等比縮放，分別得出22、21、20、19、18、17等「弦 - 關係圖」，再對齊原點置入座標，即得到「圖(四)」。

步驟4. 再以圖(四)作分割 A、B、C 局部放大註解。

註：從事建築設計的父親建議採用 AUTOCAD 來繪製取得所需圖形，既方便，又精準。另外，還多學了一項工具，對於日後製作論文報告，肯定有幫助。

(二). 圖(二)以 Geogebra 繪圖計算機軟體 繪製

二. 查詢書籍：姚珩(1998)。物理學的基礎—力學。中華民國中山學術文化基金會中山文庫.科技系列

三.查詢網站：

(一).單擺週期公式 <https://reurl.cc/RdW9YD>

(二).蛇擺—國立中央大學科學教育中心 <https://reurl.cc/vn0KpA>

(三).【中央大學】物理演示實驗—蛇擺 <https://reurl.cc/oDrKKQ>