

實驗三 時間的測量

學習目標：

1. 時間的定義。
2. 經驗方程式的用法。
3. 使用工程用計算器求線性迴歸。
4. 單擺的擺長 L 與週期 T 的關係。
5. 環擺的直徑 D 與擺動週期 T 的關係。
6. 簡諧運動。

實驗目的：

利用經驗方程式，求出：(i)單擺的 L 與 T 之關係式($T=A \times L^n$) 中的 A 值及 n 值、(ii)環擺的 D 與 T 之關係式($T=B \times D^m$)中的 B 值及 m 值。

說明：

1. 時間的意義

時間是一種過程，我們已知的所有現象都必須經過這個過程而後出現各種變化，如：運動、生長、衰老等。沒有人知道為什麼會有時間這種過程，我們也無法如測長度般地直接測量時間本身，只能透過因時間而產生的變遷來量度時間，例如以週期性的現象：日出與日落的次數，一個擺的來回次數等。

2. 週期運動：

一物體運動時若有規律性，亦即隔一定時間間隔 T ，便回復原有的運動狀態(位置、速度及加速度)稱此物體做週期運動，如行星的運動，鐘擺的擺動等均是週期運動。上述週期運動中之時間間隔 T 稱為此運動的週期。

3-2 時間的測量

3. 單擺：

一無體積的質點以無質量且長度不變的棒或線懸吊，稱為單擺。當單擺的質點在離平衡點(最低點)不遠處釋放時它會做往復的擺動，這稱為單擺運動。然而實驗上，我們以密度很高的擺錘及很輕的線來近似單擺，如此單擺的質心可說是在擺錘的質心，而擺長 L 即為懸吊點至物體質心的距離（如圖3-1）。實驗中擺錘為銅、鐵或塑膠製成的均勻球體，其質心在球心。故本實驗中擺長為懸吊點到球心的距離。

4. 簡諧運動：

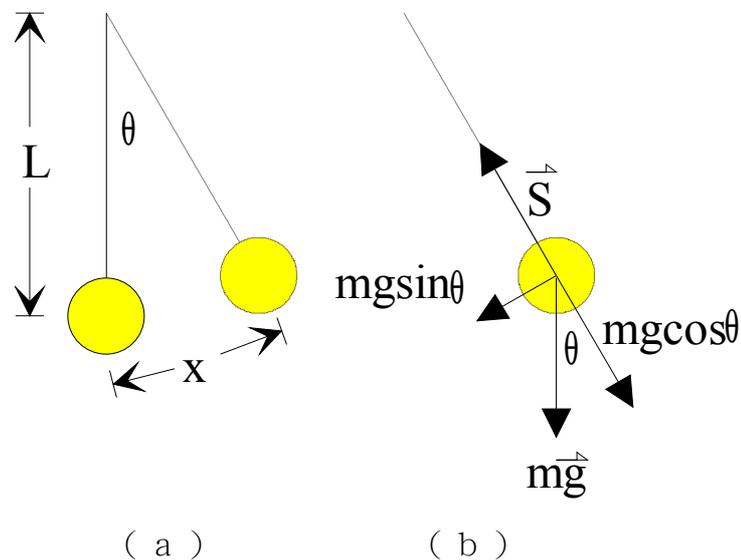


圖3-1(a)單擺(b)擺錘在 θ 角時的受力圖。

質量 m 的物體，在運動中所受的力 F 與其運動的位置 x 有如下關係：

$$F = -Kx \quad (3-1)$$

其中 K 為一常數，此時稱此物體作簡諧運動，且此運動物體的週期 T 可表示如下：(詳見實驗三附錄)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (3-2)$$

圖3-2 T 對 L 的圖並非一直線，不易求出 T - L 的關係。

5. 經驗方程式：

為了尋求各物理量間的關係，我們最常用的方法便是實驗，再由實驗數據中歸納出其間的關係。在單擺的實驗中，我們變化擺長 L ，測量單擺週期，如果我們直接畫 $L-T$ 的圖，所得是一條曲線，如圖 3-2 所示，雖然週期 T 單調的隨著擺長 L 變常而增大。但我們仍不易由此圖中求出週期 T 與擺長 L 的關係。所以我們將依下述方法求出週期 T 與擺長 L 之關係：

由圖 3-2 中可知：週期 T 與擺長 L 間的單調性，（ L 增大時， T 也增大），我們因此可假設：

$$T = A \times L^n \quad (3-3)$$

其中 A 為一常數而且 n 不須為整數。當兩邊取對數時可得：

$$\text{Log } T = \text{Log } A + n \cdot \text{Log } L \quad (3-4)$$

圖 3-3 $\text{Log } T$ 對 $\text{Log } L$ 的圖為一直線，可以由圖上求出 $T-L$ 的關係。

故只要做 $\text{Log } T$ 對 $\text{Log } L$ 的圖，如圖 3-3 即可知 n 為此直線的斜率，而 $\text{Log } A$ 便是此圖中 y 軸的截距（ $\text{Log } L = 0$ 時， y 軸的值），可直接由圖上讀出。由上述程序，即可求得 T 與 L 的關係式。圖 3-3 為一實驗實例。 y 軸截距約為 0.3（那 A 值是多少？）而由下方數起第 2、5 兩數據點我們。可以估計圖中直線斜率約為：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0.3 - 0.1)}{0 - (-0.4)} = 0.5$$

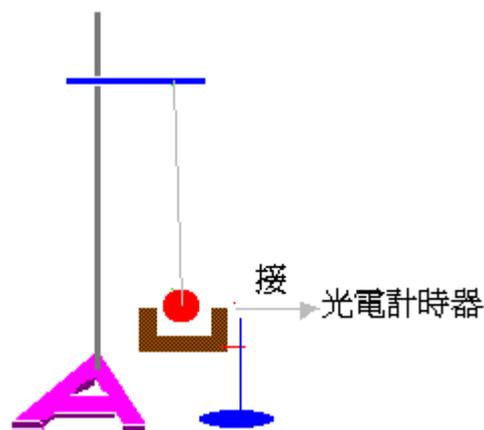


圖 3-4 單擺實驗裝置示意圖

6. 單擺週期與擺錘質量無關

3-4 時間的測量

我們假設的經驗方程式中並沒有與質量相關的部份，為了驗證單擺週期與擺錘質量無關，我們利用不同材質作成大小相同的擺錘，來變化擺錘質量，如實驗中的銅球、鐵球，塑膠球。或是用相同材質作成大小不同(因此質量不同)的擺錘，例如實驗中的大鐵球與小鐵球。實驗時，我們讓單擺在相同的擺長下，變換不同的擺錘，測量不同擺錘時的週期，以驗證單擺週期與擺錘質量無關。

7. 環擺

將質量均勻分佈成一個細圓環的物體，以環上一定點懸吊起來，使其在圓環所在的平面上來回擺動，就稱為環擺。環擺的擺動也是一個週期運動，其週期與環擺的質量無關。以環擺做實驗時，我們使用不同直徑的環擺，以前述經驗方程式的方法來找出其週期與直徑的關係。

8. 實驗做圖與線性迴歸

對於作圖以及線性迴歸還不熟悉的同學可以參看**預備知識**的相關部分，並多多練習計算機的線性迴歸功能。

儀器：

1. 三角架：用來懸吊單擺，擺錘有四個，銅球、大鐵球、塑膠球、小鐵球。
2. 環擺掛架：用來懸掛 5 個不同直徑的圓環。
3. 光電計時器及 U 型光電管 1 個：可利用光電計時器之馬錶功能(功能 1)或計數計時器功能(功能 5 或 6)。
4. 游標尺：量測各球直徑。
5. 捲尺或大測徑器：量測擺長與環擺直徑用。

實驗步驟：

單擺部分-經驗方程式

1. 先用游標尺量測各球直徑，以求得擺錘半徑。
2. 先取鐵球來做實驗，使擺長 L (= 懸線長加球半徑) 約為 20cm，測量

單擺擺動 20 次的週期 T_{20} ，並求單擺擺動一次週期之平均值 $T = T_{20} / 20$ 。

3. 使擺長由 40cm ~ 120cm 間約為等間距變化（即使擺長約為 40cm、60cm、.....），測量並記錄擺長的正確值，測量每個擺長單擺擺動 20 次的時間 T_{20} ，並取其平均週期 T 。
4. 以各擺長 L 之平均週期 T 做 $\text{Log } L$ (橫軸) 對 $\text{Log } T$ (縱軸) 的線性迴歸，求出截距 $\text{Log } A$ 及斜率 n ，將數據點之常用對數值與迴歸直線化在方格紙上，就可求得 T 與 L 的關係。

單擺部分—週期與材質、質量無關

5. 變換不同擺錘，均使其擺長 $L = 25\text{cm}$ ，測量其週期 T 值；並比較不同擺錘其週期的差異。

環擺部分

1. 以捲尺量測各環之直徑 D ，請至少測 3 次(愈多次愈好)以算出各環直徑的平均值與誤差。
2. 由直徑最小的環開始，依序將環掛在架上，使環做小幅度的擺動，測量環擺動 20 次的週期 T_{20} ，並求環擺動一次週期之平均值 $T = T_{20} / 20$ ，重複至少 3 次以求其平均與誤差。
3. 以各環直徑 D 與平均週期 T 做 $\text{Log } D$ (橫軸) 對 $\text{Log } T$ (縱軸) 的線性迴歸，求出截距 $\text{Log } B$ 及斜率 m ，將數據點之常用對數值與迴歸直線化在方格紙上，即可求得 T 與 D 的關係。

原理：

1. 單擺週期與擺長的關係之分析：

如圖 3-1(a) 所示：擺長為 L ，擺錘質量為 m ，重力加速度為 g ，線的張力為 \bar{S} ，球所受張力及重力合力為 \bar{F} 。如圖 1 (b) 可知單擺在偏移一角度時的受力情形：因線的張力大小

$$S - mg \cos\theta = \text{擺錘擺動所需之向心力，}$$

3-6 時間的測量

而擺錘所受回復力 F (擺錘所受之力與擺線垂直之分力)大小為

$$mg \sin \theta ,$$

而此時擺錘位移 x 約為 $L\theta$

所以在小角度 ($\theta \ll 1$) 時

$$|F| = mg \sin \theta \cong mg\theta = mg \frac{x}{L} \quad (3-5)$$

但 F 和 x 方向相反，即

$$\vec{F} = -\left(\frac{mg}{L}\right) \cdot \vec{x} \quad (3-6)$$

正是一個簡諧運動的形式，

其 K 值 = mg/L ，故由附錄3知其週期為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L} \quad (3-7)$$

由此，若我們做 $\text{Log}L$ 對 $\text{Log}T$ 之圖，可得斜率 n 恰為 $1/2$ ，而截距

$$\log A = \log\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \quad (3-8)$$

2. 重力加速度值的也可由本實驗求出：

如將上式 3-8 經過移項等一番處理，我們可以得到：

$$g = \frac{4\pi^2}{A^2} \quad (3-9)$$

這意味著如果由此實驗的程序，在畫圖求出截距 $\text{Log}A$ ，進而求出 A ，則可以代入 3-9 式，求出重力加速度 g 值。

再進一步討論：實驗二自由落體中，由於使用電磁鐵控制小鋼球，所以做落體實驗的材料只能用鐵的材質，那如何證明重力加速度與材質、質量無關呢？當然也可以像伽利略一樣用不同的材質製作外觀一樣球，再到比薩斜塔實驗，或是將實驗二的電磁鐵改成更複雜的裝置。

3-9 式中，告訴我們，如果拿不同材質的擺錘來做單擺實驗，如果得到的 A 值都相同，則代表重力加速度與材質無關，更可進一步推論與質量無關。

3. 測量多次擺動週期再求平均的討論：

實驗室中我們所使用的計時器的時間精度通常可達 $1/1000$ 秒，但是使用碼表功能時，由於人反應的誤差可能有在 $0.1 \sim 0.2$ 秒，所以單測一次週期，誤差可能相當的大，但是若測 20 次週期，再求平均，便可以將每次測量週期的誤差降為 $0.1/20 = 0.005 \sim 0.2/20 = 0.01$ 秒，大大改善了實驗的精度。

4. 環擺

請自行思考其原理是否與單擺類似。(見思考問題)

注意事項：

1. 擺線與擺錘間應注意綁妥，以免傷及人和儀器。
2. 所使用之單位儘量以 M K S 制為主，以避免單位之混淆。
3. 注意單擺擺動次數之計數方法，以避免所測量之單擺擺動 20 次之時間並非週期的 20 倍。

討論提示：

1. 不同密度的擺錘所得結果有何不同？
2. 環擺的厚度是否會影響其週期？其關係式為何？
3. 誤差來源為何？如何克服？

練習題：

1. 若 $\log X = 0.778$ ， $X = ?$
2. 如下表中之數據，請練習畫出 $\log X$ 對 $\log Y$ 之圖，並試求此圖之斜率與截距。

X	0.5	1	1.5	2	2.5
Log X					
Y	0.5	2	4.5	8	12.5
Log Y					

思考問題：

1. 週期為 1 秒時，單擺擺長為多少？環擺的直徑是多少？
2. 時鐘之鐘擺，擺長並不盡相同，為什麼都可以做為時鐘之鐘擺？
3. 如果單擺的擺錘用海棉或保力龍等質輕的材質製成，則實驗所得之週期會較大或較小？為什麼？
4. 說明 4 中的圖 2 (b) 中，Y 軸截距 $\text{Log } A$ 約為 0.3，那 A 值是多少？
5. 原理中， θ 可不可以度 $^{\circ}$ 為單位？或是必須用弧度量？
6. 由你實驗中所得的 A 值，代入 3-9 式，求出重力加速度 g 值，並與實驗二中所得結果比較，哪一個與標準值比較接近。
7. 單擺做小擺角振盪的週期之理論公式又可寫成 $L=g(T/2\pi)^2$ ，依此公式是否有另外的方法可以求如上題的重力加速度 g？要如何做？得到的值是多少？哪種會比較準？
8. 環擺的週期與直徑的關係 $T=B \times D^m$ 中的 B、m 與單擺得出的 A、n 是否相同？為什麼？
9. 由上一題的比較結果來推斷，是否各種擺的週期都有相同的關係式？如果不是，理論上擺的週期應如何求出？