

以共振現象對雙擺頻率表現的演示與教學應用

梁立國

輔英科技大學 環境工程與科學系
sc013@fy.edu.tw

(投稿日期：民國 109 年 10 月 05 日 接受日期：民國 109 年 12 月 25 日)

摘要：不銹鋼管一端懸掛著兩個長 50 公分單擺串聯形成的雙擺，另一端懸掛著兩個具雙擺自然頻率的單擺。首先，輕推高頻單擺作為驅動力，雙擺以反對稱方式擺動；其次，輕推低頻單擺，雙擺則以對稱方式回應；接著，以任意方式推動雙擺，高頻單擺立即發生回應，產生共振，低頻率單擺響應很慢，但仍可持續幾個小時。在此，我們製作一個共振雙擺教具，在擺幅小的條件下，讓擺回到簡諧運動狀態，並以不鏽鋼管作為介質，讓兩個不同頻率的單擺與一個具兩個自由度和兩個自然頻率的雙擺產生共振現象，而初始條件決定此耦合雙擺在兩個自由度上的振幅。

關鍵詞：雙擺、單擺、自然頻率、共振

壹、前言

教科書中對於耦合振動普遍出現於大二的力學[1-3]教學裡，且多以三個彈簧串聯兩個振子為例，一方面彈簧的串聯可以牛頓力學的運動方程式再加以繪圖的形式呈現，讓學生容易以感官了解耦合運動的發生；另一方面，振子的運動可讓學生更容易將之對應於原子分子的結構中，了解材料科學裡的許多性質。然而，以彈簧串聯振子作為耦合振動的演示教具在現實生活中是無法製作的，除了重力影響外，彈簧在伸縮過程裡不可避免的扭力運動也是重要的因素。

在 Fowles 與 Cassiday 的分析力學[2]中提供一個可行的耦合振動演示教具製作實例，即以同質量同擺長單擺串聯成為耦合擺(以下我們統稱為雙擺，double pendulum)，雙擺振動普遍見於許多力學教科書對耦合振動的說明[2,3]：兩個振動子、兩個自由度的運動、本徵向量解必為對稱與反對稱運動；Fowles 與 Cassiday 則將以上說明實際的以方程式呈現雙擺振動二維本徵向量與二個自然頻率解(又稱為本徵頻率)，提供我製作教具的元素；此外，為了呈現雙擺的兩個自然頻率，在懸掛雙擺的桿上，同時掛上與此自然頻率相同的兩個單擺，與雙擺共振。

如圖 1，我們在鋼球兩側以釣魚線懸掛製成單擺，可保證其擺動方向必與兩條線形成的

面垂直而易於觀察，接著鋼球兩側向下再綁上鋼球便形成一個雙擺，如圖 2 的左邊；為了易於理解雙擺的振動實際為兩個自然頻率（對稱頻率與反對稱頻率）的組合，以例題的解反推形成頻率的擺長而製作兩個單擺(以下以高頻單擺與低頻單擺表示)，如圖 2 的右邊，並將三個擺懸掛在不鏽鋼管上，以鋼管作為傳遞能量的介質。



圖 1：以兩條線懸掛的單擺。

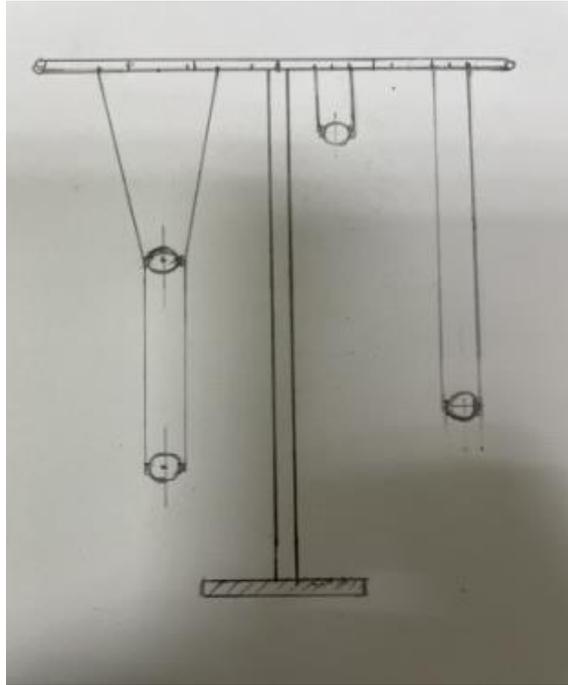


圖 2：左邊為長 100 公分的雙擺，右邊則為高頻單擺與低頻單擺。



圖 3：共振球，右側為三個振動子，左側共振球則可視為振動子的驅動力。

在此，我們以共振現象的三個方式讓教具將雙擺的兩個自然頻率與兩個本徵向量表現出來。首先，輕推高頻單擺，雙擺立即以反對稱方式運動，當單擺擺幅減弱時，雙擺的反對稱運動逐漸增強，如此相互的共振持續十餘分鐘而逐漸趨於平靜；其次，輕推低頻單擺，雙擺對稱運動的反應相對緩慢許多，但是，相互的共振可持續數小時而不衰減；最後，我們可以多種方式推動雙擺，同樣的，高頻單擺反應是即時的、稍短暫的，低頻單擺反應則是緩慢進行的，幾個小時後，只剩下對稱擺動與低頻單擺持續共振，而我們一開始推動雙擺的方式即決定兩個單擺的振幅。

此外，為了說明前述共振現象的發生，則以兩個相似的三對共振球定性說明共振現象發生時，自然頻率與驅動力相互關係，如圖 3 所示；我們也仿效教科書中對彈簧振動[7,8]與振盪電路比較了擺與振盪電路之間的相應物理量。

在科學史上，對於多粒子耦合運動方程式的研究始於牛頓，然而，最大的貢獻者則是白努利家族以 **Lagrange** 運動方程式獲得更普遍的認識[1]，這不僅是數學物理的開始，耦合運動也在許多方面提供更充分的理解，包括：原子分子運動、波動學、量子物理學等。

貳、文獻探討

類似圖 3 中共振球結構的教具經常見於演示教具販售廠商的型錄或演示教學影片中[4]，隨著桿的長度、粗細與支撐物會有不同的自然頻率，藉由幾乎一樣的物體具有及相近的自然頻率，可讓教師演示共振現象的發生。雙擺則普遍見於坊間與網路平台的教學或演示，然而以影片演示活動的實物是物理擺，非以兩個單擺串聯，其呈現則是擺幅大、動能與位能相互轉換的劇烈過程，此為混沌現象的發生；在學術理論或教學原理演示則多以電腦動畫輔助說明運動方程中位置與時間的關係[5,6]。論文中雙擺教具設計，將共振現象與雙擺結合，並回到簡諧運動的初始假設：振幅很小，讓雙擺與其自然頻率相同的單擺發生共振，具體了解雙擺具有兩個自然頻率、不同結構物的共振、趣味的對稱與反對稱運動，讓擺呈現出另類形式的簡約美感。

因此，我們在振幅很小的假設下，從三個方面敘述教具製作的發想與演示所依據的原理：單擺與彈簧的簡諧運動、共振現象定性與半定量說明，及耦合運動 **Lagrange** 運動方程式的解與說明。

單擺運動認識始於伽利略對教堂吊燈的觀察與研究，頻率 f 可以下式表示[9]

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/l} \quad (1)$$

其中 l 為擺長， g 重力加速度。稍後，我們會將雙擺所得到的兩個自然頻率解代入式(1)求得所要設置的單擺擺長。

其次，對於共振現象的發生，先以彈簧共振說明[10,11]，再引入單擺說明其差異。

對於一個受驅動力影響的彈簧，運動方程式可依據牛頓第二運動定律寫成

$$m\ddot{x} + a\dot{x} + kx = F(\omega) \quad (2)$$

m 為懸掛物質量， k 為彈性係數， a 為彈簧阻尼係數， $F(\omega)$ 為彈簧驅動力， x 為變化量。在此，我們以圖 4 定性說明共振現象發生：圖中橫座標為驅動力頻率，縱座標彈簧的共振振幅，曲線則為彈簧在不同阻尼作用情況下，自然頻率對不同頻率驅動的共振反應，其中解

式(2)，可得到當驅動頻率 $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ ，其中 $2\gamma = a/m$ ，可使彈簧達到最大振幅。圖 4 座標內的不同曲線($Q = \omega_0^2/2\gamma$)則說明當阻尼越小時，驅動頻率必須越靠近自然頻率方能得到較理想的共振現象。

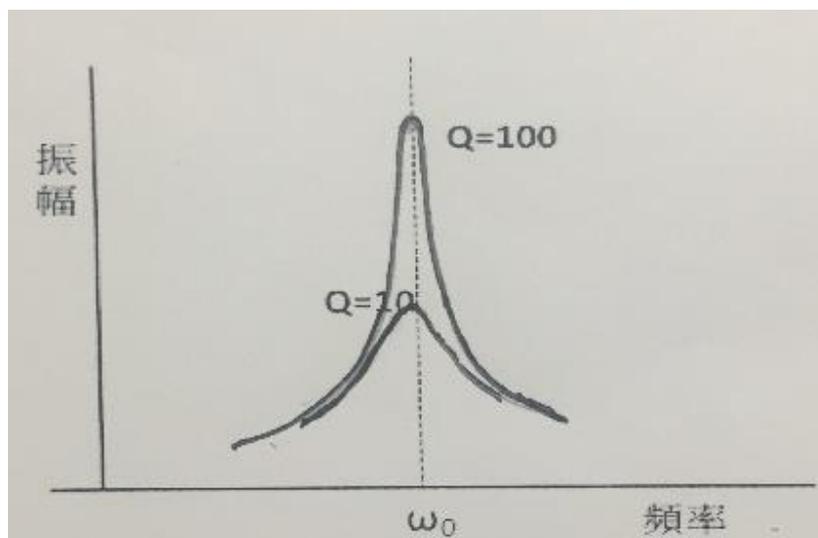


圖 4：不同 Q 值時，振幅與驅動頻率關係示意圖

對單擺振動而言，運動方程式(擺錘所受力矩等於重力矩)則可寫成

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\theta = F(\omega) \quad (3)$$

其中 b 為擺動時的阻尼係數。

以雙擺及單擺共振作為耦合振動呈現的教具中，我們一方面分別以高頻單擺及低頻單擺作為驅動力，讓雙擺產生共振，另一方面又以雙擺擺動作為驅動力，使單擺共振。由於擺錘質量大，所受的空氣阻力相對非常小(即阻尼小)，依據前面共振表現的要求，各個擺的自然頻率就必須非常接近，這是製作教具必須的要求，式(3)則可簡化為 $ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = F(\omega)$ ，式(1)即為驅動力 F 等於 0，單擺擺動的頻率。

最後，雙擺耦合運動則是以 Lagrange 運動方程式說明[12]，如圖 5，兩個同質量 m 、同擺長 l 形成的雙擺，當擺角非常小時，其動能 T 、位能 V 與 Lagrangian 可寫成，

$$T = 1/2 ml^2 (2\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2) \quad (4)$$

$$V \approx mgl (2\theta^2 + \phi^2) \quad (5)$$

$$L = T - V$$

其中 θ 與 ϕ 分別為雙擺兩個擺的擺角，Lagrangian's 運動方程式可寫為

$$ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$



圖 5：雙擺

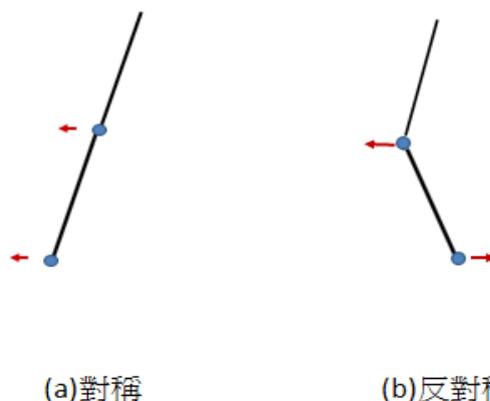


圖 6：雙擺兩個本徵向量示意圖。

以角速度函數 $e^{-i\omega t}$ 帶入式(6)，可得到兩個本徵頻率(自然頻率)解，即

$$\omega_s = (2 - \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \sqrt{g/l} \quad (7)$$

$$\omega_a = (2 + \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \sqrt{g/l} \quad (8)$$

ω_s 為對稱解， ω_a 為反對稱解，兩個本徵向量解為，

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中 A_s 為對稱本徵向量，如圖 6(a)所示， A_a 為反對稱本徵向量，如圖 6(b)所示，式(9)與式(10)說明當擺幅很小時， ϕ 的值是 θ 的 $\sqrt{2}$ 倍，以同向或反向運動。他們的意義是：當我們任意輕推雙擺，雙擺運動方程式可寫成

$$A(\omega_s, \omega_a) = aA_s + bA_a \quad (11)$$

其中 a b 為兩個本徵向量振幅，由我們推動雙擺的初始條件決定。

論文中，雙擺的兩個擺長為 50 公分， g 值以 9.80 公尺/秒²代入式(7)與式(8)，再除以 2π ，可得對稱頻率解為 0.54 Hz，反對稱頻率解為 1.30 Hz；如果將前述的頻率解代回式(1)的伽利略經驗式，我們可製作擺長分別為 85.3 公分及 14.6 公分的兩個單擺與雙擺的兩個頻率產生共振，藉由三個擺相互間的共振，可了解許多相關物理現象的發生。

參、共振球與共振雙擺演示教具製作

在此，我們製作了兩個可表現共振現象的教具，一個是由三組兩兩成對的玻璃纖維桿及高爾夫球組成，單純呈現兩個自然頻率相近的振動會發生共振，如圖 3 所示；另一個則由雙

擺與其兩個自然頻率相近的高頻單擺和低頻單擺組成的共振雙擺演示教具，如圖 2 所示。以下說明他們的製作過程與所需的材料。

一、共振球製作

- (一) 表 1 說明製作所需的主要材料。
- (二) 在硬質塑膠桿畫中長線並量好 5cm 間距，以鑽床鑽六個直徑 3mm 的孔(穿過桿)。
- (三) 六顆高爾夫球中心各鑽一個深 10mm 內徑 3mm 的孔。
- (四) AB 膠將玻璃纖維桿與硬質塑膠桿接合，一小時後，再以 AB 膠將高爾夫球與玻璃纖維桿接合。
- (五) 一小時後，將(四)的組合物以螺絲鎖在座上。

表 1：共振球製作所需材料

編號	類別	數量	說明
1	高爾夫球	6 個	外徑 4.3 cm
2	玻璃纖維桿	6 支	長 6 cm, 11 cm. 16 cm 桿徑 0.3 cm (兩傘骨)
3	硬質塑膠桿	1 塊	36 cm X 4 cm X 1 cm
4	座	1 個	廢棄電腦螢幕的座

註：工具有 AB 膠、螺絲釘、鑽床

二、共振雙擺演示教具製作

- (一) 表 2 說明製作所需的主要材料。
- (二) 將不鏽鋼管中點兩側量好欲懸掛釣魚線處，以鋼鋸鋸出六個小孔（左側兩個 右側四個），再以線穿過小孔後打結，釣魚線預留長度大於所需的擺長。
- (三) 釣魚線另一端穿過螺絲後打結，再將螺絲鎖入不鏽鋼球。
- (四) 左側上方不鏽鋼球螺絲需再次穿入釣魚線向下延伸穿入另一不鏽鋼球螺絲製作成雙擺。
- (五) 測量高頻單擺與低頻單擺頻率分別為 1.29Hz 及 0.532Hz，符合參考文獻計算所得的理論值。
- (六) 藉由兩個單擺擺動讓雙擺共振，可測量雙擺反對稱頻率實驗值為 1.28Hz，對稱擺動頻率實驗值為 0.529Hz。

表 2：製作共振雙擺所需材料

編號	類別	數量	說明
1	不鏽鋼管	1	外徑 2cm 長 60 cm
2	不鏽鋼球	4 個	外徑 4.5 cm
3	釣魚線	若干	線徑 0.5 mm
4	擺座	1 個	高 120 cm (立燈座)

註：1.工具有尺、鋼鋸、鑽床、手機碼表功能、打火機。

2.不鏽鋼球為早期高中碰撞實驗用，兩端點可鎖上有孔的螺絲。

肆、教具教學應用

一、共振現象演示

- (一) 對共振球教具而言，具相同長度玻璃纖維桿與高爾夫球具有相同的振動頻率，當右側高爾夫球被右手食指輕彈時，左側具有與此頻率的高爾夫球將與之共振。
- (二) 共振雙擺中，雙擺與單擺的共振現象呈現則遠較共振球教具更為明顯，高頻衰減雖快，但也有近十分鐘之久，低頻擺則長達數小時，更有助於觀察其間能量的交換。
- (三) 經驗上，無論是共振球或共振雙擺的表現，高頻共振是即時的，但是衰減也快，低頻共振是緩慢的，持續時間也久。觀察兩個教具的共振，可以發現：高頻振動在相同時間內經歷的週期較多，自然衰減的越快，而振動體的慣性質量大(例如鋼球)，讓動能顯著變大，是持續時間久的因素。

二、耦合振盪自然頻率觀察

- (一) 首先，以手指輕推高頻單擺，雙擺反對稱運動反應是立即的，因擺錘質量大，兩個擺之間的共振長達十分鐘以上。
- (二) 其次，手指輕推低頻單擺，雙擺對稱運動反應是非常緩慢的，但是，擺錘質量大，擺線長，低頻單擺的慣量更大，讓振動阻尼顯得微不足道，雙擺對稱運動與長擺之間的共振長達數小時，讓觀察兩個擺之間能量的轉換，擺幅之間的變換更顯容易。
- (三) 最後，手指輕推雙擺，高頻單擺的反應是立即的，低頻單擺似乎不動，但是過了幾秒後，即出現可觀察的擺動，幾小時後，低頻單擺依舊與雙擺的對稱運動共振。
- (四) 為了驗證雙擺僅與其自然頻率共振，可在雙擺共振教具右側繫上不同擺長之單擺，此單擺將聞風不動。

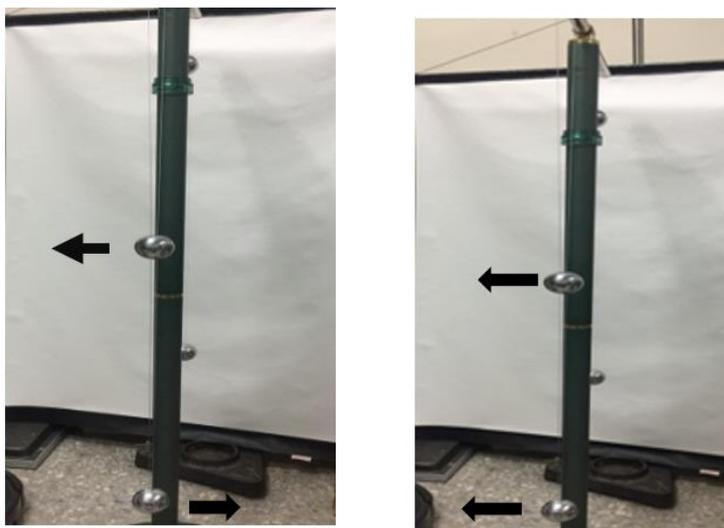


圖 7：由雙擺的側面可刻意製造對稱與反對稱運動。

三、本徵向量線性組合定性觀察

- (一) 如圖 7(a)，由雙擺側面以左手握雙擺上球向左，右手握下球向右，雙手同時輕放，刻意形成一個反對稱運動，高頻單擺的反應即時且振幅明顯，低頻單擺反應至為緩慢且振幅小，即式 (11) 中 b 遠大於 a 。
- (二) 如圖 7(b)，由雙擺側面以右手握雙擺得上球向左，左手握下球同時向左，讓擺成一直線，雙手同時輕放，刻意形成一個對稱運動，高頻單擺的反應即時但擺幅甚小，低頻單擺反應至為緩慢但擺幅逐漸變大，是式 (11) 中 a 遠大於 b 。

四、LC 振盪電路對應

- (一) 表 3 左側列出教科書中常見彈簧振動與振盪電路幾個相對應物理量，將式(3)與式(2)比較，第一項係數為 ml^2 ，第三項係數為 mgl ，可得到擺運動與振盪電路相對應物理量，電路元件內的電量相當於彈簧振幅與擺角度，電感對應為彈簧乘載物質量與擺運動的慣量，電容的倒數對應為彈簧的彈性係數與擺所受之重力矩。
- (二) 在低頻單擺與雙擺對稱運動共振過程持續數小時，低頻單擺較大的慣量說明電感有助於電路振盪的持續。
- (三) 各系統振盪過程中能量的損失主要來自於電阻、阻尼與空氣阻力，能量的形式則皆為輻射熱。

表 3：彈簧振動、振盪電路與擺運動相對應物理量

彈簧振動	LC 振盪電路	擺運動
振幅	電量 Q	θ
質量 m	電感 L	ml^2
彈性係數 k	電容倒數 $1/C$	mgl
阻尼	電阻 R	空氣阻力

伍、結論與心得

一、關於教具設計與製作

- (一) 論文中無論是雙擺與單擺的設計，擺錘皆以兩條釣魚線懸掛，讓擺振動方向單純而易於觀察，特別是雙擺對稱與反對稱運動，雙擺上方張角也增進演示教具的美觀；擺懸掛的設計也考量了不鏽鋼管對支撐點的平衡，避免擺動時重力矩的影響。
- (二) 擺錘的取得是很多年前高中職物理實驗課程中留下，通過圓心的兩個螺絲鎖孔，讓不是質點的擺錘得以質心與支點距離為擺長，並在忽略擺線質量的條件裡得到很好的演示效果。
- (三) 兩個單擺頻率與雙擺自然頻率的理論值與實驗值比較仍有微小差異，可能來源是重力加速度為 9.80 公尺/秒²的假設及成品製作時的不精確。

- (四) 共振球的振動是以桿與座的接點為節點的振動，球是桿振動的開口，桿的長度可視為四分之一個波長[13,14]，振動的頻率與桿的粗細、長度和強度有關，也與其承載的球質量有關，它可分別類比於彈簧的彈性係數和彈簧懸掛物質量，碳纖維棒與高爾夫球讓教具更容易為教師施作與體驗。

二、關於教學演示

- (一) 論文以擺幅極小(小於 5 度)的條件下得到雙擺的自然頻率解，並反推可與雙擺共振的兩個單擺擺長，進一步讓我們可以幾個不同方式定性與半定量的觀察雙擺本徵向量的存在與表現，包括：雙擺對稱與反對稱運動(兩個本徵向量)，雙擺運動初始條件的假設及其本徵向量的線性組合。
- (二) 共振雙擺的教學適用於大二的力學課程，在極小振幅的初始條件，可將雙擺(耦合擺)的兩個頻率表現出來。對於不是力學課程的學生或觀眾，則需先演示共振球說明相同振動頻率的物體可發生共振，而不同結構的物體但具有相同自然頻率可以發生共振，且真實看到對稱與反對稱的發生是令他們欣悅的。
- (三) 共振雙擺讓不同結構物的自然頻率能在同一教具中以不同形式演示，高頻共振持續十餘分鐘，兩個不同的能量交換可清楚觀察到，而低頻共振持續數小時，經驗上歸因於低頻單擺擺長較長、慣量大，位能變化較大，共振過程中損失的能量相對較小。
- (四) 彈簧振盪與振盪電路相應物理量比較經常見於各個教科書內容，論文中也做了擺振動與振盪電路的相應比較，彈簧振動與振盪電路比較是易理解的，擺振動則可加深這樣的理解，包括擺慣量對應於電感及重力矩影響對應於電容倒數。
- (五) 理解雙擺耦合的對稱與反對稱運動也有助於對耦合振盪電路[15,16]的認識，包括：數學形式的解、電流在各元件間的流動情形與電壓的被放大。
- (六) 分享一則故事。在結束 2020 年物理教育年會口頭發表而收拾共振雙擺演示教具時，一旁服務的準碩士生突然說：老師你講的主題很重要，我們實驗室是做材料熱處理與熱傳導的。巨觀的熱傳導是以流體力學類比，微觀的則是耦合與共振。

三、影片分享

- (一) 雙擺高頻共振：首先推動高頻單擺，高頻單擺的能量會逐漸傳給雙擺，雙擺的反對稱運動會與高頻單擺共振，在此，我們欣賞不同結構物共振與雙擺的反對稱運動。網址為 <https://youtu.be/dd5HCp1yMA>
- (二) 雙擺先低頻共振再高頻共振：首先推動低頻單擺，低頻單擺的能量會逐漸傳給雙擺，雙擺的對稱運動會與低頻單擺共振。接著，推動高頻單擺，雙擺的高頻反對稱運動會加入對稱運動中，讓雙擺同時具有對稱與反對稱的分量。網址為 <https://youtu.be/b255TURBp7c>

參考文獻

1. Stephen T. Thornton & Jerry B. Marion (1988) Classical Dynamics of Particles and Systems, 3rd edition, Harcourt Brace Jovanovich Inc., Ch.11, pp. 408-438.
2. Grant R. Fowles & George L. Cassiday (2005) Analytical Mechanics, 7th edition,

- Brooks/Cole, Cengage Learning Products, Ch.11, pp. 472-492.
3. Herbert Goldstein (1980) Classical Mechanics, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Ch.1, p.13.
 4. 周祥順老師 科技大觀園 共振棒, 網址 : https://youtu.be/Hs4_zItbQnc
 5. myPhysicsLab, Double Pendulum, 網址 : <https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>
 6. myPhysicsLab Double Pendulum ,剛性雙擺 , 網址 : <https://www.myphysicslab.com/>
 7. Charles Kittel , Walter D., Knight & Malvin A. Ruderman (1977) Mechanics (Berkeley Physics Course, v1), McGraw-Hill Inc., Ch.8, pp. 254-265.
 8. Grant R. Fowles & George L.Cassiday (2005) Analytical Mechanics, 7th edition, Brooks/Cole, Cengage Learning Products, Ch.3, pp. 123-124.
 9. Grant R. Fowles & George L.Cassiday (2005) Analytical Mechanics, 7th edition, Brooks/Cole, Cengage Learning Products, Ch.3, pp. 92-93.
 10. Stephen T. Thornton & Jerry B. Marion (1988) Classical Dynamics of Particles and Systems, 3rd edition, Harcourt Brace Jovanovich Inc., Ch.3, pp. 114-120.
 11. Grant R. Fowles & George L.Cassiday (2005) Analytical Mechanics, 7th edition, Brooks/Cole, Cengage Learning Products, Ch.3, pp. 113-121.
 12. Grant R. Fowles & George L.Cassiday (2005) Analytical Mechanics, 7th edition, Brooks/Cole, Cengage Learning Products, Ch.11, pp. 488-492.
 13. 周祥順老師 科技大觀園 共振棒(二), 網址 : <https://youtu.be/2NWFp3p8IDQ>
 14. 柯閔耀(2015) : 我的創意教學以及共振教案分享, 物理雙月刊, 37(2), pp. 57-64。網址 : <http://physical.tcfsh.tc.edu.tw/upload/files/201547152441.pdf>
 15. 清華大學物理實驗講義。耦合振盪電路。網址 : <https://w3.phys.nthu.edu.tw>
 16. Herbert Goldstein (1980) Classical Mechanics, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Ch.2, p.52。
 17. 梁立國(2020) : 以共振現象對耦合擺自然頻率表徵的演示與教學應用。中華民國物理教育聯合會 口頭論文。新北市:淡江大學物理系。

The Representations and Teaching Applications of the Double Pendulum by Resonance Phenomena

Lih-Kuo Liang

Department of Environmental Science and Engineer, Foo Yin University
sc013@fy.edu.tw

Abstract

A double pendulum formed by two 50 cm long pendulums connected in series is hung at one end of the steel pipe, and two pendulums with natural frequencies of the double pendulum are hung at the other end. First, push the high-frequency pendulum as the driving force, and the double pendulum swings in an anti-symmetric manner. Secondly, push the low-frequency single pendulum gently, and the double pendulum responds in a symmetrical manner. Finally, push the double pendulum in any way. The high-frequency pendulum responds instantly, and the low-frequency pendulum responds slowly but can last for several hours. Here, we have a hands-on works of three pendulums. Under the condition of small swings, let these pendulums return to the state of simple harmonic motion, and use the stainless steel tube as the medium, so that two different single pendulums and a double pendulum with two degrees of freedom and two natural frequencies produce resonance phenomena, and the initial condition determines the amplitude in each degree of freedom.

Key words: double pendulum, pendulum, nature frequencies, resonance

