

投稿類別：物理類

篇名：

打草驚蛇，擺玩不厭

作者：

李冠宏。台北市立成淵高中。高二 9 班

許景勛。台北市立成淵高中。高二 9 班

陳彥達。台北市立成淵高中。高二 8 班

指導老師：賴郁暉老師

壹●前言

一、研究動機

學過高中物理的我們都認為單擺是很簡單的，直到老師向我們介紹了蛇擺 (Pendulum Wave)，其週期性的波形變化令我們驚奇：它的特性為兩兩相鄰的單擺擺長稍微不同但是頻率差固定，也就是週期依序會有等量變化，若是沿著擺錘的延伸線觀察，當這些單擺開始擺動後，可看到一個「行進波」，而波的波長會隨著時間變得愈來愈短，然後漸漸進入紊亂的狀態，緊接著又會進入單擺依序編號為單數與雙數分別擺盪到平衡位置兩側的過程，後續彷彿又重複前半週期的擺動行為，不過行進波的方向改變、與前半週期的行進方向相反。最終整組裝置會回歸到一開始擺動前，擺錘排列成一直線的狀態。【1】

但是在我們實際做實驗時，卻發現蛇擺波形變化與既定目標比較後，似乎只有發生在初始幾秒，而且週期性變化也是似有若無，直到修訂一些單擺繩長後才稍微改進波形變化的週期性。於是本組便開始思索單擺繩長對蛇擺的影響程度為何？擺錘形狀或質量也會讓波形發生變化嗎？

二、研究方向

在查閱資料與討論過後，我們決定從以下幾點來著手：

- (一) 各個單擺的週期和蛇擺的週期有什麼關係？
- (二) 簡諧運動中所謂的「相位(phase)」是如何決定蛇擺行為的？
- (三) 擺幅為大角度或是因擺錘形狀和質量得將單擺視為複擺時，要如何調整繩長才能維持蛇擺的週期性？
- (四) 比較上述考慮變因來討論何者之影響比重較大？

貳●正文

一、擺的理論

(一)單擺週期和蛇擺週期的關係

若單擺擺動角度不大時的週期為 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (L 為擺長)，蛇擺的週期為 T ，則

這 n 個單擺當中擺長最長的擺動 N 次所需的時間即為 T 。因此，第 n 個單擺擺長

($n=1$ 為最長的)可表示成 $L_n = g\left(\frac{T}{2\pi(N+n-1)}\right)^2$ 。【2】

(二)蛇擺的週期性

蛇擺的波形，是由 n 個單擺的擺錘位移所組成，而擺動位移可利用餘弦函數 $Y(X_n, t) = A \cos(\omega_n t)$ 來描述， X_n 為第 n 個單擺擺錘在自然平衡時，沿著擺錘排列方向的位置。 ω_n 為第 n 個單擺擺錘的角頻率 (angular frequency)，其中 A 為振幅 (amplitude)，表示每個擺錘由相同的位移 A 開始出發， t 為擺動的時間。所以當時間 t 持續增加時，要是餘弦函數中的相位角度 = 所有單擺擺動角頻率的最小公倍數的 t 倍時，則蛇擺的波形就會是「一直線」，如同剛開始的時候一樣。

【1】

(三)大角度擺動之單擺週期修正式

根據參考資料【3】，若為大角度擺動，單擺的週期將變成

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} f(\theta), \quad f(\theta) = 1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{25}{256} \sin^6\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dots$$

式中的 θ 為擺動角度；在接下來的討論中，本組將取其前三項作為近似式。

(四)複擺的週期

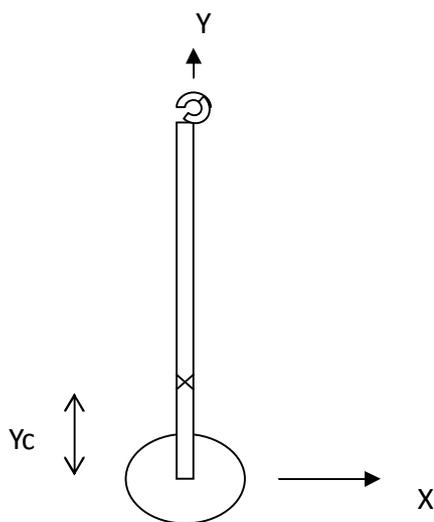
要是實驗中使用的是不能單純視為一質點的擺錘，那就必須考慮形狀造成的週期變化，其中最主要的原因為使用的砝碼架為長條型，將影響原本視為可忽略質量的細繩。根據參考資料【4】，若是本組將砝碼架視為長條支架和圓板的組合如圖一，複擺的週期就可以寫成

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{(m_1 + m_2)gh}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2}{(m_1 + m_2)gh}}$$

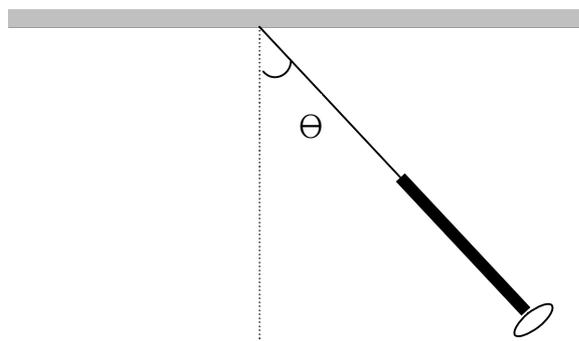
式中的 m_1 、 m_2 分別為長條支架和圓板的質量， L =繩長，長條支架長 15cm， Y_{c1} 、 Y_{c2} 分別為長條支架和圓板的質心座標， $L_1=L+7.5$ ， $L_2=L+15$ ， $h = L_1 - Y_c$ ， I 為整體的轉動慣量，以本組使用的砝碼架為例， $m_1=32.92$ 公克， $m_2=17.30$ 公克，所以

$$Y_c = \frac{m_1 \times Y_{c1} + m_2 \times Y_{c2}}{m_1 + m_2} = \frac{32.92 \times 7.5 + 17.30 \times 0}{32.92 + 17.30} \cong 4.916 \text{ (cm)}$$

另外，圖二為單一單擺在擺動時的各部位對應示意圖。



圖一



圖二

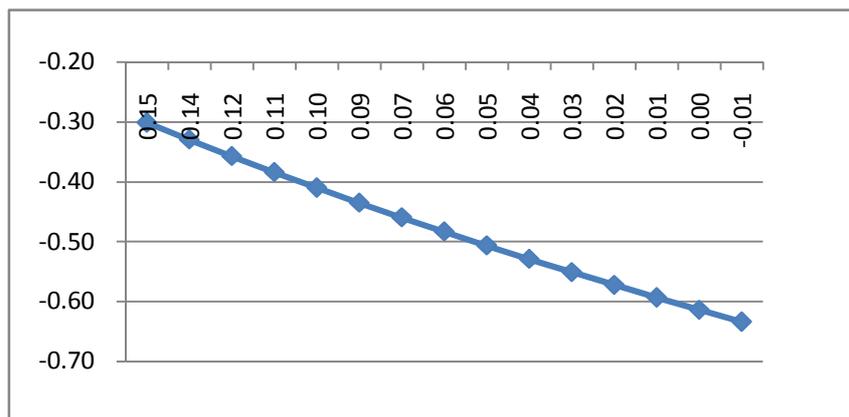
二、研究內容

(一)擺長等差的蛇擺

一般而言，小角度時的單擺週期和擺角無關（等時性）也和擺錘質量無關，而週期和擺長的平方根成正比。表一為十五個單擺組合成的蛇擺裝置，L 為等差 2 公分的擺長，結果經過計算後，其週期缺乏一致性，但是經過頻率等差一致性來修訂擺長後，蛇擺的週期性便明顯可見。

表一：擺長等差和頻率等差對蛇擺週期影響的比較

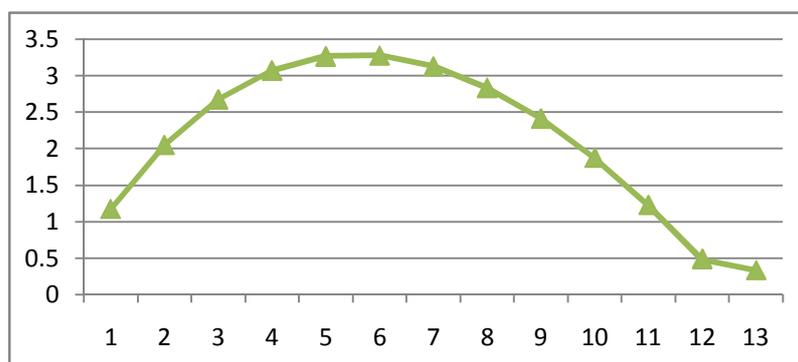
編號	L(m)	$T=2\pi\sqrt{L/g}$	f	N	Δf	蛇擺週期	修訂擺長	修訂T	修訂f	修訂 Δf	蛇擺週期	ΔL
1	0.50	1.4200	0.7042	30	---	---	---	---	0.7042	---	---	---
2	0.48	1.3913	0.7188	31	0.0145	68.86	0.47	1.3741	0.7277	0.0235	42.5985	-1.2
3	0.46	1.3620	0.7342	32	0.0155	64.69	0.44	1.3312	0.7512	0.0235	42.5985	-2.1
4	0.44	1.3320	0.7507	33	0.0165	60.60	0.41	1.2909	0.7747	0.0235	42.5985	-2.7
5	0.42	1.3014	0.7684	34	0.0177	56.60	0.39	1.2529	0.7981	0.0235	42.5985	-3.1
6	0.40	1.2700	0.7874	35	0.0190	52.70	0.37	1.2171	0.8216	0.0235	42.5985	-3.3
7	0.38	1.2379	0.8078	36	0.0205	48.89	0.35	1.1833	0.8451	0.0235	42.5985	-3.3
8	0.36	1.2049	0.8300	37	0.0221	45.17	0.33	1.1513	0.8686	0.0235	42.5985	-3.1
9	0.34	1.1709	0.8540	38	0.0241	41.56	0.31	1.1210	0.8920	0.0235	42.5985	-2.8
10	0.32	1.1360	0.8803	39	0.0263	38.05	0.30	1.0923	0.9155	0.0235	42.5985	-2.4
11	0.30	1.0999	0.9092	40	0.0289	34.64	0.28	1.0650	0.9390	0.0235	42.5985	-1.9
12	0.28	1.0626	0.9411	41	0.0319	31.34	0.27	1.0390	0.9625	0.0235	42.5985	-1.2
13	0.26	1.0239	0.9766	42	0.0355	28.15	0.26	1.0143	0.9859	0.0235	42.5985	-0.5
14	0.24	0.9838	1.0165	43	0.0399	25.08	0.24	0.9907	1.0094	0.0235	42.5985	0.3
15	0.22	0.9419	1.0617	44	0.0452	22.12	0.23	0.9681	1.0329	0.0235	42.5985	1.2



圖三：週期和擺長的對數關係圖

根據單擺週期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ，若取其對數關係作圖，應呈現一斜直線的圖，圖

三的結果顯示果然如此。而對應的擺長修訂量，雖然各有加長或縮短的現象，範圍自 0.3~3.3 公分不等，但是將其變化量大小繪製成圖四，可看出有趨勢的變化：較長或較短的擺長修訂量較少，蛇擺裝置中間幾個的單擺擺長修訂量較多。



圖四：將擺長等差改成頻率等差的擺長修訂量趨勢圖

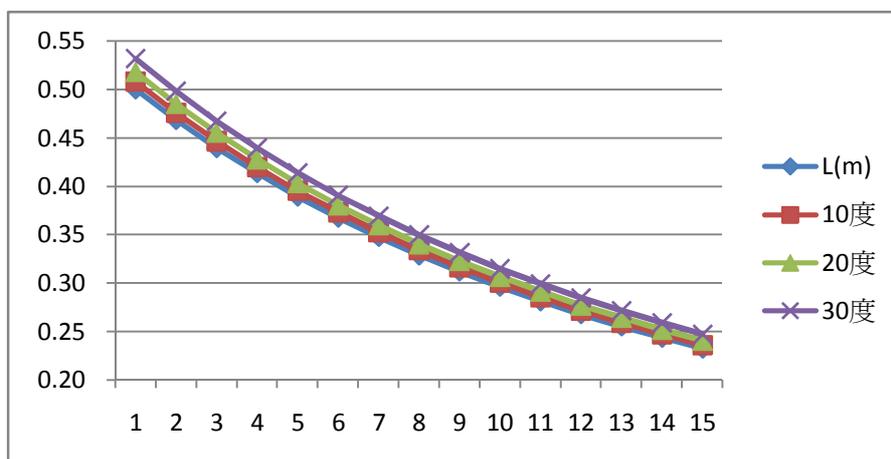
(二)大角度擺動之蛇擺

實驗時，整組蛇擺裝置通常需要大角度起始擺動才較易看出週期性變化，所以本組將頻率等差的擺長加入大角度擺動之單擺週期修正式來計算，結果得到以初始擺角 10 度、20 度和 30 度的擺長，如表二。

爲了看出對應的影響大小，將其繪製成圖五，結果從圖中可見初始擺角越大，整組蛇擺擺長の間隔變化量越大、總擺長依序也變長；因爲正弦函數會隨擺角變大而增加， $f(\theta)$ 亦會隨之變大。

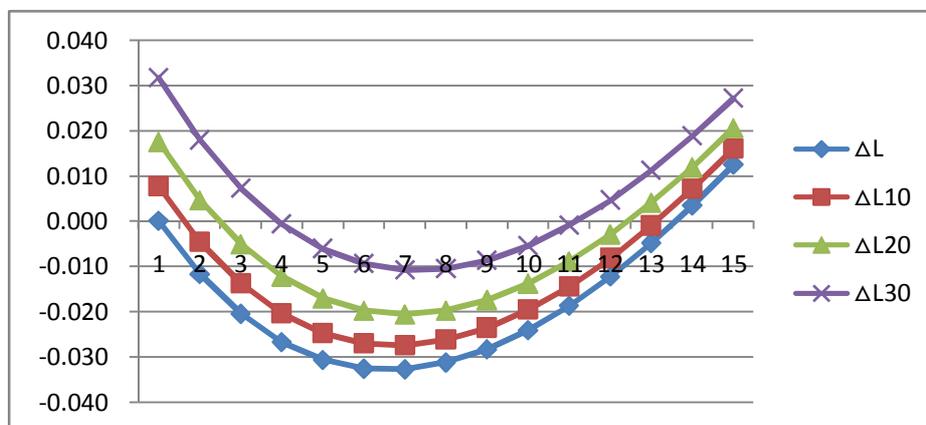
表二：

編號	L(m)	10 度	20 度	30 度
1	0.50	0.51	0.52	0.53
2	0.47	0.48	0.48	0.50
3	0.44	0.45	0.45	0.47
4	0.41	0.42	0.43	0.44
5	0.39	0.40	0.40	0.41
6	0.37	0.37	0.38	0.39
7	0.35	0.35	0.36	0.37
8	0.33	0.33	0.34	0.35
9	0.31	0.32	0.32	0.33
10	0.30	0.30	0.31	0.31
11	0.28	0.29	0.29	0.30
12	0.27	0.27	0.28	0.28
13	0.26	0.26	0.26	0.27
14	0.24	0.25	0.25	0.26
15	0.23	0.24	0.24	0.25



圖五：

因為圖五只能看出擺長大致的趨勢變化，本組進一步便對個別單擺的修訂量來做討論，於是做成了表三和圖六。

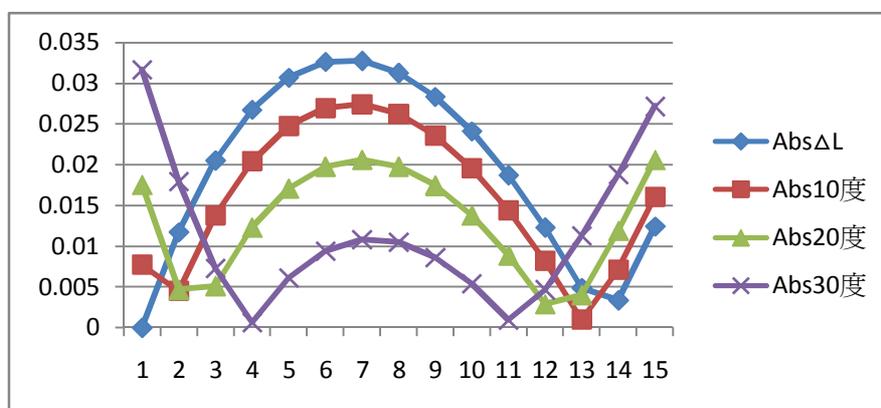


圖六：

表三：

編號	$\Delta L(m)$	$\Delta L(10\text{度擺角})$	$\Delta L(20\text{度擺角})$	$\Delta L(30\text{度擺角})$
1	0.000	0.008	0.018	0.032
2	-0.012	-0.005	0.005	0.018
3	-0.021	-0.014	-0.005	0.007
4	-0.027	-0.020	-0.012	-0.001
5	-0.031	-0.025	-0.017	-0.006
6	-0.033	-0.027	-0.020	-0.009
7	-0.033	-0.027	-0.021	-0.011
8	-0.031	-0.026	-0.020	-0.010
9	-0.028	-0.024	-0.017	-0.009
10	-0.024	-0.020	-0.014	-0.005
11	-0.019	-0.014	-0.009	-0.001
12	-0.012	-0.008	-0.003	0.005
13	-0.005	-0.001	0.004	0.011
14	0.003	0.007	0.012	0.019
15	0.012	0.016	0.021	0.027

從圖六對應的擺長修訂量，雖然各有加長或縮短的現象，範圍自 0.1~3.3 公分不等，似乎和擺長等差修訂成頻率等差的變化相類似(如圖四)，但是將其變化量大小繪製成圖七時，可看出趨勢變化有所不同：蛇擺裝置中間幾個的單擺擺長修訂量較多，較長或較短的擺長修訂量較少，而過長或過短的擺長修訂量又恢復較多，似乎有著特定模式的改變。



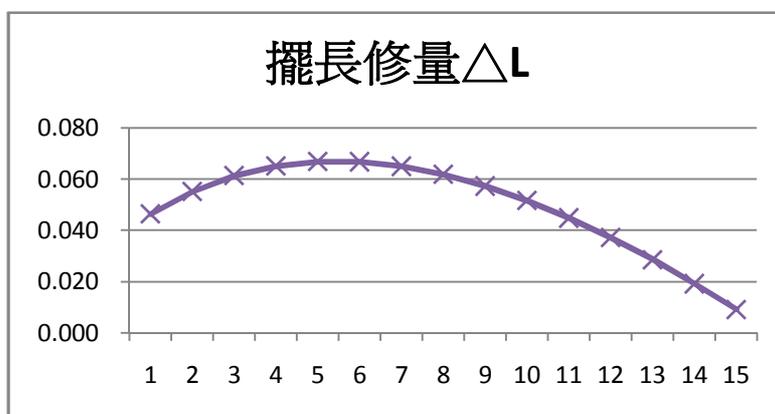
圖七：

(三)視為複擺之蛇擺

為考慮形狀造成的週期變化，本組將砝碼架視為長條支架和圓板的組合，其中因砝碼架為長條型，將影響到原本視為可忽略質量的細繩。根據複擺的週期，我們重新計算了修訂擺長如表四，結果顯示整體擺長似乎都縮短了。進一步分析擺長修量如圖八，我們發現調整的線長變化範圍比大角度擺動考量時要大多了，範圍為 0.9~6.7cm，變化趨勢也變得較不對稱：較長的擺長修量比較短的為多。

表四：

編號	原擺長(m)	修訂擺長(m)	擺長修量 ΔL (m)
1	0.500	0.454	0.046
2	0.468	0.425	0.055
3	0.439	0.399	0.061
4	0.413	0.375	0.065
5	0.389	0.353	0.067
6	0.367	0.333	0.067
7	0.347	0.315	0.065
8	0.329	0.298	0.062
9	0.312	0.283	0.057
10	0.296	0.268	0.052
11	0.281	0.255	0.045
12	0.268	0.243	0.037
13	0.255	0.231	0.029
14	0.243	0.221	0.019
15	0.232	0.211	0.009



圖八：

三、實驗器材

本組使用的器材有：砝碼(當成單擺擺錘用)、砝碼架(當成複擺擺錘用)、綿線、剪刀、長尾夾、量角器、碼錶、長尺、量角器、支架、擋板、膠帶等，因時間有限，只做出幾組實驗結果不足以對照理論數據，所以本篇內容僅著重於理論分析，完整的實驗驗證部分本組決定將找時間再補做。圖九是視為複擺的砝碼架，圖十是蛇擺裝置圖。



圖九



圖十

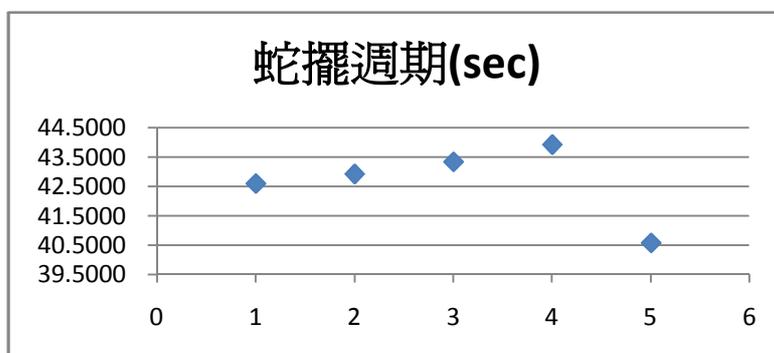
四、數據分析與比較

(一) 蛇擺週期

根據前述分析，我們將理想單擺組成的小角度擺動之蛇擺週期和大角度擺動之蛇擺週期作比較後，發現相差在 0.5~1.5 秒之間，如表五。這表示要是擺長配置得當，就應會得到預定之具有週期性變化的蛇擺。但是進一步比較在複擺考量下的蛇擺週期，我們發現雖然擺長已經調整過，但是蛇擺週期相差到 2 秒以上，從圖十一就可以清楚看到它們之間的差異。

表五：

X 軸次序	變 因	蛇擺週期(sec)
1	理想單擺	42.5985
2	擺角 10 度	42.9251
3	擺角 20 度	43.3388
4	擺角 30 度	43.9362
5	複擺考量	40.5761



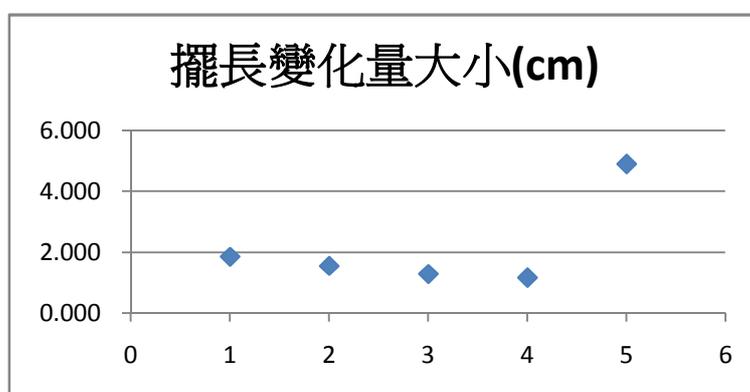
圖十一：

(二) 擺長變化量大小

要是從擺長變化量大小來看(如表六)，理想單擺組成的小角度擺動和大角度擺動相差在 1 公分之間，但是複擺考量下的擺長整體調整就達到接近 5 公分，從圖十二就可以清楚看到它們之間的差異。

表六：

X 軸次序	變因	擺長變化量大小(cm)
1	理想單擺	1.856
2	初始擺角 10 度	1.556
3	初始擺角 20 度	1.289
4	初始擺角 30 度	1.170
5	複擺考量	4.905



圖十二

參●結論

- 一、本來我們對簡諧運動中所謂的「相位(phase)」不是很了解，但是經過這次的主題討論後，終於比較清楚它和頻差的概念有甚麼關係。尤其是要注意一開始之每個單擺初始擺幅的一致性，不然會不易觀察出波型的規律變化。
- 二、擺幅為大角度時，若是不調整各單擺擺長，將無法呈現週期變化的蛇擺運動；而且擺幅越大，擺長需要做更大的調整。
- 三、要是因擺錘形狀和質量得將單擺視為複擺時，要更準確地調整繩長，最好先做好長度的精準計算，不然將較難維持蛇擺的週期性。
- 四、以擺幅角度和複擺考量來說，似乎是後者對蛇擺的週期性影響佔了較大比重，而且擺長需要做更大的調整。
- 五、擺長是決定蛇擺是否具有週期性波形的最重要因素，其次是擺錘的形狀和質量，盡量選取近似質點的擺錘即可不需考慮其質量變因；至於大初始擺幅，擺長只需要做微調就可維持蛇擺的週期性波形。

經過選修這次的小論文專題，使得我們對物理更加有興趣，對生活多了一份熱忱。在蛇擺實驗中，經過多次的微調擺長和實驗，讓我們了解到精準的重要性和團隊合作的可貴，而且藉由綁線過程，培養出我們的專注力和耐性。尤其真正開始著手寫小論文時，才發現單擺的原理其實沒那麼簡單，透過資料蒐集跟再三地閱讀、思考，我們還發現許多可繼續探討的領域。

肆●引註資料

- 【1】台灣師大物理系物理教學示範實驗室。
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/demolab/>
- 【2】中央物理系普通物理實驗講義。
<http://memo.cgu.edu.tw/yun-ju/CGUWeb/PhyExp/Exp101Pendulum/Exp101Home.htm>
- 【3】彰師物理系普通物理實驗講義。
<http://www.phys.ncue.edu.tw/space/index.php/2010-01-05-16-27-10/2010-01-05-16-29-42>
- 【4】David Halliday, Robert Resnick, & Jearl Walker (2005). *Fundamentals of physics* (7th ed.). John Wiley & Sons, Inc., New York.
田麗文、王行達、莫定山(譯)(2005)。物理(上)。台北市：全華科技出版。