

花蓮縣第 65 屆國民中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：黑白大逆轉：棋盤變色任務！

關 鍵 詞：變色棋盤、最小步數、同餘運算

編 號：

摘要

本作品主要為國立台灣科學教育館科學月刊之第 63 卷第 6 期的森棚教官數學題-三段變速之豬羊變色的延伸，主要在探討不同田字型的變色在各種正方形棋盤下的解，首先解決原情境的問題，接著再將其向外推廣，利用 excel 軟體模擬 $(1, n)$ 變色時的最小步數，以及拓展討論 (p, n) 變色中的有解情況。

壹、研究動機

本作品之原題出自國立台灣科學教育館科學研習之第 63 卷第 6 期的森棚教官數學題-三段變速之豬羊變色，原題如下：

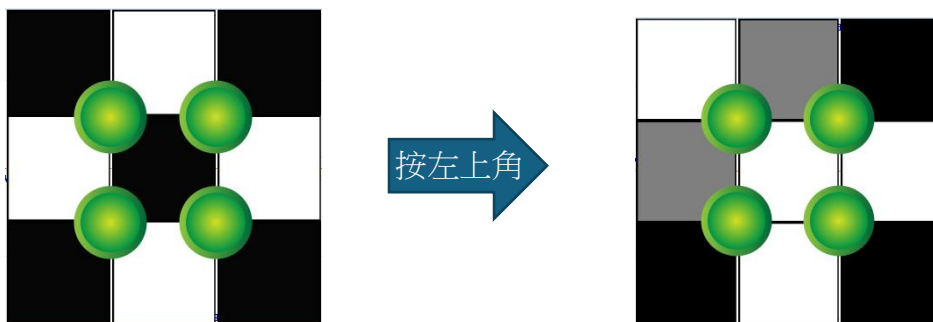
小佟正在電腦上玩小遊戲，這個小遊戲是這樣玩的：一開始螢幕上有一個 $n \times n$ 的棋盤，格子用黑色與白色塗成西洋棋盤的樣式，其中左上角那一格是黑色的。

每一次玩家可以用滑鼠選一個 2×2 的田字形，然後按下滑鼠，被選中的田字形中的格子，

1. 如果是白色，就會變成灰色。
2. 如果是灰色，就會變成黑色。
3. 如果是黑色，就會變成白色。

遊戲的目的是讓棋盤一樣用黑白兩色塗成西洋棋盤的格式，但是左上角那一格是白色的(也就是說與一開始的顏色互換)，請你幫幫小佟完成 3×3 、 4×4 、 5×5 的遊戲。

我們原本先使用 Scratch 程式軟體將其變為一個實體的遊戲，實驗的過程中透過按下田字型方格正中間來變色，我們使用了綠色按鈕來控制方格變色，若按下其中一個按鈕，其周圍四個方格將變為下一種顏色，如下圖，作品中的所有圖片皆為作者自行製作。



貳、研究目的

- 一、找出 $(1,2)$ 變色在 3×3 、 4×4 以及 5×5 棋盤的解
- 二、找出 $(1,n)$ 變色中的有解棋盤，與在 $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤的解
- 三、找出 $(1,n)$ 變色中最小步數的上下界
- 四、找出 (p,n) 變色中的有解棋盤，與在 $(n+p) \times (n+p)$ 棋盤的解

參、研究設備及器材

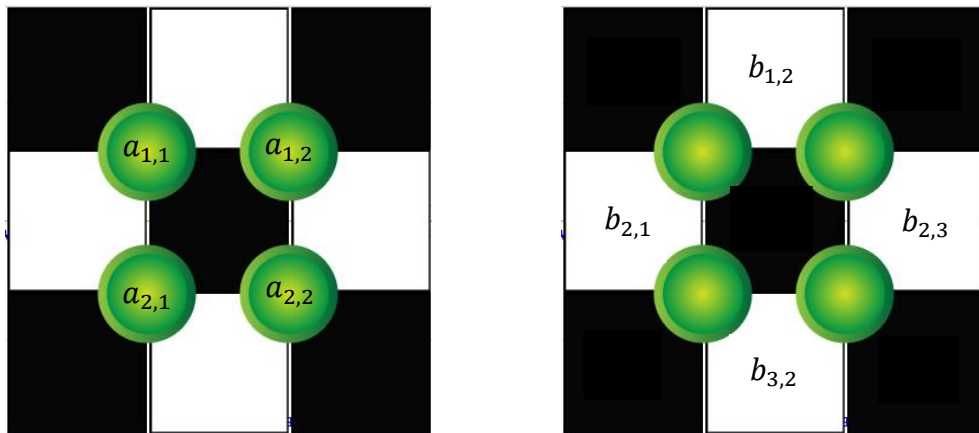
- 一、白紙、筆、電腦、程式軟體(scratch、Excel)及文書軟體(PowerPoint、Word)

肆、研究過程與方法

- 一、定義名詞：

(一)定義棋盤方格位置與按鈕的次數

若方格位在棋盤中的第 h 列第 k 行，我們將其位置用 $b_{h,k}$ 表示，根據按鈕位置的不同，我們將後續研究中，所需位置按鈕按下的次數記為 $a_{n,m}$ ，如下圖。



(二)定義 (i,j) 變色

考慮原題中最終須將黑白互換，且遊戲規則為黑變白需按1次，白變黑需按2次，我們用序對『 $(1,2)$ 』表示，之後若遊戲規則變為黑變白需 i 次，白變黑需 j 次，則用序對 (i,j) 表示，定義為 (i,j) 變色。

(三)同餘的定義：

由於在變色的過程中，黑變白，白變灰，灰變黑，因此一個按鈕按下三下後會將田字型回復原狀，也就是若其中一個解須將按鈕按下 t 下，則將按鈕按下 $t + 3k$ 下仍為其解，與同餘的概念相同，說明如下：對某兩個整數 a 、 b ，若它們除以正整數 m 所得的餘數相等，則稱 a 、 b 對於模 m 同餘。嚴格來說，就是若存在整數 r 使得 $a - b = rm$ ，則稱 a 、 b 對於除數 m 是同餘的，一般記做 $a \equiv b \pmod{m}$ ，以下為一些同餘的基本運算性質：

1. $a \equiv a \pmod{m}$ 2. 若 $a \equiv b \pmod{m}$ ，則 $b \equiv a \pmod{m}$
3. 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $b \equiv c \pmod{m}$ ，則 $a \equiv c \pmod{m}$
4. 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $c \equiv d \pmod{m}$ ，則 $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$
5. 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $c \equiv d \pmod{m}$ ，則 $ac \equiv bd \pmod{m}$

二、討論(1,2)變色的情況：

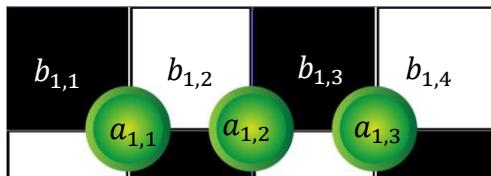
(一) 觀察(1,2)變色在 3×3 棋盤的解：

根據規則，方塊的顏色變換為黑變白、白變灰、灰變黑，可知當按鈕被按下三次時，顏色會回到原位。因此我們只需要討論 $\text{mod}3$ （除以3的餘數狀況）後的數字即可。

1. 我們觀察到方格 $b_{1,1}$ 需從黑色變為白色，且 $b_{1,1}$ 僅受按鈕 $a_{1,1}$ 影響而變色，已知黑色若要變為白色其周圍按鈕需一共被按下 $1 \pmod{3}$ 次，故 $a_{1,1} \equiv 1 \pmod{3}$
2. 同1，可知方格 $b_{1,3}$ 、 $b_{3,1}$ 、 $b_{3,3}$ 皆需從黑變白，且分別僅受按鈕 $a_{1,2}$ 、 $a_{2,1}$ 、 $a_{2,2}$ 影響，因此 $a_{1,1} \equiv a_{1,2} \equiv a_{2,1} \equiv a_{2,2} \equiv 1 \pmod{3}$
3. 接著需檢驗剩下方格變色的狀況，其中方格 $b_{1,2}$ 隨按鈕 $a_{1,1}$ 和 $a_{1,2}$ 變色，且已知按鈕 $a_{1,1} \equiv a_{1,2} \equiv 1 \pmod{3}$ ，根據同餘的運算，方格 $b_{1,2}$ 一共被按了 $a_{1,1} + a_{1,2} \equiv 2 \pmod{3}$ 次，因此成功由原本的白色變為黑色。
4. 同3，可發現方格 $b_{2,1}$ 、 $b_{2,3}$ 、 $b_{3,2}$ 皆被按下 $2 \pmod{3}$ 次，所以都成功由原本的白色變為黑色。
5. 最後檢驗最中間的方格 $b_{2,2}$ ，可發現 $b_{2,2}$ 隨按鈕 $a_{1,1}$ 、 $a_{1,2}$ 、 $a_{2,1}$ 、 $a_{2,2}$ 變色，且已知 $a_{1,1} \equiv a_{1,2} \equiv a_{2,1} \equiv a_{2,2} \equiv 1 \pmod{3}$ ，因此 $b_{2,2}$ 一共被按下 $a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2} \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$ 次，成功使 $b_{2,2}$ 由原本得黑色變為白色。

6. 前五個步驟成功使所有格子黑白顛倒，代表在 3×3 的情況下是有解的。且不難發現，對每個按鈕都按一下是達成目標狀況的最小步數。因此(1,2)變色在 3×3 中的最小步數為4步。

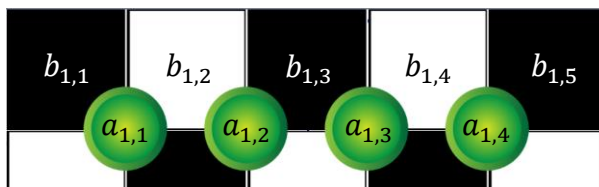
(二) 觀察(1,2)變色在 4×4 棋盤的解：



由於 4×4 的討論較為複雜，因此我們將其簡化，先討論第一列的情況(如上圖所示)，可以觀察到僅有按鈕 $a_{1,1}$ 、 $a_{1,2}$ 、 $a_{1,3}$ 能控制第一列的變色情形，因此若我們無法透過按鈕 $a_{1,1}$ 、 $a_{1,2}$ 、 $a_{1,3}$ 將第一列方格成功變色，即代表此種情況無解。

1. 同 3×3 ，需使 $b_{1,1}$ 方格顏色由黑變為白，因此按鈕 $a_{1,1} \equiv 1(mod 3)$ ；需使 $b_{1,4}$ 方格顏色由白變為黑，因此按鈕 $a_{1,3} \equiv 2(mod 3)$ 。
2. 已知 $a_{1,1} \equiv 1(mod 3)$ ，又方格 $b_{1,2}$ 僅隨按鈕 $a_{1,1}$ 、 $a_{1,2}$ 變色，且方格 $b_{1,2}$ 需變為黑色，則需按下其周圍按鈕 $2(mod 3)$ 下，則根據同餘之運算，得 $a_{1,2} \equiv 2 - a_{1,1} \equiv 2 - 1 \equiv 1(mod 3)$ 。
3. 已知 $a_{1,3} \equiv 2(mod 3)$ ，又方格 $b_{1,3}$ 僅隨按鈕 $a_{1,2}$ 、 $a_{1,3}$ 變色，且方格 $b_{1,3}$ 需變為白色，則需按下其周圍按鈕 $1(mod 3)$ 下，則根據同餘之運算，得 $a_{1,2} \equiv 1 - a_{1,3} \equiv 1 - 2 \equiv -1 \equiv 2(mod 3)$ 。
4. 由2、3得知，若第一列方格皆已成功變色，可得 $a_{1,2} \equiv 1(mod 3)$ 且 $a_{1,2} \equiv 2(mod 3)$ ，產生矛盾($\rightarrow \leftarrow$)，因此(1,2)變色在 4×4 時無解。

(三) 觀察(1,2)變色在 5×5 棋盤的解：



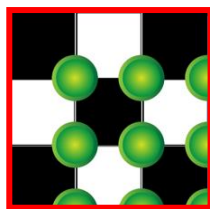
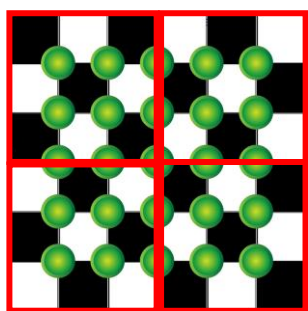
1. 同 4×4 ，需使 $b_{1,1}$ 方格顏色由黑變為白，因此按鈕 $a_{1,1} \equiv 1(mod 3)$ ；需使 $b_{1,5}$ 方格顏色由白變為黑，因此按鈕 $a_{1,4} \equiv 1(mod 3)$ 。
2. 已知 $a_{1,1} \equiv 1(mod 3)$ ，又方格 $b_{1,2}$ 僅隨按鈕 $a_{1,1}$ 、 $a_{1,2}$ 變色，且方格 $b_{1,2}$ 需變為黑色，

則需按下其周圍按鈕 $2(mod3)$ 下，則根據同餘之運算，得 $a_{1,2} \equiv 2 - a_{1,1} \equiv 2 - 1 \equiv 1(mod3)$ 。已知 $a_{1,4} \equiv 1(mod3)$ ，又方格 $b_{1,4}$ 僅隨按鈕 $a_{1,3}$ 、 $a_{1,4}$ 變色，且方格 $b_{1,4}$ 需變為黑色，則需按下其周圍按鈕 $2(mod3)$ 下，則根據同餘之運算，得 $a_{1,3} \equiv 2 - a_{1,4} \equiv 2 - 1 \equiv 1(mod3)$ 。

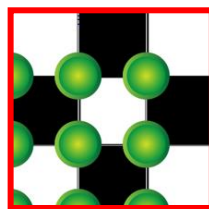
3. 已知 $a_{1,2} \equiv 1(mod3)$ ，又方格 $b_{1,3}$ 僅隨按鈕 $a_{1,2}$ 、 $a_{1,3}$ 變色，且方格 $b_{1,3}$ 需變為白色，則需按下其周圍按鈕 $1(mod3)$ 下，則根據同餘之運算，得 $a_{1,3} \equiv 1 - a_{1,2} \equiv 1 - 1 \equiv 0(mod3)$ 。
4. 由3、4得知，若第一列方格皆已成功變色，可得 $a_{1,3} \equiv 1(mod3)$ 且 $a_{1,3} \equiv 0(mod3)$ ，產生矛盾($\rightarrow \leftarrow$)，因此(1,2)變色在 5×5 時無解。

(四) 觀察(1,2)變色在 6×6 棋盤的解：

1. 如圖，我們將 6×6 視為兩個左上角為黑色(左上、右下)及兩個左上角為白色(右上、左下)的 3×3 圖形：



(圖一)

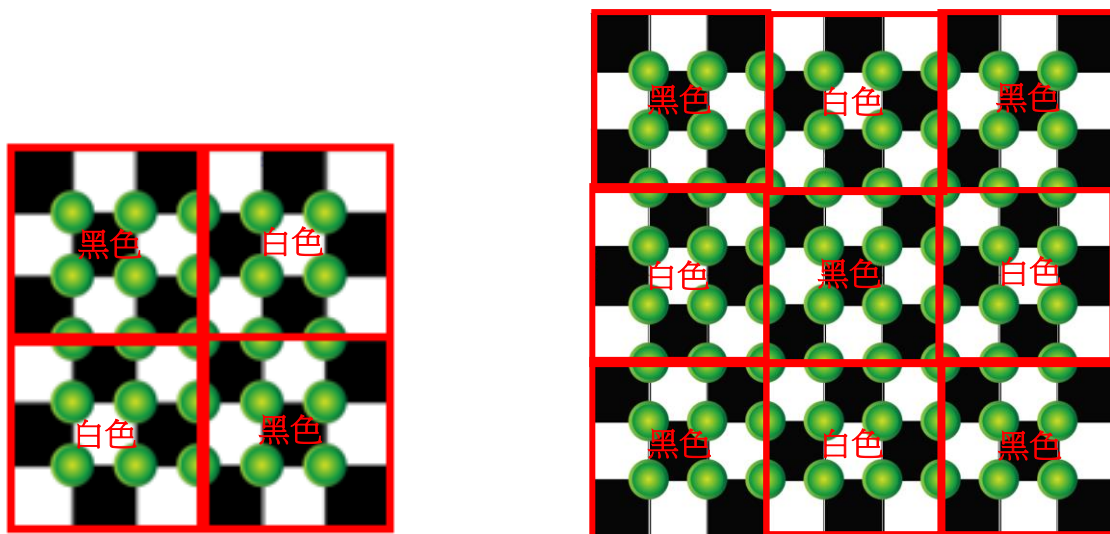


(圖二)

2. 左上角為黑色之 3×3 棋盤(圖一)與先前已證明之 3×3 棋盤相同，僅需將其中四個按鈕各按下 $1(mod3)$ 次即可。而左上角為白色之 3×3 棋盤(圖二)，則可視為已完成的狀態，需還原回左上角為黑色之 3×3 棋盤。且已知同個按鈕若被按下 $0(mod3)$ 次，則周圍之方格會回復為原來的狀態，因此根據同餘之運算可得，只要將左上角為白色之 3×3 棋盤的四個按鈕按下 $0 - 1 \equiv -1 \equiv 2(mod3)$ 次即可(其餘被切割之按鈕則按下 $0(mod3)$ 下)
3. 我們發現，在(1,2)變色的情況下， 3×3 棋盤有解，但 4×4 、 5×5 棋盤無解，而 6×6 棋盤亦有解。所以我們推測，(1,2)變色只有在 $3k \times 3k$ 棋盤有解。

(五) 歸納(1,2)變色在 $3k \times 3k$ 棋盤的解：

1. $3k \times 3k = k^2(3 \times 3)$ ，故我們可將其視為 k^2 個 3×3 棋盤(分為左上角為黑色與左上角為白色的 3×3 棋盤)，而兩種不同的 3×3 棋盤皆有解，因此 $3k \times 3k$ 棋盤必有解，接著我們將說明其最小步數。
2. 我們發現，當 $3k \times 3k$ 的 k 為偶數時(如圖 6×6)左上角為黑色的 3×3 棋盤之數量會和左上角為白色的 3×3 棋盤之數量相同，皆有 $\frac{k^2}{2}$ 個；當 k 為奇數時(如圖 9×9)，左上角為黑色的 3×3 棋盤之數量和左上角為白色的棋盤之數量分別是 $\frac{k^2+1}{2}$ 與 $\frac{k^2-1}{2}$ 個，則可知黑色的 3×3 棋盤之數量比白色的多 $\frac{k^2+1}{2} - \frac{k^2-1}{2} = 1$ 個

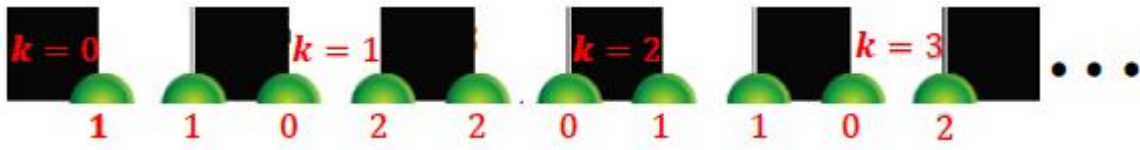


3. 已知在 $3k \times 3k$ 圖形中，當 k 為偶數時，左上角為黑色的 3×3 棋盤和左上角為白色的 3×3 棋盤皆有 $\frac{k^2}{2}$ 個，則其最小步數為 $4 \times \frac{k^2}{2} + 8 \times \frac{k^2}{2} = 6k^2$ (4為左上角為黑色之 3×3 棋盤的步數，8則為左上角白色之 3×3 棋盤的步數)；又 k 為奇數時，左上角為黑色之 3×3 棋盤和左上角為白色之棋盤的數量分別有 $\frac{k^2+1}{2}$ 與 $\frac{k^2-1}{2}$ ，則其最小步數為 $4 \times \frac{k^2+1}{2} + 8 \times \frac{k^2-1}{2} = 6k^2 - 2$ 。

(六) (1,2)變色在 $(3k+1) \times (3k+1)$ 棋盤無解說明：

1. 下圖為 $(3k+1) \times (3k+1)$ 簡化後的圖形，我們發現，由左到右的按鈕按下次數依序為1、1、0、2、2、0(mod3)並無限循環下去，且當停在 $3k+1$ 時，方格 $b_{1,3k+1}$ 周圍之按鈕將只會被按下0(mod3)次，則其無法成功變色(因能影響到其之按鈕將為上述

發現之規律的第3個或第6個，且其按下次數皆為 $0(mod3)$ ，則其不會變色，無法變為原色外的其他顏色，故可知 $(1,2)$ 變色在 $(3k+1) \times (3k+1)$ 棋盤無解。



(七) $(1,2)$ 變色在 $(3k+2) \times (3k+2)$ 棋盤無解說明：

1. 下圖為 $(3k+2) \times (3k+2)$ 簡化後的圖形，同(六)，可發現 $b_{1,3k+2}$ 周圍按鈕按下次數可能為 $1(mod3)$ 或 $2(mod3)$ ，在 k 為奇數與偶數時有不同的情況：當 k 為奇數時，其周圍按鈕按下次數為 $2(mod3)$ 次，且 $b_{1,3k+2}$ 的原始樣貌為黑色，因此會使其從黑色變為灰色，無法成功變色，故 $(3k+2) \times (3k+2)$ 在 k 為奇數時無解；而當 k 為偶數時，其周圍按鈕按下次數將為 $1(mod3)$ ，且 $b_{1,3k+2}$ 的原始樣貌為白色，因此會使其從白色變為灰色，則其無法成功變色，故 $(3k+2) \times (3k+2)$ 在 k 為偶數時亦無解。因此可知 $(1,2)$ 變色在 $(3k+2) \times (3k+2)$ 棋盤無解。



(八) 小結：

1. $(1,2)$ 變色在 3×3 棋盤中的最小解為4
2. $(1,2)$ 變色僅在 $3k \times 3k$ 棋盤中有解，且最小步數為

$$\begin{cases} 6k^2 & , k = 2m \\ 6k^2 - 2 & , k = 2m + 1 \end{cases} \quad (\text{其中 } m, k \text{ 為正整數})$$

三、討論 $(1,3)$ 變色的情況：

(一) 觀察 $(1,3)$ 變色在 3×3 棋盤的解：

1. 可知 $b_{1,1}$ 需由黑變為白，因此 $a_{1,1} \equiv 1(mod4)$ ，此時為滿足 $b_{1,2}$ 由白變為黑，即 $b_{1,2}$ 周圍按鈕共按 $3(mod4)$ ，則 $a_{1,2} \equiv 3 - a_{1,1} \equiv 3 - 1 \equiv 2(mod4)$ 。而若要讓 $b_{1,3}$ 由黑變為白，則 $a_{1,2} \equiv 1(mod4)$ ，產生矛盾($\rightarrow \leftarrow$)，因此 $(1,2)$ 變色在 3×3 時無解。

(二) 觀察 $(1,3)$ 變色在 4×4 棋盤的解：

1. 可知 $b_{1,1}$ 需由黑變為白，因此 $a_{1,1} \equiv 1(mod4)$ ，此時為滿足 $b_{1,2}$ 由白變為黑，即 $b_{1,2}$

周圍按鈕共按 $3(mod4)$ ，則 $a_{1,2} \equiv 3 - a_{1,1} \equiv 3 - 1 \equiv 2(mod4)$ ，又 $b_{1,3}$ 須由黑變白，則 $a_{1,2} + a_{1,3} \equiv 1$ ，則 $a_{1,3} \equiv 1 - a_{1,2} \equiv 1 - 2 \equiv -1 \equiv 3(mod4)$ ，最後，檢查 $b_{1,4}$ 由白變黑，則 $a_{1,3} \equiv 3$ ，無矛盾產生，則 4×4 棋盤的第一排有解。

2. $b_{2,1}$ 需由白變為黑，則 $a_{2,1} \equiv 3 - a_{1,1} \equiv 3 - 1 \equiv 2$ ，此時為滿足 $b_{2,2}$ 由黑變為白，則 $a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2} \equiv 1$ ，則 $a_{2,2} \equiv 1 - a_{1,1} - a_{1,2} - a_{2,1} \equiv 1 - 1 - 2 - 2 \equiv -4 \equiv 0(mod4)$ 。又 $b_{2,3}$ 由白變為黑，則 $a_{1,2} + a_{1,3} + a_{2,2} + a_{2,3} \equiv 3$ ，故 $a_{2,3} \equiv 3 - a_{1,2} - a_{1,3} - a_{2,2} \equiv 3 - 2 - 3 - 0 \equiv -2 \equiv 2(mod4)$ 。最後，檢查 $b_{2,4}$ 是否由黑變為白，則 $a_{2,3} \equiv 1 - a_{1,3} \equiv 1 - 3 \equiv -2 \equiv 2(mod4)$ ，無矛盾產生，因此 4×4 棋盤的上方二排有解。
3. $b_{3,1}$ 需由黑變為白，則 $a_{3,1} \equiv 1 - a_{2,1} \equiv 1 - 2 \equiv -1 \equiv 3(mod4)$ ，此時為滿足 $b_{3,2}$ 由白變為黑，則 $a_{2,1} + a_{2,2} + a_{3,1} + a_{3,2} \equiv 3$ ，則 $a_{3,2} \equiv 3 - a_{2,1} - a_{3,1} - a_{2,2} \equiv 3 - 2 - 3 - 0 \equiv -2 \equiv 2(mod4)$ 。又 $b_{3,3}$ 需由黑變為白，則 $a_{2,2} + a_{2,3} + a_{3,2} + a_{3,3} \equiv 1$ ，故 $a_{3,3} \equiv 1 - a_{2,2} - a_{2,3} - a_{3,2} \equiv 1 - 0 - 2 - 2 \equiv -3 \equiv 1(mod4)$ 。最後，檢查 $b_{3,4}$ 由白變黑，則 $a_{3,3} \equiv 1(mod4)$ ，無矛盾產生，因此 4×4 棋盤的上方三排有解。
4. 最後需檢驗剩下方格變色的狀況，其中方格 $b_{4,1}$ 隨按鈕 $a_{3,1}$ 變色，且已知按鈕 $a_{3,1} \equiv 3(mod4)$ ，因此成功使 $b_{4,1}$ 由白色變為黑色。方格 $b_{4,2}$ 隨按鈕 $a_{3,1}$ 、 $a_{3,2}$ 變色，根據同餘的運算，方格 $b_{4,2}$ 一共被按了 $a_{3,1} + a_{3,2} \equiv 3 + 2 \equiv 5 \equiv 1(mod4)$ 次，因此成功由原本的白色變為黑色。同理，方格 $b_{4,3}$ 隨按鈕 $a_{3,2}$ 、 $a_{3,3}$ 變色，故方格 $b_{4,3}$ 一共被按了 $a_{3,2} + a_{3,3} \equiv 2 + 1 \equiv 3(mod4)$ 次，成功由原本的白色變為黑色。而方格 $b_{4,4}$ 僅隨按鈕 $a_{3,3}$ 變色，已知 $a_{3,3} \equiv 1$ ，因此方格 $b_{4,4}$ 也成功由黑色變為白色。
5. 前述說明成功使所有格子黑白顛倒，代表 $(1,3)$ 變色在 4×4 棋盤是有解的。且由於 $a_{1,1}$ 、 $a_{1,2}$ 、 $a_{1,3}$ 、 $a_{2,1}$ 、 $a_{2,2}$ 、 $a_{2,3}$ 、 $a_{3,1}$ 、 $a_{3,2}$ 、 $a_{3,3}$ 皆是除以4的餘數，因此可知最小步數為 $a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = 16$ 。

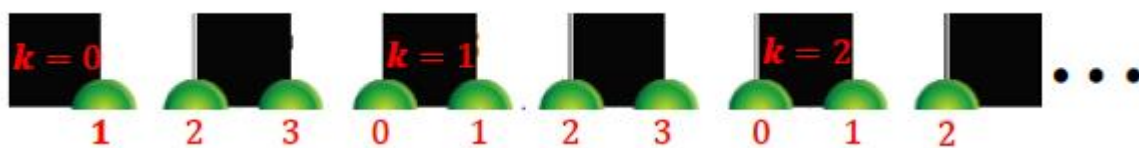
(三)說明 $(1,3)$ 變色在 $4k \times 4k$ 棋盤的解：

1. $4k \times 4k = k^2(4 \times 4)$ ，故我們可將其視為 k^2 個 (4×4) 棋盤(皆是左上角為黑色的 4×4 棋盤)，前述已證明 4×4 棋盤有解，因此可知 $(1,3)$ 變色在 $4k \times 4k$ 棋盤中有解，接著我們將說明其最小步數。

2. 已知 $4k \times 4k$ 棋盤可視為 k^2 個 (4×4) 棋盤，且前述已證明 4×4 棋盤的最小步數為16，因此 $4k \times 4k$ 棋盤的最小步數為 $16k^2$ 。

(四)(1,3)變色在 $(4k + 1) \times (4k + 1)$ 棋盤下無解說明

下圖為 $(4k + 1) \times (4k + 1)$ 棋盤簡化後的圖形，我們發現由左到右的按鈕按下次數依序為1、2、3、 $0(mod 4)$ 並無限循環下去，因此若圖形停在 $b_{1,4k+1}$ ，周圍之按鈕將只會被按下 $0(mod 4)$ 次，又 $b_{1,4k+1}$ 原為黑色，需按 $1(mod 4)$ 下才可變為白色，故其無法成功變色，即(1,3)變色在 $(4k + 1) \times (4k + 1)$ 棋盤無解。



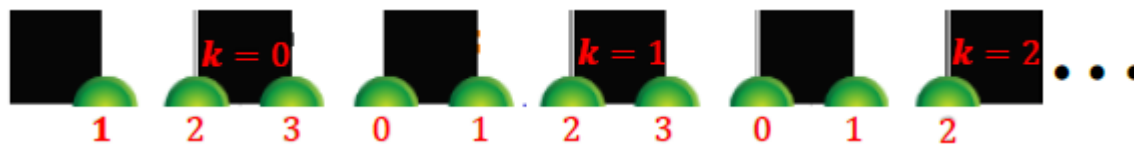
(五)(1,3)變色在 $(4k + 2) \times (4k + 2)$ 棋盤無解說明

下圖為 $(4k + 2) \times (4k + 2)$ 棋盤簡化後的圖形，同(四)，若圖形停在 $b_{1,4k+2}$ ，周圍之按鈕將只會被按下 $1(mod 4)$ 次，又 $b_{1,4k+2}$ 原為白色，需按 $3(mod 4)$ 下才可變為黑色，故其無法成功變色，即(1,3)變色在 $(4k + 2) \times (4k + 2)$ 棋盤無解。



(六)(1,3)變色在 $(4k + 3) \times (4k + 3)$ 棋盤無解說明

下圖為 $(4k + 3) \times (4k + 3)$ 棋盤簡化後的圖形，同(四)，若圖形停在 $b_{1,4k+3}$ ，周圍之按鈕將只會被按下 $2(mod 4)$ 次，又 $b_{1,4k+3}$ 原為黑色，需按 $1(mod 4)$ 下才可變為白色，故其無法成功變色，即(1,3)變色在 $(4k + 3) \times (4k + 3)$ 棋盤無解。



(七)小結：

1. (1,3)變色在 4×4 棋盤中的最小解為16
2. (1,3)變色僅在 $4k \times 4k$ 棋盤中有解，且最小解為 $16k^2$

結論：根據(1,2)變色與(1,3)變色的討論，我們發現(1,n)變色僅在 $n + 1$ 的倍數棋盤中有解，且在小於 $n + 1$ 的棋盤中皆無解，我們會在以下進行說明。

五、說明 $(1, n)$ 變色在不同棋盤中解的情況

(一) $t \times t$ 棋盤(其中 $0 < t < n + 1$)無解

1. t 為偶數的狀況



當 t 為偶數，第 t 格為白色方格，且其周圍的按鈕將被按下 $t - 1$ 下。但在 $(1, n)$ 變色時，白色方格需按下 $n \pmod{n + 1}$ 次才會變為黑色，因此 $t - 1 = n \rightarrow t = n + 1$ ，已知 $t < n + 1$ ，出現矛盾($\rightarrow \leftarrow$)，故 $(1, n)$ 變色在 $t \times t$ 棋盤($t < n + 1, t$ 為偶數)無解。

2. t 為奇數的狀況



當 t 為奇數，第 t 格為黑色方格，且其周圍的按鈕將被按下 $n - t + 2$ 下。但在 $(1, n)$ 變色時，黑色方格需按下 $1 \pmod{n + 1}$ 次才會變為黑色，因此 $n - t + 2 = 1 \rightarrow t = n + 1$ ，已知 $t < n + 1$ ，出現矛盾($\rightarrow \leftarrow$)，故 $(1, n)$ 變色在 $t \times t$ 棋盤($t < n + 1, t$ 為奇數)無解。

3. 根據前述說明，可知 $(1, n)$ 變色在 $t \times t$ 棋盤(其中 $0 < t < n + 1$)無解。

(二) $(1, n)$ 變色在 $(n + 1) \times (n + 1)$ 棋盤的解

1. 為了驗證 $(1, n)$ 變色在 $(n + 1) \times (n + 1)$ 棋盤中有解，我們先試著窮舉了 $n = 1 \sim 10$ 的狀況，且為了方便觀察，我們將表格定為**按鈕須按下的次數**，如下表。下表即為 $(1, 2)$ 變色在 3×3 棋盤中的按法，四個位置表示 3×3 棋盤中間的四個按鈕。且其中的所有按法次數皆為除以 $n + 1$ 的餘數，因此可知窮舉的按法為最小步數，我們將其加總即為該變色按法的最小步數。

(1,2)變色在 3×3 棋盤的按法，最小步數 = 4	
$a_{1,1} = 1$	$a_{1,2} = 1$
$a_{2,1} = 1$	$a_{2,2} = 1$

窮舉 $(1, n)$ 變色在 $(n + 1) \times (n + 1)$ 棋盤的解($n = 2 \sim 8$)，並整理最小步數。

(1,2)變色，最小步數=4	
1	1
1	1

(1,3)變色，最小步數=16		
1	2	3
2	0	2
3	2	1

(1,4)變色，最小步數=44			
1	3	3	1
3	4	4	3
3	4	4	3
1	3	3	1

(1,5)變色，最小步數=63				
1	4	3	2	5
4	4	0	2	2
3	0	3	0	3
2	2	0	4	4
5	2	3	4	1

(1,6)變色，最小步數=100					
1	5	3	3	5	1
5	4	1	1	4	5
3	1	2	2	1	3
3	1	2	2	1	3
5	4	1	1	4	5
1	5	3	3	5	1

(1,7)變色，最小步數=176						
1	6	3	4	5	2	7
6	4	2	0	6	4	2
3	2	1	4	7	6	5
4	0	4	0	4	0	4
5	6	7	4	1	2	3
2	4	6	0	2	4	6
7	2	5	4	3	6	1

(1,8)變色，最小步數=304							
1	7	3	5	5	3	7	1
7	4	3	8	8	3	4	7
3	3	0	6	6	0	3	3
5	8	6	7	7	6	8	5
5	8	6	7	7	6	8	5
3	3	0	6	6	0	3	3
7	4	3	8	8	3	4	7
1	7	3	5	5	3	7	1

2. $(1, n)$ 變色在 $(n + 1) \times (n + 1)$ 棋盤的按法規律發現：

我們在窮舉的過程中發現，由於棋盤的本身的對稱性很強，因此在找最小步數按法的解時，也可以利用對稱性來簡化，以下為最小步數按法的對稱情況說明：

(1)若以按鈕圖形最中心的點為對稱點，則將上下棋盤旋轉 180° 會變為相同圖形，即最小步數按法會是點對稱圖形，因此如果一個棋盤的上半部分有解，這個棋盤必有解。如下圖，若 $n = 5$ ，最小按法會是以 $a_{3,3}$ 為對稱中心的點對稱圖形；若 $n = 6$ ，最小按法會是以 $b_{4,4}$ 為對稱中心的點對稱圖形。

(1,5)變色 63				
1	4	3	2	5
4	4	0	2	2
3	0	3	0	3
2	2	0	4	4
5	2	3	4	1

(1,6)變色 100					
1	5	3	3	5	1
5	4	1	1	4	5
3	1	2	2	1	3
3	1	2	2	1	3
5	4	1	1	4	5
1	5	3	3	5	1

(2)除了(1)中提到到點對稱性質外，也可發現當 n 為偶數時，最小步數的按法亦會是線對稱圖形，其對稱軸為過中心的鉛垂線與水平線(下圖為 $n = 6$ 的情形)因此僅須找出其左上角(圖形的 $\frac{1}{4}$)即可。

(1,6)變色 100					
1	5	3	3	5	1
5	4	1	1	4	5
3	1	2	2	1	3
3	1	2	2	1	3
5	4	1	1	4	5
1	5	3	3	5	1

(3)根據(1)、(2)的情況，簡化為原圖形的一半後，我們可過圖形中心做垂直線與水平線將圖形分為四分之一。此外，可知棋盤的第一排、第一列方格順序相同，第二排與第二列的方格亦相同，所以它的按下次數也將以對角線為對稱軸對稱。因此可將圖形再沿著其對角線分為一半，按下次數也將對稱(註：若有按鈕恰好在線上，仍要計算)。故當 n 為偶數時，僅需須找出其 $\frac{1}{8}$ 部分的解(下圖為 $n = 6$ 的情形)， n 為奇數時，則須找出

其 $\frac{1}{4}$ 部分的解(下圖為 $n = 5$ 的情形)，剩餘情況只需以線對稱的特徵推導即可。

(1,6)變色 100					
1	5	3	3	5	1
5	1	1	1	4	5
3	1	2	2	1	3
3	1	2	2	1	3
5	4	1	1	4	5
1	5	3	3	5	1

(1,5)變色 63					
1	4	3	2	5	
4	4	0	2	2	
3	0	2	0	3	
2	2	0	4	4	
5	2	3	4	1	

(4)繼續討論下去我們發現，若將負數納入考量，則第一列的按鈕會有以下的規律：

$a_{1,n} \equiv (-1)^n \times n \pmod{n+1}$ ，說明如下：我們令起始條件的黑格為 -1 ，白格為 1 ，此時若周圍按鈕能使其數字加總變為 $0 \pmod{n+1}$ ，則可使其成功變色。因 $b_{1,1}$ 為黑色，則 $b_{1,1} + a_{1,1} \equiv -1 + a_{1,1} \equiv 0$ ，可得 $a_{1,1} \equiv 1 \pmod{n+1}$ ； $b_{1,2}$ 為白色，則 $b_{1,2} + a_{1,1} + a_{1,2} \equiv 0$ ， $1 + 1 + a_{1,2} \equiv 0$ ，可得 $a_{1,2} \equiv -2 \pmod{n+1}$ ，依此類推 $a_{1,3} \equiv 3$ ， $a_{1,4} \equiv -4 \dots\dots$ 。又由(3)的對稱關係可知，第一行也會是相同的狀況。

(5)根據(4)繼續向下推導，最後我們找到了 $(1,n)$ 變色在 $(n+1) \times (n+1)$ 的解，如下表所示(下表為 $(1,n)$ 變色在 $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤的情況)。除第一列、第一行外，中間的每個數字都會等於其首列及首行相乘，即 $a_{m,l} \equiv a_{m,1} \times a_{1,l}$ ，無論是模多少；其邏輯與(4)相似，因 $a_{1,1}$ 和 $a_{2,1}$ 共同控制 $b_{2,1}$ (白色)的變色，則 $a_{1,1} + a_{2,1} \equiv -1$ ，又 $a_{1,1}$ 、 $a_{2,1}$ 、 $a_{1,2}$ 、 $a_{2,2}$ 四個按鈕共同控制 $b_{2,2}$ (黑色)的變色，且已知 $a_{1,1} + a_{2,1} \equiv -1$ ，得 $a_{1,2} + a_{2,2} \equiv (-2) \times (-1) \equiv 2$ 。以此類推，已知 $a_{1,2} \equiv 1 \times -2$ ，則 $a_{2,2} \equiv (-1) \times (-2) - 1 \times (-2) \equiv (-2) \times (-2) \equiv 4$ ；因 $a_{2,1}$ 和 $a_{3,1}$ 共同控制 $b_{3,1}$ (黑色)的變色，則 $a_{2,1} + a_{3,1} \equiv 1$ ，又 $a_{2,1}$ 、 $a_{3,1}$ 、 $a_{2,2}$ 、 $a_{3,2}$ 四個按鈕共同控制 $b_{3,2}$ (白色)的變色，因此 $a_{2,2} + a_{3,2} \equiv (-2) \times 1 \equiv -2$ ，故 $a_{1,3} \equiv (-2) \times (-2)$ ，得 $a_{3,2} \equiv 1 \times (-2) - (-2) \times (-2) \equiv (-2) \times 3 \equiv -6$ ，又依(3)可知 $a_{2,3} \equiv a_{3,2} \equiv -6$ ；因 $a_{2,2} + a_{3,2} \equiv -2$ ，且 $a_{2,2}$ 、 $a_{3,2}$ 、 $a_{2,3}$ 、 $a_{3,3}$ 四個按鈕共同控制 $b_{3,3}$ (黑色)的變色，因此 $a_{2,2} + a_{3,2} \equiv 3 \times 1 \equiv 3$ ，又 $a_{1,3} \equiv (-2) \times 3$ ，得 $a_{3,2} \equiv 3 \times 1 - (-2) \times 3 \equiv 3 \times 3 \equiv 9 \dots\dots$

$a_{1,1} \equiv 1$	$a_{1,2} \equiv -2$	$a_{1,3} \equiv 3$	$a_{1,4} \equiv -4$	$a_{1,5} \equiv 5$	...	$a_{1,n}$ $\equiv (-1)^n \times n$
$a_{2,1} \equiv -2$	$a_{2,2}$ $\equiv (-2)(-2)$ $\equiv 4$	$a_{2,3}$ $\equiv (-2) \times 3$ $\equiv -6$	$a_{2,4}$ $\equiv (-2)$ $\times (-4) \equiv 8$	$a_{2,5}$ $\equiv -2 \times 5$ $\equiv -10$		$a_{2,n}$ $\equiv -2 \times a_{1,n}$
$a_{3,1} \equiv 3$	$a_{3,2}$ $\equiv 3 \times (-2)$ $\equiv -6$	$a_{3,3}$ $\equiv 3 \times 3$ $\equiv 9$	$a_{3,4}$ $\equiv 3 \times (-4)$ $\equiv -12$	$a_{3,5}$ $\equiv 3 \times 5$ $\equiv 15$		$a_{3,n}$ $\equiv 3 \times a_{1,n}$
$a_{4,1} \equiv -4$	$a_{4,2}$ $\equiv (-4)(-2)$ $\equiv 8$	$a_{4,3}$ $\equiv (-4) \times 3$ $\equiv -12$	$a_{4,4}$ $\equiv -4 \times (-4)$ $\equiv 16$	$a_{4,5}$ $\equiv -4 \times 5$ $\equiv -20$		$a_{4,n}$ $\equiv -4 \times a_{1,n}$
$a_{5,1} \equiv 5$	$a_{5,2}$ $\equiv 5 \times (-2)$ $\equiv -10$	$a_{5,3}$ $\equiv 5 \times 3$ $\equiv 15$	$a_{5,4}$ $\equiv 5 \times (-4)$ $\equiv -20$	$a_{5,5}$ $\equiv 5 \times 5$ $\equiv 25$		$a_{5,n}$ $\equiv 5 \times a_{1,n}$
$a_{6,1} \equiv -6$	$a_{6,2}$ $\equiv (-6)(-2)$ $\equiv 12$	$a_{6,3}$ $\equiv (-6) \times 3$ $\equiv -18$	$a_{6,4}$ $\equiv -6 \times (-4)$ $\equiv 24$	$a_{6,5}$ $\equiv -6 \times 5$ $\equiv -30$		$a_{6,n}$ $\equiv -6 \times a_{1,n}$
...					...	...
$a_{n,1}$ $\equiv (-1)^n$ $\times n$	$a_{n,2}$ $\equiv a_{n,1}(-2)$	$a_{n,3}$ $\equiv a_{n,1} \times 3$	$a_{n,4}$ $\equiv a_{n,1} \times -4$	$a_{n,5}$ $\equiv a_{n,1} \times 5$	...	$a_{n,n}$ $\equiv a_{n,1} \times a_{1,n}$

(6)根據上述的發現，可知依照表格的結果為 $(1,n)$ 變色在 $(n+1) \times (n+1)$ 的其中一組解，因此此狀況是有解的。但在實際操作的情況下我們沒有辦法按下負的次數，因此還需將其依照同餘的關係轉回正數，而若能將表格中的數字皆轉回除以 $n+1$ 的餘數，則會在此狀況的最小步數按法，如此一來便可以找到 $(1,n)$ 變色在 $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤中解的最小步數。因此我們在 excel 軟體上利用 mod 函數將最小步數的工具製作出來，以便之後能簡化窮舉的狀況。下圖為用 excel 軟體驗證 $(1,10)$ 變色在 11×11 棋盤下的狀況，並且也可利用 excel 軟體中的加總工具，得知最小步數為 520。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n=	n+1=	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
2	10	11	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
3	1	-1	1	9	3	7	5	5	7	3	9	1
4	-1	1	9	4	5	8	1	1	8	5	4	9
5	1	-1	3	5	9	10	4	4	10	9	5	3
6	-1	1	7	8	10	5	2	2	5	10	8	7
7	1	-1	5	1	4	2	3	3	2	4	1	5
8	-1	1	5	1	4	2	3	3	2	4	1	5
9	1	-1	7	8	10	5	2	2	5	10	8	7
10	-1	1	3	5	9	10	4	4	10	9	5	3
11	1	-1	9	4	5	8	1	1	8	5	4	9
12	-1	1	1	9	3	7	5	5	7	3	9	1

項目個數: 100 加總: 520

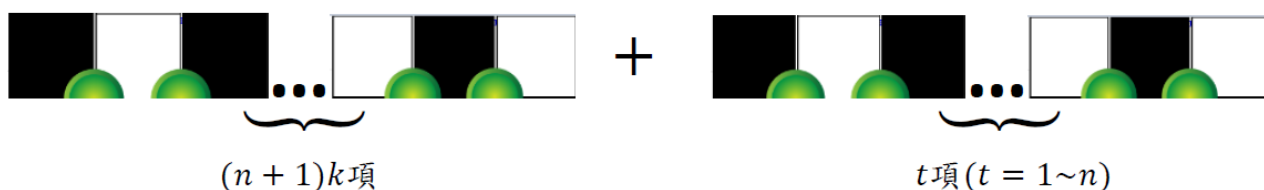
(三) $(n+1)k \times (n+1)k$ 棋盤有解

$(n+1)k \times (n+1)k = k^2[(n+1) \times (n+1)]$ ，故我們可將其視為 k^2 個 $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤(一部分左上角為黑色，一部分左上角是白色)，前述已證明 $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤有解(左上角黑色)，由同餘關係亦可知左上角白色之 $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤有解，因此可知 $(1, n)$ 變色在 $(n+1)k \times (n+1)k$ 棋盤中有解。

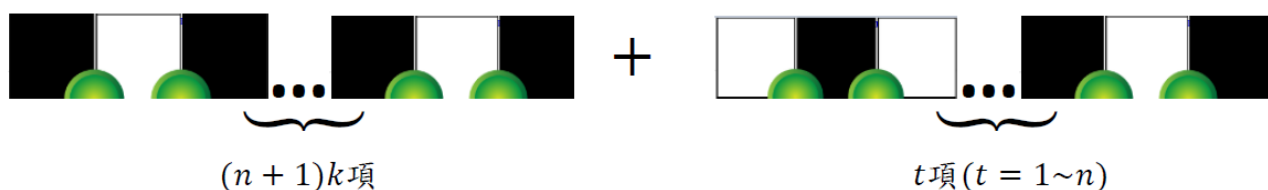
(四) $[(n+1)k+1] \times [(n+1)k+1] \sim [(n+1)k+n] \times [(n+1)k+n]$ 棋盤無解

由於僅第一列按鈕可控制第一列的棋盤，因此只須說明第一列按鈕無法使第一列方格成功變色即可，所以我們將第一列方格拆開為 $(n+1)k$ 格與 t 格($t = 1 \sim n$)，如下圖。且因 $(n+1)k$ 有解， $1 \sim n$ 無解，所以 $[(n+1)k+t] \times [(n+1)k+t]$, ($t = 1 \sim n$) 棋盤無解。

1. 當 $(n+1)k$ 是偶數：



2. 當 $(n+1)k$ 是奇數：



(五) 小結

1. $(1, n)$ 變色在 $t \times t$ 棋盤(其中 $0 < t < n+1$) 無解
2. $(1, n)$ 變色僅在 $(n+1) \times (n+1)$ 的倍數棋盤中有解
3. $(1, n)$ 變色在 $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤的最小步數解會具有對稱性，如(3)下方圖示。

六、說明 $(1, n)$ 變色在 $n \times n$ 棋盤最小步數的上下界

(一)根據五(二)2.(5)可知 $(1, n)$ 變色在 $n \times n$ 棋盤有解，接著我們原本想由該表轉為除以 $(n + 1)$ 的餘數，即可找出其最小步數，但在同餘的變換上並無找到規律，因此我們改為由同餘的性質求最小步數的上下界。

(二)最小步數的下界說明：我們將按鈕兩兩為一組相加(取上下相鄰之兩按鈕)，以第一行為例， $a_{1,1}$ 與 $a_{2,1}$ 為一組，其和為 -1 ，接著我們將其加上 $(n + 1)$ ，使其變為除以 $(n + 1)$ 之餘數，則必定小於等於最小步數。說明如下：若設任兩個上下相鄰按鈕為 a 、 b ，且 a_0 、 b_0 分別為其除以 $(n + 1)$ 之餘數(即為最小步數)，並令 $(a + b)$ 除以

$$(n + 1) \text{ 之餘數為 } c, \text{ 如右式 } \begin{cases} a \equiv a_0, \text{ mod}(n + 1) \\ b \equiv b_0, \text{ mod}(n + 1) \\ a + b \equiv c, \text{ mod}(n + 1) \end{cases}, \text{ 則當 } a_0 + b_0 < n + 1 \text{ 時,}$$

$a_0 + b_0 = c$ ，因為此時 $0 \leq a_0 + b_0 < n + 1$ 是顯然的(兩正數相加不可能為負)，而 c 小於 $n + 1$ ，又可根據同餘運算得知 $a_0 + b_0 = c$ ；當 $a_0 + b_0 > n + 1$ 時，因 c 不可能大於 $n + 1$ ，所以必定小於 $a_0 + b_0$ ，所以我們取 c 作為下界。

(三)最小步數的上界說明：同 2.，在第 s 行中的上下相鄰必為異號，且其和的絕對值為 $|a_{1,s}| = |s|$ (如下圖之 4×4 棋盤， $|a_{2,3} + a_{3,3}| = 3$)，又在 $(1, n)$ 變色中只有 n 列按鈕，則 $0 < ||a| - |b|| < n + 1$ ， $0 < a_0 + b_0 \leq 2n - 1$ ，且 $a_0 + b_0 = 2n - 1$ 時， $a + b$ 必定為 -1 ，得 $c = n$ ，又實際按下次數會多 $n + 1$ ，則此時上界為 $2n + 1 > 2n - 1$ ，且 a_0 、 b_0 減小時， c 也將隨之減小，所以我們取 $c + n + 1$ 為上界。

$a_{1,1} \equiv 1^+$	$a_{1,2} \equiv -2^+$	$a_{1,3} \equiv 3^+$
$a_{2,1} \equiv -2^+$	$a_{2,2} \equiv (-2)(-2) \equiv 4^+$	$a_{2,3} \equiv (-2) \times 3 \equiv -6^+$
$a_{3,1} \equiv 3^+$	$a_{3,2} \equiv 3 \times (-2) \equiv -6^+$	$a_{3,3}^+ \equiv 3 \times 3^+ \equiv 9^+$

(四)最小步數上下界說明(分為奇數、 $0(mod4)$ 、 $2(mod4)$ 三個情形)

1. 當 n 為奇數時的上界

圖(一)(1)為(1,5)變色在 6×6 棋盤的解，求上界時先將上下相鄰的按鈕次數相加，如圖(一)(2)，且由前述之點對稱情形，所以除了最中間的那一行外皆須再乘2，且其數值還須加上 $n+1$ ，如圖(一)(3)，再加總起來，得上界為 $(7+8) \times 3 \times 2 + 9 \times 3 = 117$ ；以此類推，圖(二)(1)為(1,7)變色在 8×8 棋盤的解(因對稱性質只需取一半)，求上界時先將上下相鄰的按鈕次數相加，如圖(二)(2)，除最右邊的那一行外皆須再乘2，且數值還須加上 $n+1$ ，如圖(二)(3)，可得其上界為 $(9+10+11) \times 4 \times 2 + 12 \times 4 = 288$ 。

我們將上述式子分為兩項，分別找出其一般式，不難發現，括號內的項數為 $\frac{n-1}{2}$ ，每往後一項其值會增加1，且首項為 $n+2$ ，則其末項為 $n+2 + \frac{n-3}{2} = \frac{3n+1}{2}$ ，又每行共有 $\frac{n+1}{2}$ 個相同的數，故在加號前的式子其和的一般式為：

$$\frac{(n+2 + \frac{3n+1}{2}) \frac{n-1}{2}}{2} \times (n+1) = \frac{5(n+1)^2(n-1)}{8}$$

，而加號後將為 $\frac{3n+3}{2} \times \frac{n+1}{2}$ ，整理過後得知當 n 為奇數時，其上界為：

$$\frac{(n+1)^2(5n+1)}{8}。$$

1	-2	3	-4	5
-2	4	-6	8	-10
3	-6	9	-12	15
-4	8	-12	16	-20
5	-10	15	-20	25

圖(一)(1)

$a_{1,1} = 1$	$a_{1,2} + a_{2,2} = 2$	$a_{1,3} = 3$
$a_{1,2} + a_{1,3} = 1$	$a_{3,2} + a_{4,2} = 2$	$a_{2,3} + a_{3,3} = 3$
$a_{1,4} + a_{1,5} = 1$	$a_{5,2} = 2$	$a_{4,3} + a_{5,3} = 3$

圖(一)(2)

$1+6=7$	$2+6=8$	$3+6=9$	$2+6=8$	$1+6=7$
7	8	9	8	7
7	8	9	8	7

圖(一)(3)

1	-2	3	-4
-2	4	-6	8
3	-6	9	-12
-4	8	-12	16
5	-10	15	-20
-6	12	-18	24
7	-14	21	-28

圖(二)(1)

$a_{1,1} = 1$	$a_{1,2} + a_{2,2} = 2$	$a_{1,3} = 3$	$a_{1,4} + a_{2,4} = 4$
$a_{2,1} + a_{3,1} = 1$	$a_{3,2} + a_{4,2} = 2$	$a_{2,3} + a_{3,3} = 3$	$a_{3,4} + a_{4,4} = 4$
$a_{4,1} + a_{5,1} = 1$	$a_{5,2} + a_{6,2} = 2$	$a_{4,3} + a_{5,3} = 3$	$a_{5,4} + a_{6,4} = 4$
$a_{6,1} + a_{7,1} = 1$	$a_{7,2} = 2$	$a_{6,3} + a_{7,3} = 3$	$a_{7,4} = 4$

圖(二)(2)

$1 + 8 = 9$	$2 + 8 = 10$	$3 + 8 = 11$	$4 + 8 = 12$
9	10	11	12
9	10	11	12
9	10	11	12

圖(二)(3)

2. 當 n 為奇數時的下界

圖(三)(1)為(1,5)變色在 6×6 棋盤的解，求下界時先將上下相鄰的按鈕次數相加，如圖(三)(2)，且由前述之點對稱情形，所以除了最右邊的那一行外皆須再乘2，且其數值還須加上 $n + 1$ ，如圖(三)(2)，所以下界為 $(5 + 4) \times 3 \times 2 + 3 \times 3 = 63$ ；圖(四)(1)為(1,7)變色在 8×8 棋盤的解(因對稱性質只需取一半)，求下界時先將上下相鄰的按鈕次數相加，如圖(四)(2)，除最右邊的那一行外皆須再乘2，且數值還須加上 $n + 1$ ，如圖(四)(3)，所以其上界為 $(7 + 6 + 5) \times 4 \times 2 + 4 \times 4 = 160$ 。

我們將上述式子分為兩項，分別找出其一般式，不難發現，括號內的項數為 $\frac{n-1}{2}$ ，

每往後一項其值會減少1，且首項為 n ，則其末項為 $n + \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n+3}{2}$ ，又每行共

有 $\frac{n+1}{2}$ 個相同的數，故在加號前的式子其和的一般式為

$$\frac{(n + \frac{n+3}{2}) \frac{n-1}{2}}{2} \times (n+1) = \frac{3(n+1)^2(n-1)}{8}$$

，而加號後將為 $(\frac{n+1}{2})^2$ ，整理過後得知當 n 為奇數時，其下界為：

$$\frac{(n+1)^2(3n-1)}{8}。$$

1	-2	3	-4	5
-2	4	-6	8	-10
3	-6	9	-12	15
-4	8	-12	16	-20
5	-10	15	-20	25

圖(三)(1)

$a_{1,1} + a_{2,1} = -1$	$a_{1,2} = -2$	$a_{1,3} + a_{2,3} = -3$
$a_{3,1} + a_{4,1} = -1$	$a_{2,2} + a_{3,2} = -2$	$a_{3,3} + a_{4,3} = -3$
$a_{5,1} = -1$	$a_{4,2} + a_{5,2} = -2$	$a_{5,3} = -3$

圖(三)(2)

$-1 + 6 = 5$	$-2 + 6 = 4$	$-3 + 6 = 3$	4	5
5	4	3	4	5
5	4	3	4	5

圖(三)(3)

1	-2	3	-4
-2	4	-6	8
3	-6	9	-12
-4	8	-12	16
5	-10	15	-20
-6	12	-18	24
7	-14	21	-28

圖(四)(1)

$a_{1,1} + a_{2,1} = -1$	$a_{1,2} = -2$	$a_{1,3} + a_{2,3} = -3$	$a_{1,4} = -4$
$a_{3,1} + a_{4,1} = -1$	$a_{2,2} + a_{3,2} = -2$	$a_{3,3} + a_{4,3} = -3$	$a_{2,4} + a_{3,4} = -4$
$a_{5,1} + a_{6,1} = -1$	$a_{4,2} + a_{5,2} = -2$	$a_{5,3} + a_{6,3} = -3$	$a_{4,4} + a_{5,4} = -4$
$a_{7,1} = -1$	$a_{6,2} + a_{7,2} = -2$	$a_{7,3} = -3$	$a_{6,4} + a_{7,4} = -4$

圖(四)(2)

$-1 + 8 = 7$	$-2 + 8 = 6$	$-3 + 8 = 5$	$-4 + 8 = 4$
7	6	5	4
7	6	5	4
7	6	5	4

圖(四)(3)

3. 當 $n \equiv 0(mod 4)$ 時的上界

(1) 在找偶數的上界時，我們發現同餘 $0(mod 4)$ 與同餘 $2(mod 4)$ 的運算方法不同，因此我們將其分開說明。

(2) 在求(1,8)變色在 9×9 棋盤的最小步數下界時，先將上下相鄰的按鈕次數相加，且由前述之點對稱情形，每一行的數值皆須再 $\times 2$ ，且還須加上 $n + 1$ ，可得其上界為

$$[(10 + 12) \times 5 + (11 + 13) \times 4] \times 2 = 412。$$

我們將上述式子分為兩項，分別找出其一般式，不難發現，加號前的括號內的項數

為 $\frac{n}{4}$ ，每往後一項其值會增加2，且首項為 $n + 2$ ，則其末項為 $n + 2 + \frac{n-4}{4} \times 2 =$

$\frac{3n}{2}$ ，又每行共有 $\frac{n+2}{2}$ 個相同的數，則其加號前的一般式為：

$$\frac{(n + 2 + \frac{3n}{2}) \frac{n}{4}}{2} \times \frac{n + 2}{2} = \frac{n(5n + 4)(n + 2)}{32}$$

加號後的括號內的項數為 $\frac{n}{4}$ ，每往後一項其值會增加2，且首項為 $n + 3$ ，則其末項

為 $n + 3 + \frac{n-4}{4} \times 2 = \frac{3n+2}{2}$ ，又每行共有 $\frac{n}{2}$ 個相同的數，則其加號後的一般式為：

$$\frac{(n + 3 + \frac{3n+2}{2}) \frac{n}{4}}{2} \times \frac{n}{2} = \frac{n^2(5n + 8)}{32}$$

最後還要再 $\times 2$ ，所以 $n \equiv 0(mod 4)$ 時， $(n + 1) \times (n + 1)$ 棋盤之最小步數的上界為：

$$\left(\frac{n(5n + 4)(n + 2)}{32} + \frac{n^2(5n + 8)}{32} \right) \times 2 = \frac{(5n^2 + 11n + 4)n}{8}$$

4. 當 $n \equiv 0(mod 4)$ 時的下界

在求(1,8)變色在 9×9 棋盤的最小步數下界時，先將上下相鄰的按鈕次數相加，且由前述之點對稱情形，每一行皆須再乘2，且其數值還須加上 $n + 1$ ，所以其上界為 $[(6 + 8) \times 4 + (5 + 7) \times 4] \times 2 = 208。$

我們將上述式子分為兩項，分別找出其一般式，不難發現，加號前括號內的項數為

$\frac{n}{4}$ ，每往後一項其值會減少2，且首項為 n ，則其末項為 $n - 2 \left(\frac{n-4}{4} \right) = \frac{n+4}{2}$ ，又每

行共有 $\frac{n}{2}$ 個相同的數，故在加號後的式子其和的一般式為：

$$\frac{(n + \frac{n+4}{2}) \frac{n}{4}}{2} \times \frac{n}{2} = \frac{n^2(3n + 4)}{32}$$

加號後括號內的項數為 $\frac{n}{4}$ ，每往後一項其值會減少2，且首項為 $n - 1$ ，則其末項為

$n - 1 - 2 \left(\frac{n-4}{4} \right) = \frac{n+2}{2}$ ，又每行共有 $\frac{n+2}{2}$ 個相同的數，故在加號後的式子其和的一

般式為：

$$\frac{\left(n-1+\frac{n+2}{2}\right)\frac{n}{4}}{2} \times \frac{n+2}{2} = \frac{3n^2(n+2)}{32}$$

最後還要再 $\times 2$ ，所以 $n \equiv 0(mod 4)$ 時， $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤之最小步數的下界為：

$$\left(\frac{n^2(3n+4)}{32} + \frac{3n^2(n+2)}{32}\right) \times 2 = \frac{(3n+5)n^2}{8}$$

5. 當 $n \equiv 2(mod 4)$ 時的上界：

在求(1,6)變色在 7×7 棋盤的最小步數上界時，先將上下相鄰的按鈕次數相加，且由前述之點對稱情形，所以每一行皆須再乘2，且其數值還須加上 $n+1$ ，所以上界為 $[(8+10) \times 4 + 9 \times 3] \times 2 = 198$ 。

我們將上述式子分為兩項，分別找出其一般式，不難發現，加號前的括號內的項數為 $\frac{n+2}{4}$ ，每往後一項其值會增加2，且首項為 $n+2$ ，則其末項為 $n+2+2\left(\frac{n-2}{4}\right) = \frac{3n+2}{2}$ ，又每行共有 $\frac{n+2}{2}$ 個相同的數，則其加號前的一般式為：

$$\frac{\left(n+2+\frac{3n+2}{2}\right)\left(\frac{n+2}{4}\right)}{2} \times \frac{(n+2)}{2} = \frac{(5+6)(n+2)^2}{32}$$

加號後的括號內的項數為 $\frac{n-2}{4}$ ，每往後一項其值會增加2，且首項為 $n+3$ ，則其末項為 $n+3+2\left(\frac{n-6}{4}\right) = \frac{3n}{2}$ ，又每行共有 $\frac{n}{2}$ 個相同的數，則其加號後的一般式為：

$$\frac{\left(n+3+\frac{3n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)}{2} \times \frac{n}{2} = \frac{n(5n+6)(n-2)}{32}$$

最後還要再 $\times 2$ ，所以 $n \equiv 0(mod 4)$ 時， $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤最小步數的上界為：

$$\left(\frac{(5+6)(n+2)^2}{32} + \frac{n(5n+6)(n-2)}{32}\right) \times 2 = \frac{(5n+6)(n^2+n+2)}{8}$$

6. 當 $n \equiv 2(mod 4)$ 時的下界

在求(1,6)變色在 7×7 棋盤的最小步數下界時，先將上下相鄰的按鈕次數相加，且由前述之點對稱情形，所以每一行皆須再乘2，且其數值還須加上 $n+1$ ，所以下界為 $[(4+6) \times 3 + 5 \times 4] \times 2 = 100$ 。

我們將上述式子分為兩項，分別找出其一般式，不難發現，加號前括號內的項數為 $\frac{n+2}{4}$ ，每往後一項其值會減少2，且首項為 n ，則其末項為 $n - 2\left(\frac{n-2}{4}\right) = \frac{n+2}{2}$ ，又每行共有 $\frac{n}{2}$ 個相同的數，故在加號前的式子其和的一般式為：

$$\frac{\left(n + \frac{n+2}{2}\right) \frac{n+2}{4}}{2} \times \frac{n}{2} = \frac{n(3n+2)(n+2)}{32}$$

加號後括號內的項數為 $\frac{n-2}{4}$ ，每往後一項其值會減少2，且首項為 $n-1$ ，則其末項為 $n-1 - 2\left(\frac{n-6}{4}\right) = \frac{n+4}{2}$ ，又每行共有 $\frac{n+2}{2}$ 個相同的數，故在加號後的式子其和的一般式為：

$$\frac{\left(n-1 + \frac{n+2}{2}\right) \frac{n}{4}}{2} \times \frac{n+2}{2} = \frac{3n^2(n+2)}{32}$$

最後還要再 $\times 2$ ，所以 $n \equiv 0(mod 4)$ 時， $(n+1) \times (n+1)$ 棋盤之最小步數的下界為：

$$\left(\frac{n(3n+2)(n+2)}{32} + \frac{3n^2(n+2)}{32}\right) \times 2 = \frac{(3n+2)(n+2)(n-1)}{8}$$

(五) 小結：(1, n) 變色在 $n \times n$ 棋盤最小步數的上下界：

1. 當 n 為奇數：

$$\begin{cases} \text{上界：} \frac{(n+1)^2(5n+1)}{8} \\ \text{下界：} \frac{(n+1)^2(3n-1)}{8} \end{cases}$$

2. 當 $n \equiv 0(mod 4)$

$$\begin{cases} \text{上界：} \frac{(5n^2 + 11n + 4)n}{8} \\ \text{下界：} \frac{(3n+5)n^2}{8} \end{cases}$$

3. 當 $n \equiv 2(mod 4)$

$$\begin{cases} \text{上界：} \frac{(5n+6)(n^2+n+2)}{8} \\ \text{下界：} \frac{(3n+2)(n+2)(n-1)}{8} \end{cases}$$

七、說明 (p, n) 變色在不同棋盤中解的情況

在討論 (p, n) 變色時，首先為避免對稱性重複討論，我們令 $p < n$ 。此外我們發現若 p 和 n 不互質的話，會出現如 $(2, 4)$ 、 $(3, 6)$ 等可簡化成 $(1, 2)$ 變色的情況，所以令 $(p, n) = 1$ 。

(一) 討論 $(2, n)$ 的情況

1. 說明 $(2, n)$ (n 和 2 互質)變色在 $t \times t$ ($t < n + 2$)棋盤的情況下無解

(1) t 為偶數的情況

在 t 為偶數的情況下，按鈕次數從左而右依序為 $2, n - 2, 6, n - 6, 10, n - 10 \dots$ 依序下去，到第 $t - 1$ 個按鈕將會是 $2 + 2(t - 2)$ 下，但最後一格是白色，白色格子要按 n 下才會變成黑色，而且它只能被最後一個按鈕控制，可得 $2 + 2(t - 2) \equiv n \pmod{n + 2}$ ，其中 $2 + 2(t - 2)$ 為偶數，又 n 和 2 互質，即 n 為奇數，出現矛盾，故無解。

(2) t 為奇數的情況

在 t 為奇數的情況下，按鈕次數也是從左而右依序 $2, n - 2, 6, n - 6, 10, n - 10 \dots$ 依序下去，到第 t 個按鈕將會是 $n - 2(t - 2)$ 下，而最後一格是黑色，黑色格子要按 2 下才會變成白色，而且它只能被最後一個按鈕控制，可得 $n - 2t + 4 \equiv 2 \rightarrow n \equiv 2t - 2 \pmod{n + 2}$ ，其中 $2t - 2$ 為偶數，又 n 和 2 互質，即 n 為奇數，出現矛盾，故無解。

2. 說明 $(2, n)$ (n 和 2 互質)變色在 $(n + 2) \times (n + 2)$ 的情況下有解

根據前述五(二)2.(5)，我們用相同的方法找到了 $(2, n)$ 變色在 $(n + 2) \times (n + 2)$ 的解，如下表所示(下表為 $(2, n)$ 變色在 $(n + 2) \times (n + 2)$ 棋盤的情況)。無論是 mod 多少，第一列都符合 $a_{1,n} \equiv (-1)^{n+1} \times 2n \pmod{n + 2}$ 因 $a_{1,1}$ 和 $a_{2,1}$ 共同控制 $b_{2,1}$ (白色)的變色，則 $a_{1,1} + a_{2,1} \equiv -2$ ，又 $a_{1,1}$ 、 $a_{2,1}$ 、 $a_{1,2}$ 、 $a_{2,2}$ 共同控制 $b_{2,2}$ (黑色)的變色，又 $a_{1,1} + a_{2,1} \equiv -2$ ，則 $a_{1,2} + a_{2,2} \equiv (-4) \times (-1) \equiv 4$ ，又 $a_{1,2} \equiv 1 \times -4$ ，則 $a_{2,2} \equiv (-1) \times (-4) - 1 \times (-4) \equiv (-2) \times (-4) \equiv 8$ ；因 $a_{2,1}$ 和 $a_{3,1}$ 共同控制 $b_{3,1}$ (黑色)的變色，則 $a_{2,1} + a_{3,1} \equiv 2$ ，又 $a_{2,1}$ 、 $a_{3,1}$ 、 $a_{2,2}$ 、 $a_{3,2}$ 共同控制 $b_{3,2}$ (白色)的變色，又 $a_{2,1} + a_{3,1} \equiv 2$ ，則 $a_{2,2} + a_{3,2} \equiv (-4) \times 1 \equiv -4$ ，又 $a_{1,3} \equiv 1 \times 6$ ，則 $a_{3,2} \equiv 1 \times (-4) - (-2) \times (-4) \equiv (-4) \times 3 \equiv -12$ ，可知 $a_{2,3} \equiv a_{3,2} \equiv -12$ ；因 $a_{2,2} + a_{3,2} \equiv -4$ ，又 $a_{2,2}$ 、 $a_{3,2}$ 、 $a_{2,3}$ 、 $a_{3,3}$ 共同控制 $b_{3,3}$ (黑色)的變色，又 $a_{2,2} + a_{3,2} \equiv -4$ ，則 $a_{2,3} + a_{3,3} \equiv 6 \times 1 \equiv 6$ ，又 $a_{1,3} \equiv 1 \times 6$ ，則 $a_{3,3} \equiv 2 - 8 - (-12) - (-12) \equiv 18$

$a_{1,1} \equiv 1 \times 2$ $\equiv 2$	$a_{1,2}$ $\equiv 1 \times (-4)$ $\equiv -4$	$a_{1,3} \equiv 1 \times 6$ $\equiv 6$	$a_{1,4}$ $\equiv 1 \times (-8)$ $\equiv -8$	$a_{1,5}$ $\equiv 1 \times 10$ $\equiv 10$	...	$a_{1,n}$ $\equiv (-1)^{n+1}$ $\times 2n$
$a_{2,1}$ $\equiv -2 \times 2$ $\equiv -4$	$a_{2,2}$ $\equiv (-2)(-4)$ $\equiv 8$	$a_{2,3}$ $\equiv (-2) \times 6$ $\equiv -12$	$a_{2,4}$ $\equiv -2$ $\times (-8)$ $\equiv 16$	$a_{2,5}$ $\equiv -2 \times 10$ $\equiv -20$		$a_{2,n}$ $\equiv -2 \times a_{1,n}$
$a_{3,1}$ $\equiv 3 \times 2$ $\equiv 6$	$a_{3,2}$ $\equiv 3 \times (-4)$ $\equiv -12$	$a_{3,3} \equiv 3 \times 6$ $\equiv 18$	$a_{3,4}$ $\equiv 3 \times (-8)$ $\equiv -24$	$a_{3,5}$ $\equiv 3 \times 10$ $\equiv 30$		$a_{3,n} \equiv 3 \times a_{1,n}$
$a_{4,1}$ $\equiv -4 \times 2$ $\equiv -8$	$a_{4,2}$ $\equiv (-4)(-4)$ $\equiv 16$	$a_{4,3}$ $\equiv (-4) \times 6$ $\equiv -24$	$a_{4,4}$ $\equiv -4$ $\times (-8)$ $\equiv 32$	$a_{4,5}$ $\equiv -4 \times 10$ $\equiv -40$		$a_{4,n}$ $\equiv -4 \times a_{1,n}$
$a_{5,1}$ $\equiv 5 \times 2$ $\equiv 10$	$a_{5,2}$ $\equiv 5 \times (-4)$ $\equiv -20$	$a_{5,3} \equiv 5 \times 6$ $\equiv 30$	$a_{5,4}$ $\equiv 5 \times (-8)$ $\equiv -40$	$a_{5,5}$ $\equiv 5 \times 10$ $\equiv 50$		$a_{5,n} \equiv 5 \times a_{1,n}$
$a_{6,1}$ $\equiv -6 \times 2$ $\equiv -12$	$a_{6,2}$ $\equiv (-6)(-4)$ $\equiv 24$	$a_{6,3}$ $\equiv (-6) \times 6$ $\equiv -36$	$a_{6,4}$ $\equiv -6$ $\times (-8)$ $\equiv 48$	$a_{6,5}$ $\equiv -6 \times 10$ $\equiv -60$		$a_{6,n}$ $\equiv -6 \times a_{1,n}$
...					...	...
$a_{n,1}$ $\equiv (-1)^{n+1}$ $\times 2n$	$a_{n,2}$ $\equiv a_{n,1}(-4)$	$a_{n,3}$ $\equiv a_{n,1} \times 6$	$a_{n,4}$ $\equiv a_{n,1}$ $\times (-8)$	$a_{n,5}$ $\equiv a_{n,1} \times 10$	...	$a_{n,n}$ $\equiv a_{n,1} \times a_{1,n}$

3. 說明 $(2, n)$, $(n$ 和 2 互質)變色在 $(n+2)k \times (n+2)k$ 的情況下有解

因 $(n+2)k \times (n+2)k = k^2[(n+2) \times (n+2)]$ ，故我們可將其視為 k^2 個 $(n+2) \times (n+2)$ 棋盤(一部分左上角為黑色，一部分左上角是白色)，前述已證明 $(n+2) \times (n+2)$ 棋盤有解(左上角黑色)，由同餘關係亦可知左上角白色之 $(n+2) \times (n+2)$ 棋盤有解，因此可知 $(2, n)$ 變色在 $(n+2)k \times (n+2)k$ 棋盤中有解。

4. $[(n+2)k+1] \times [(n+2)k+1] \sim [(n+2)k+(n+1)] \times [(n+2)k+(n+1)]$ 棋盤無解

由於僅第一列按鈕可控制第一列的棋盤，因此只須說明第一列按鈕無法使第一列方格成功變色即可，所以我們將第一列方格拆開為 $(n+2)k$ 格與 t 格($t = 1 \sim n+1$)，且因 $(n+2)k$ 有解， $1 \sim n+1$ 無解，所以 $[(n+2)k+t] \times [(n+2)k+t]$, ($t = 1 \sim n+1$)棋盤無解。

(二) 討論 (p, n) 的情況，其中 $p < n$ ， $(p, n) = 1$

1. 說明 (p, n) (n 和 p 互質)變色在 $t \times t$ ($t < n + p$)棋盤的情況下無解

經過分析以後，我們發現在任何狀況下，第一列的步數的規律會變成：

$$\begin{cases} \text{當 } t \text{ 是奇數時，第 } t \text{ 格的左下方按鈕次數為 } -(t-1)p \\ \text{當 } t \text{ 是偶數時，第 } t \text{ 格的左下方按鈕次數為 } (t-1)p \end{cases}$$

(1) t 為偶數的情況

在 t 為偶數， $n + p$ 是奇數的情況下，因為 $t < n + p$ ，所以最接近 $n + p$ 的偶數格為 $t = n + p - 1$ ，利用公式可得此按鈕的步數為 $(n + p - 1 - 1)p$ 下，也就是 $(n + p)p - 2p$ 必須同餘 n ，即 $(n + p)p - 2p \equiv n \pmod{n + p} \rightarrow -2p \equiv n \rightarrow 2n \equiv n \rightarrow n \equiv 0 \pmod{n + p}$ ，與 $p < n$ ， $(p, n) = 1$ 矛盾，故無解。依此類推，更向前的偶數格會依序減 $2p$ 次，分別得到 $2n \equiv n$ 、 $4n \equiv n$ 、 $6n \equiv n \cdots$ ，皆是矛盾的，因此此狀況下的所有棋盤都無解。

在 t 為偶數， $n + p$ 也是偶數的情況下，因為 $t < n + p$ ，所以最接近 $n + p$ 的偶數格為 $t = n + p - 2$ ，利用公式可得此按鈕的步數為 $(n + p - 2 - 1)p$ 下，也就是 $(n + p)p - 3p$ 必須同餘 n ，即 $(n + p)p - 3p \equiv n \rightarrow -3p \equiv n \rightarrow 3n \equiv n \rightarrow 2n \equiv 0 \pmod{n + p}$ ，與 $p < n$ ， $(p, n) = 1$ 矛盾，故無解。依此類推，向前的偶數格會依序減 $2p$ 次，分別得到 $3n \equiv n$ 、 $5n \equiv n$ 、 $7n \equiv n \cdots$ ，皆是矛盾的，因此此狀況下的所有棋盤都無解。

(2) t 為奇數的情況

在 t 為奇數， $n + p$ 也是奇數的情況下，因為 $t < n + p$ ，所以最接近 $n + p$ 的奇數格為 $n + p - 2$ ，利用公式可得此按鈕的步數為 $-(n + p - 2 - 1)p$ 下，也就是 $-(n + p)p + 3p$ ，必須同餘 p ，即 $-(n + p)p + 3p \equiv p \rightarrow 3p \equiv p \rightarrow 2p \equiv 0 \pmod{n + p}$ ，與 $p < n$ ， $(p, n) = 1$ 矛盾，故無解。依此類推，向前的偶數格會依序增加 $2p$ 次，分別得到 $3p \equiv p$ 、 $5p \equiv p$ 、 $7p \equiv p \cdots$ ，皆是矛盾的，因此此狀況下的所有棋盤都無解。

在 t 為奇數， $n + p$ 是偶數的情況下，因為 $t < n + p$ ，所以最接近 $n + p$ 的奇數格為 $n + p - 1$ ，利用公式可得此按鈕的步數為 $-(n + p - 1 - 1)p$ 下，也就是 $-(n + p)p + 2p$ ，必須同餘 p ，即 $-(n + p)p + 2p \equiv p \rightarrow 2p \equiv p \rightarrow p \equiv 0 \pmod{n + p}$ ，與 $p < n$ ， $(p, n) = 1$ 矛盾，故無解。依此類推，向前的偶數格會依序增加 $2p$ 次，分別得到 $2p \equiv p$ 、 $4p \equiv p$ 、 $6p \equiv p \cdots$ ，皆是矛盾的，因此此狀況下的所有棋盤都無解。

2. 說明 (p, n) (n 和 p 互質)變色在 $(n + p) \times (n + p)$ 的情況下有解

根據前述七(一)2，我們用相同的方法歸納出了 (p, n) 變色在 $(n + p) \times (n + p)$ 的解，如下表

所示(下表為 (p, n) 變色在 $(n + p) \times (n + p)$ 棋盤的情況)。無論是 mod 多少，第一列都符合

$a_{1,n} \equiv (-1)^{n+1} \times pn \pmod{n + p}$ 因 $a_{1,1}$ 和 $a_{2,1}$ 共同控制 $b_{2,1}$ (白色)的變色，則 $a_{1,1} + a_{2,1} \equiv$

$-p$ ，又 $a_{1,1}$ 、 $a_{2,1}$ 、 $a_{1,2}$ 、 $a_{2,2}$ 共同控制 $b_{2,2}$ (黑色)的變色，又 $a_{1,1} + a_{2,1} \equiv -p$ ，則 $a_{1,2} +$

$a_{2,2} \equiv (-2p) \times (-1) \equiv 2p$ ，又 $a_{1,2} \equiv 1 \times -2p$ ，則 $a_{2,2} \equiv (-1) \times (-2p) - 1 \times (-2p) \equiv$

$(-2) \times (-2p) \equiv 4p$ ；因 $a_{2,1}$ 和 $a_{3,1}$ 共同控制 $b_{3,1}$ (黑色)的變色，則 $a_{2,1} + a_{3,1} \equiv p$ ，又 $a_{2,1}$ 、

$a_{3,1}$ 、 $a_{2,2}$ 、 $a_{3,2}$ 共同控制 $b_{3,2}$ (白色)的變色，又 $a_{2,1} + a_{3,1} \equiv p$ ，則 $a_{2,2} + a_{3,2} \equiv (-2p) \times 1 \equiv$

$-2p$ ，又 $a_{1,3} \equiv 1 \times 3p$ ，則 $a_{3,2} \equiv 1 \times (-2p) - (-2) \times (-2p) \equiv (-2p) \times 3 \equiv -6p$ ，可知

$a_{2,3} \equiv a_{3,2} \equiv -6p$ ；因 $a_{2,2} + a_{3,2} \equiv -2p$ ，又 $a_{2,2}$ 、 $a_{3,2}$ 、 $a_{2,3}$ 、 $a_{3,3}$ 共同控制 $b_{3,3}$ (黑色)的變

色，又 $a_{2,2} + a_{3,2} \equiv -2p$ ，則 $a_{2,3} + a_{3,3} \equiv 3p \times 1 \equiv 3p$ ，又 $a_{1,3} \equiv 1 \times 3p$ ，則 $a_{3,3} \equiv p - 4p -$

$(-6p) - (-6p) \equiv 9p$

$a_{1,1}$ $\equiv 1 \times p$ $\equiv p$	$a_{1,2}$ $\equiv 1 \times (-2p)$ $\equiv -2p$	$a_{1,3} \equiv 1 \times 3p$ $\equiv 3p$	$a_{1,4}$ $\equiv 1$ $\times (-4p)$ $\equiv -4p$	$a_{1,5}$ $\equiv 1 \times 5p$ $\equiv 5p$	...	$a_{1,n}$ $\equiv (-1)^{n+p-1}$ $\times np$
$a_{2,1}$ $\equiv -2 \times p$ $\equiv -2p$	$a_{2,2}$ $\equiv (-2)(-2p)$ $\equiv 4p$	$a_{2,3}$ $\equiv (-2) \times 3p$ $\equiv -6p$	$a_{2,4}$ $\equiv -2$ $\times (-4p)$ $\equiv 8p$	$a_{2,5}$ $\equiv -2 \times 5p$ $\equiv -10p$		$a_{2,n}$ $\equiv -2 \times a_{1,n}$
$a_{3,1}$ $\equiv 3 \times p$ $\equiv 3p$	$a_{3,2}$ $\equiv 3 \times (-2p)$ $\equiv -6p$	$a_{3,3} \equiv 3 \times 3p$ $\equiv 9p$	$a_{3,4}$ $\equiv 3 \times (-4p)$ $\equiv -12p$	$a_{3,5}$ $\equiv 3 \times 5p$ $\equiv 15p$		$a_{3,n}$ $\equiv 3 \times a_{1,n}$
$a_{4,1}$ $\equiv -4 \times p$ $\equiv -4p$	$a_{4,2}$ $\equiv (-4)(-2p)$ $\equiv 8p$	$a_{4,3}$ $\equiv (-4) \times 3p$ $\equiv -12p$	$a_{4,4}$ $\equiv -4$ $\times (-4p)$ $\equiv 16p$	$a_{4,5}$ $\equiv -4 \times 5p$ $\equiv -20p$		$a_{4,n}$ $\equiv -4 \times a_{1,n}$
$a_{5,1}$ $\equiv 5 \times p$ $\equiv 5p$	$a_{5,2}$ $\equiv 5 \times (-2p)$ $\equiv -10p$	$a_{5,3} \equiv 5 \times 3p$ $\equiv 15p$	$a_{5,4}$ $\equiv 5 \times (-4p)$ $\equiv -20p$	$a_{5,5}$ $\equiv 5 \times 5p$ $\equiv 25p$		$a_{5,n}$ $\equiv 5 \times a_{1,n}$

$a_{6,1}$ $\equiv -6 \times p$ $\equiv -6p$	$a_{6,2}$ $\equiv (-6)(-2p)$ $\equiv 12p$	$a_{6,3}$ $\equiv (-6) \times 3p$ $\equiv -18p$	$a_{6,4}$ $\equiv -6$ $\times (-4p)$ $\equiv 24p$	$a_{6,5}$ $\equiv -6 \times 5p$ $\equiv -30p$		$a_{6,n}$ $\equiv -6 \times a_{1,n}$
...						...
$a_{n,1}$ $\equiv (-1)^{n+p-1}$ $\times pn$	$a_{n,2}$ $\equiv a_{n,1}(-2p)$	$a_{n,3}$ $\equiv a_{n,1} \times 3p$	$a_{n,4}$ $\equiv a_{n,1}$ $\times -4p$	$a_{n,5}$ $\equiv a_{n,1} \times 5p$	...	$a_{n,n}$ $\equiv a_{n,1} \times a_{1,n}$

3. 說明 (p, n) , $(n$ 和 p 互質, $p < n)$ 變色在 $(n+p)k \times (n+p)k$ 的情況下有解

因 $(n+p)k \times (n+p)k = k^2[(n+p) \times (n+p)]$ ，故我們可將其視為 k^2 個 $(n+p) \times (n+p)$ 棋盤(一部分左上角為黑色，一部分左上角是白色)，前述已證明 $(n+p) \times (n+p)$ 棋盤有解(左上角黑色)，由同餘關係亦可知左上角白色之 $(n+p) \times (n+p)$ 棋盤有解，因此可知 (p, n) 變色在 $(n+p)k \times (n+p)k$ 棋盤中有解。

4. $[(n+p)k+1] \times [(n+p)k+1] \sim [(n+p)k+(n+p-1)] \times [(n+p)k+(n+p-1)]$ 棋盤無解

由於僅第一列按鈕可控制第一列的棋盤，因此只須說明第一列按鈕無法使第一列方格成功變色即可，所以我們將第一列方格拆開為 $(n+p)k$ 格與 t 格($t = 1 \sim n+p-1$)，且因 $(n+p)k$ 有解， $1 \sim n+p-1$ 無解，所以 $[(n+p)k+t] \times [(n+p)k+t]$, ($t = 1 \sim n+p-1$)棋盤無解。

(三)小結

1. (p, n) 變色($(p, n) = 1, p < n$)在 $t \times t$ 棋盤(其中 $0 < t < n+p$)無解
2. (p, n) 變色($(p, n) = 1, p < n$)僅在 $(n+p) \times (n+p)$ 的倍數棋盤中有解

伍、 結論

一、於 $(1,2)$ 變色時的解：

1. 3×3 棋盤有解，且其最小步數為4步。
2. 除 $3n \times 3n$ 棋盤外皆無解。

二、於 $(1,n)$ 變色時的解：

1. 當 $t < n + 1$ 時， $t \times t$ 棋盤無解。
2. 僅 $(n + 1)k \times (n + 1)k$ 棋盤有解。
3. $(1,n)$ 變色在 $(n + 1) \times (n + 1)$ 棋盤中的解為

$$\begin{cases} \text{第一列：} a_{1,n} \equiv (-1)^n \times n \pmod{n + 1} \\ \text{第一行：} a_{n,1} \equiv (-1)^n \times n \pmod{n + 1} \\ \text{其餘按鈕：} a_{m,l} \equiv a_{m,1} \times a_{1,l} \end{cases}$$

三、 $(1,n)$ 變色時的步數上下界：

1. 當 n 為奇數：

$$\begin{cases} \text{上界為} \frac{(n + 1)^2(5n + 1)}{8} \\ \text{下界為} \frac{(n + 1)^2(3n - 1)}{8} \end{cases}$$

2. 當 $n \equiv 0 \pmod{4}$ ：

$$\begin{cases} \text{上界為} \frac{(5n^2 + 11n + 4)n}{8} \\ \text{下界為} \frac{(3n + 5)n^2}{8} \end{cases}$$

3. 當 $n \equiv 2 \pmod{4}$ ：

$$\begin{cases} \text{上界為} \frac{(5n + 6)(n^2 + n + 2)}{8} \\ \text{下界為} \frac{(3n + 2)(n + 2)(n - 1)}{8} \end{cases}$$

四、於 (p, n) 變色(其中 $(p, n) = 1, p < n$)時的解：

1. 當 $t < n + p$ 時， $t \times t$ 棋盤無解。
2. 僅 $(n + p)k \times (n + p)k$ 棋盤有解。
3. (p, n) 變色在 $(n + p) \times (n + p)$ 棋盤中的解為

$$\begin{cases} \text{第一列：} a_{1,n} \equiv (-1)^{n+1} \times pn \pmod{n+p} \\ \text{第一行：} a_{n,1} \equiv (-1)^{n+1} \times pn \pmod{n+p} \\ \text{其餘按鈕：} a_{m,l} \equiv a_{m,1} \times a_{1,l} \end{cases}$$

陸、 未來展望

此次的研究中，我們成功找出不同變色，在不同正方形棋盤當中的有解情況，並且也討論出了其中的一組解，但在將解轉為餘數上我們沒有找到合適的方法，因此在最小步數上以找出上下界取代，未來希望可以持續研究找出最小步數的一般化結果。此外我們在 $3 \times 3 \times 3$ 的立方體(一樣黑白相間)，也嘗試了(1,2)變色的按法(以 $2 \times 2 \times 2$ 的立方體為單位變色)，結果是可行的，因此未來亦可將其推廣至立方體中進行研究。

柒、 參考資料

一、同餘的基本概念：

<https://reurl.cc/W0Dpqe>

二、台灣科教館科學雙月刊 63-06，森棚教官數學題

<https://reurl.cc/ae16RQ>

三、許志農 高中數學 2 龍騰版 單元(1)(2)