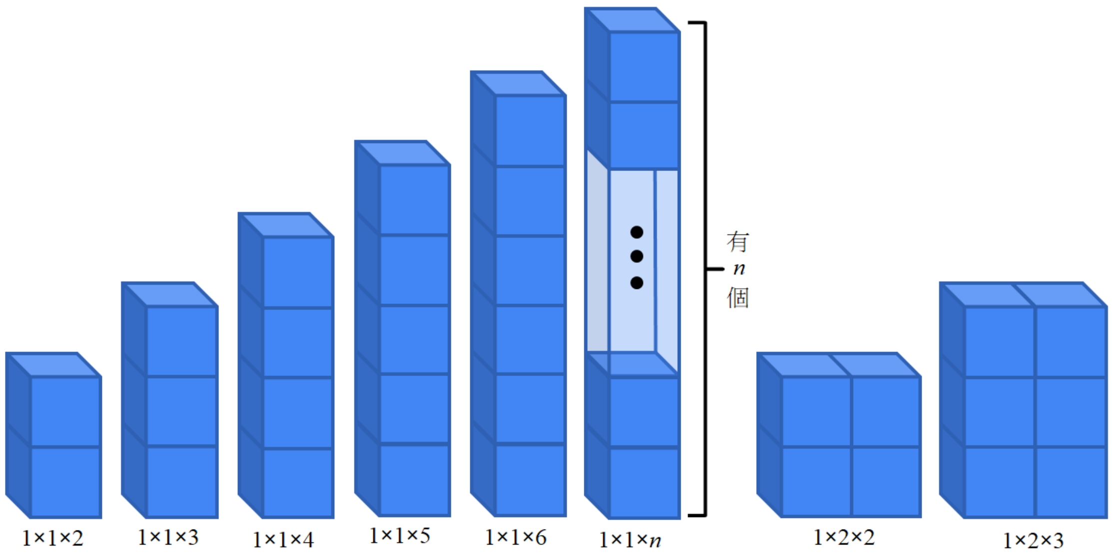
花蓮縣第 62 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書



科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：變形積木滾動中

關 鍵 詞： 滾動積木、最小移動步數

編 號：

目錄

摘要

滾動積木遊戲是將一塊 1×1×2 尺寸的積木從起點經過立、倒、滾等動作移動至終點的遊戲，而本篇作品主要研究的問題是

1×1×n 積木在滾動積木遊戲中的移動規則為何？

為了解決此問題，我們先分別找出 1×1×3、1×1×4、1×1×5、1×1×6 各積木尺寸在這個遊戲中的有解、無解狀態，以及在各種地圖中（即橫列地圖、一倒一立方形地圖和最小有解矩形地圖）的移動走法、最小步數等相關規律，進行一系列的分析與討論，統整找出 1×1×n 積木在地圖中的移動性質。

在本篇後段的討論，我們還分析 1×2×2、1×2×3 積木的移動狀態，期許未來可以找到任意積木尺寸的遊戲解法。

壹、前言

一、研究動機

參觀昌爸工作坊裡的遊戲，發現滾動積木很有趣，利用上、下、左、右控制方向，倒、滾、立使積木移動，雖然沒有很難，但還是需要一些邏輯還有技巧來破關，因此我們決定要破解這套遊戲的公式和解法。將原本遊戲中 1×1×2 的積木尺寸換成 1×1×3、1×1×4、1×1×5、1×1×6…1×1×n，並探討在這些積木尺寸中，地圖有解、無解的變化情況及走法，並從其中找出規律、共通點。

二、研究目的

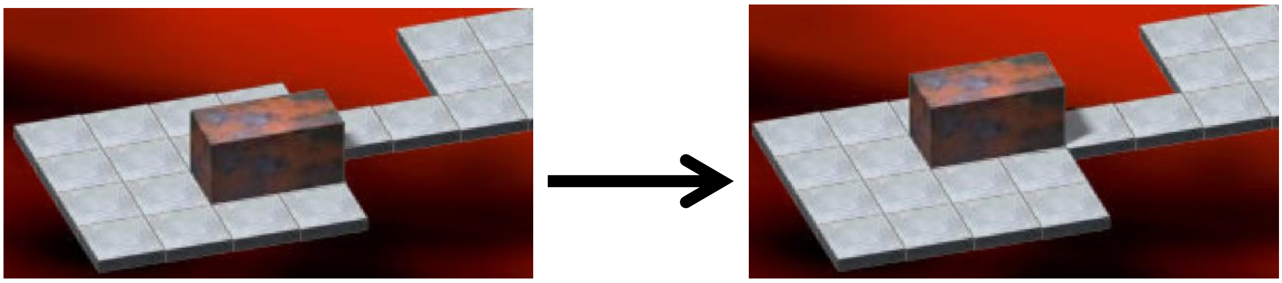
1. 探討滾動積木在地圖有解及無解狀態。
2. 研究不同尺寸的積木和各地圖間變化及規律。
3. 研究不同尺寸的積木和各地圖移動最少步數。

三、滾積木遊戲介紹

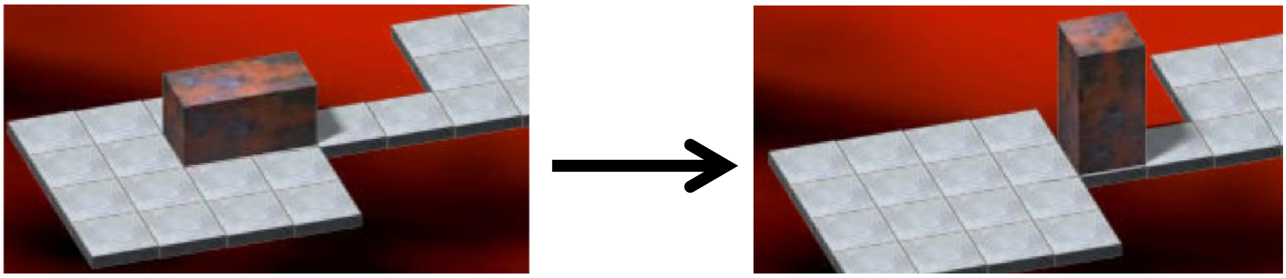
長寬高分別為 1×1×2 積木在各關卡地圖中，利用倒下、翻滾、站立三種移動方式從起點抵達終點即可過關，但在移動的過程中，若是移動方向會使積木超出地圖範圍則視為出局。

倒：將立的積木向右倒。

滾：將躺下的積木向上翻滾。



立：將倒下的積木向右立起。



四、文獻回顧

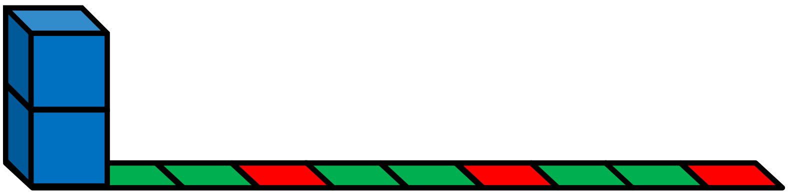
我們參考第 55 屆數學科展的作品說明書-滾積木遊戲探討的研究，分析其研究過程與結果，將重點資料整理成以下 5 點：

（一）有解？無解：

有解意指積木可以從起點抵達的方格之處，我們稱為**有解區塊**；無解便是指起點無法移動到的方格之處，我們稱為**無解區塊**。從研究中發現無解的情況主要因為地圖尺寸不夠，使積木沒有足夠移動空間。

（二）若地圖不夠寬

從研究中發現，地圖不夠寬時，積木只能往橫向做立和倒的動作，一倒一立共為三格（倒：2 格＋立：1 格），推導出積木能立的終點必在 $3x+1$（x 為正整數）之方格處。如圖中 $1\times1\times2$ 積木在地圖只有一列時，只能站立在紅色部分的格子，綠色方格為無解區。



（三）3×3 尺寸的方形地圖

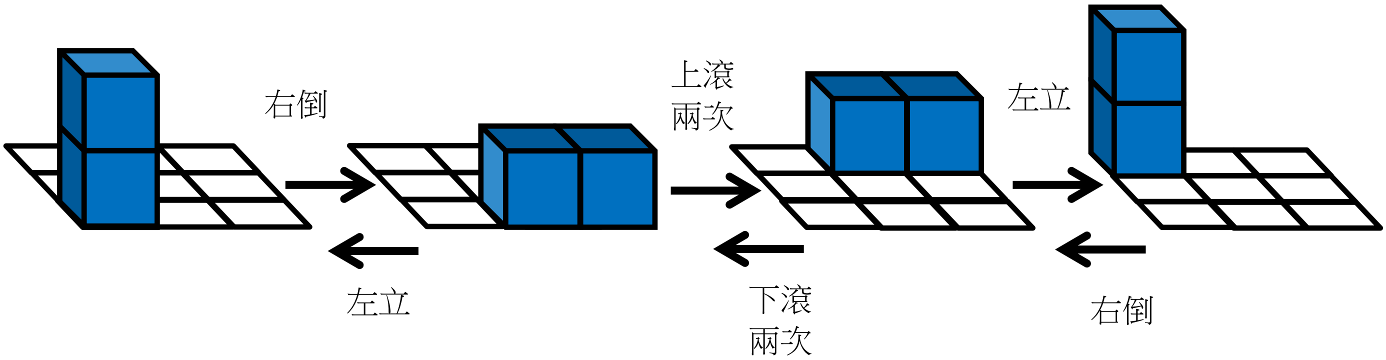
從研究中發現，對 1×1×2 積木來說地圖**長**和**寬**皆必須大於二才能有不同於橫列地圖的解，即解的位子不只在 3x+1 處的方格。但在這樣的地圖中，無法從起點處抵達中心方格。

	無解	
起點		

（四）兩點的互通性

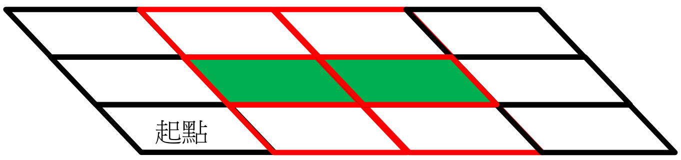
從研究中發現，對地圖上任意相異的 A、B 兩點來說，若 A 點可到達 B 點，則 B 點也可用相同路徑逆推回去，可得 若 A→B，則 B→A，也就是 A↔B。同樣，若 A 點用最小路徑抵達 B 點，則 B 點也可用相同最小路徑逆推回 A 點，便可再得

$$\text{若 } A \xrightarrow{min} B\text{，則 } B \xrightarrow{min} A\text{ ，也就是 } A \xleftrightarrow{min} B$$



（五）每一個方格都有解的最小矩形地圖

在這篇研究中，1×1×2 積木的最小有解矩形地圖尺寸為 4×3，可視為兩塊 3×3 尺寸的方形地圖堆疊，使得原無解區塊，藉由有解區塊的堆疊變為有解。



綠色區塊為原無解區塊

紅色框線為重疊部分

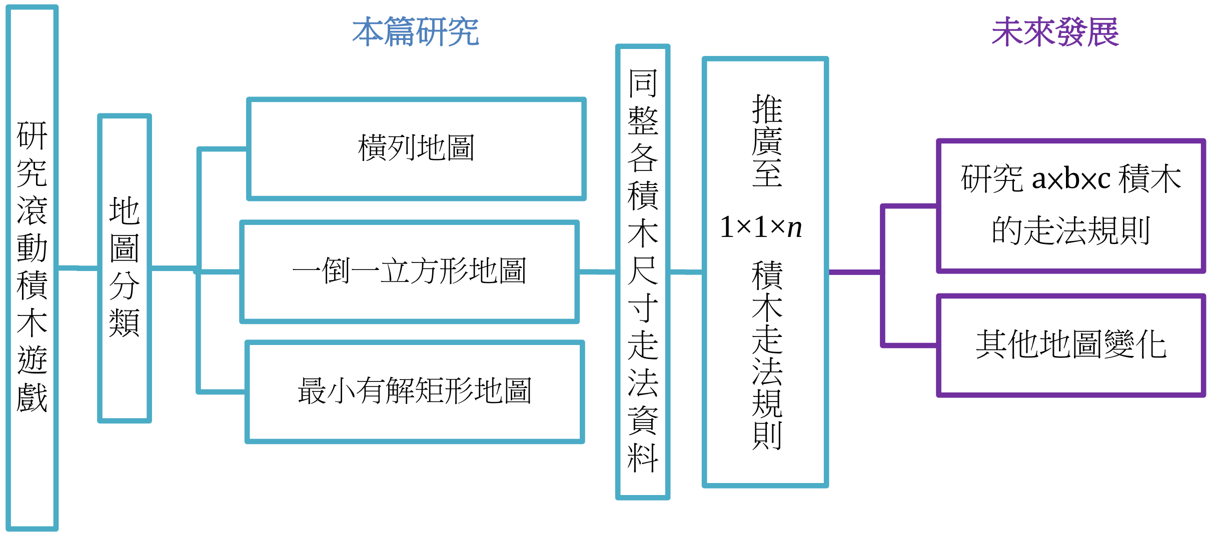
同理，任意大於 4×3 尺寸的地圖也可視為由若干 4×3 地圖所組成，因此若 m×n 地圖大於 4×3，怎 m×n 必為皆有解地圖。

貳、研究設備及器材

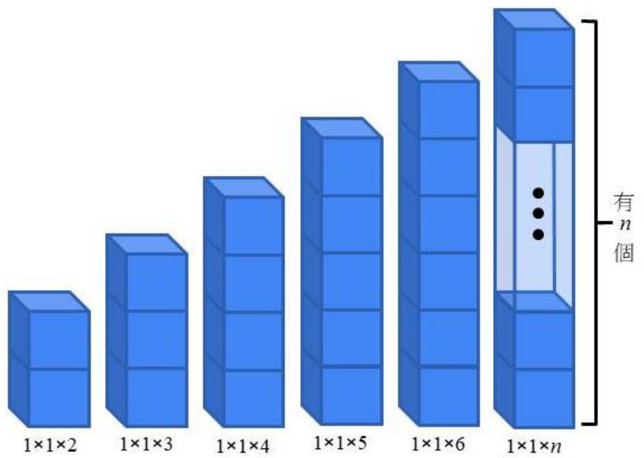
紙、筆、PowerPoint、電腦

參、研究過程或方法

一、 研究架構圖

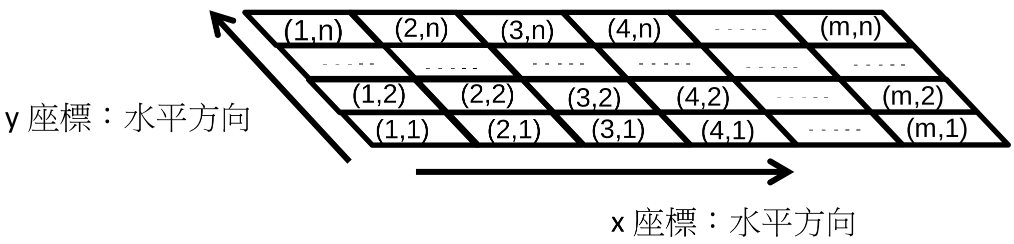


滾積木遊戲原本是以 1×1×2 積木來進行遊戲，不過我們將積木尺寸變成 1×1×3、1×1×4、1×1×5、1×1×6…1×1×n，規則與原本遊戲一樣，以倒、立、滾，前、後、左、右的方式控制積木，將積木立於終點，即可過關。



二、名詞定義

我們將 m×n 矩形地圖座標化如圖



動作介紹

動作	右	左	上	下
倒（Pour）	P_x：積木向右倒	P_{-x}：積木向左倒	P_y：積木向上倒	P_{-y}：積木向下倒
滾（Roll）	R_x：積木向右滾	R_{-x}：積木向左滾	R_y：積木向上滾	$\mathrm{R_{-y}}$：積木向下滾
立（Stand）	S_x：積木向右立	$\mathrm{S_{-x}}$：積木向左立	S_y：積木向上立	S_{-y}：積木向下立

起點 H（head）

因為研究內容須探討不同區塊地圖間的問題，因此我們定義不同區塊地圖的表示方式為：

若有兩個區塊的地圖以 A 區和 B 區表示時

HA (head-A)：A 區的起點；HB (head-B)：B 區的起點

而各區相同對應點 (x, y) 以 A(x, y) 表示來自 A 區地圖；B(x,y) 表示來自地圖 B 區。

地圖種類：

1. **橫列地圖：地圖列數低於積木高數時**
2. **一倒一立之方形地圖：地圖的長寬只能使積木作一組橫向或縱向一倒一立動作。**
3. **最小有解方形地圖：地圖上除起點外的任意點皆為有解方格。**

三、1×1×3 積木在地圖中的各種表現

我們作品中仿照 55 屆滾動積木遊戲探討作品說明書中的研究架構，並改以 1×1×3 積木研究在各種地圖的走法變化，並**以自己的觀點重新表述其中的原因**，最後在研究 1×1×4、1×1×5、1×1×6 等尺寸的積木在各種地圖的變化後，推導出 1×1×*n* 積木地圖走法的變化與通式。

對於 1×1×3 積木我們發現下列結果：

(一) 在橫列地圖時：

發現一：地圖列數低於積木高數時，終點必在橫向 4*x*+1。

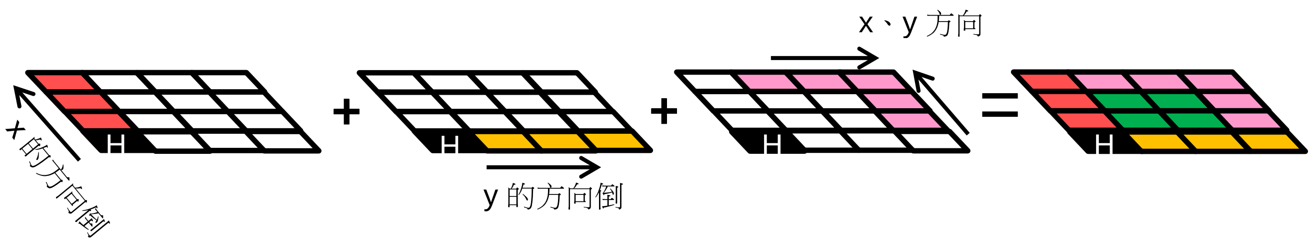
在地圖只有一排的情況下，積木不行滾，只能**倒和立**，所以積木能立的終點為 4*x*+1，四的意思是積木本身的高度三格加上起點一格，其中 *x* 為正整數；在地圖有兩排的情況下，

積木雖然可以上下滾，但因矩形不夠寬，無法向上倒的原因下，其終點仍在相同位置（橫座標）上，在地圖有三排的情況下還是同理，其終點必在 $4x+1$ 之處，直至有四排，積木可向上倒時，終點位置才能有其他變化。

(二) 在一倒一立的方形地圖時

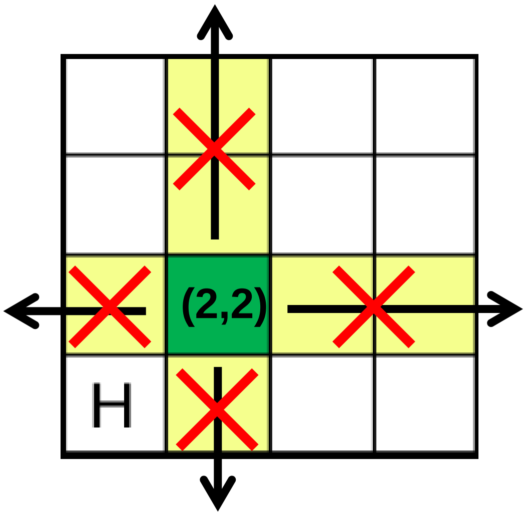
發現二：積木在一倒一立的方形地圖之無解情況，其無解方格數為 2^2。

為了讓積木可以向 x 軸與 y 軸方向倒，矩形必須夠寬、夠長，所以地圖尺寸的長寬至少需要四格，即一倒（3 格）一立（1 格）共四格，因此特別研究 4×4 的方形地圖，讓積木可以往地圖兩邊作橫向及縱向的一組一倒一立的移動，其走法情形如下：（黑色部分為起點）

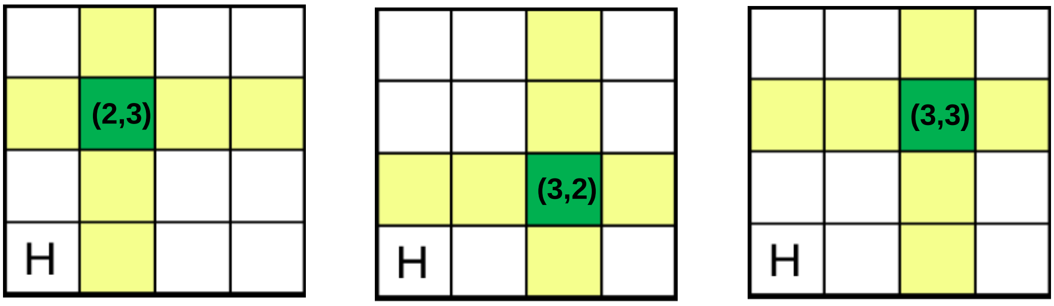


但在這樣地圖中我們發現有四個方格為無解方格。

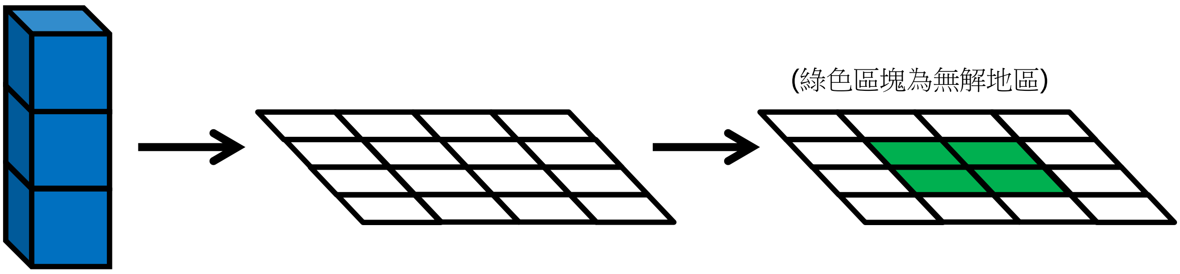
無解原因的探討以（2,2）為例，在它周圍上下左右的方格皆小於三格，此時積木無法往任何方向移動，不能從（2,2）回到起點，因此（2,2）為無解區塊，同理（2,3）、（3,2）、（3,3）亦為無解區塊。



若往向P_x、P_{-x}、P_y、P_{-y}方向倒，積木會超出地圖外，視為出局。



(綠色區塊為無解地區)



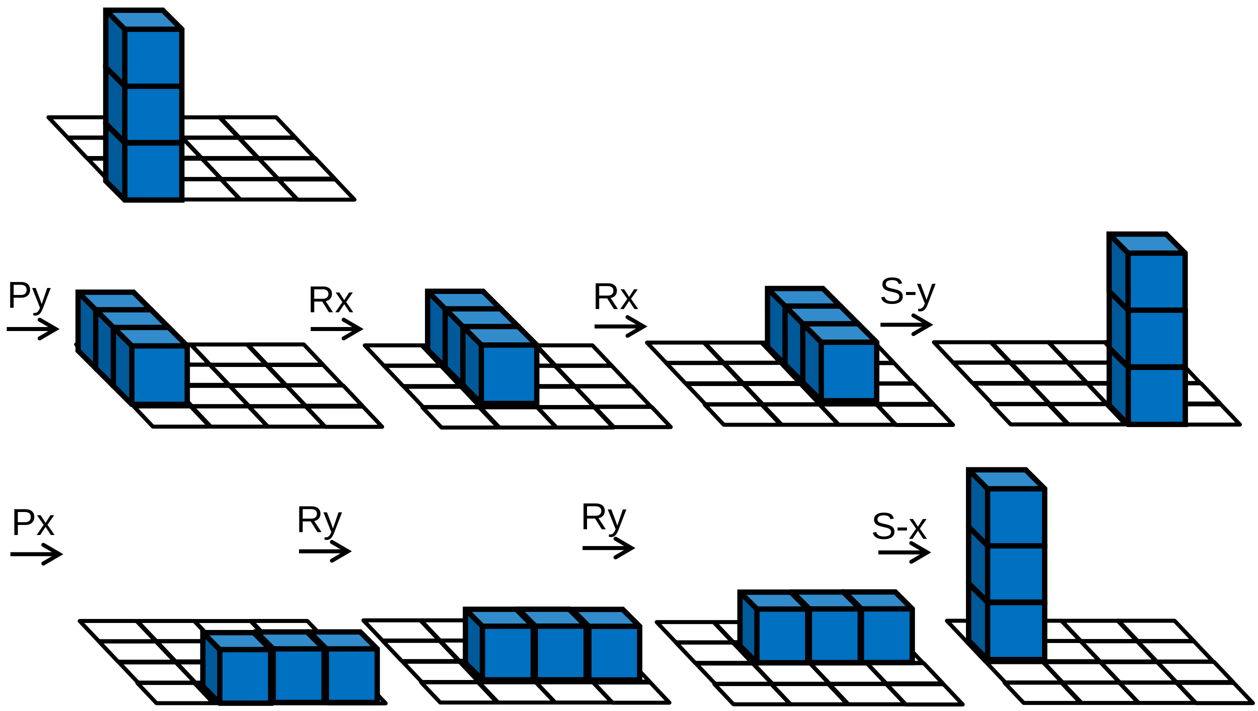
所以 1×1×3 積木的一倒一立方形地圖中，無解區塊尺寸為2^2。

(三) 起點 (1,1)到 (*x*, *y*) 與 (*y*, *x*) 的走法比較：

發現三：以 (1,1) 為起點，(*x*, *y*) 與 (*y*, *x*) 走法具對稱性且步數相同，其中 $x \neq y$ 。

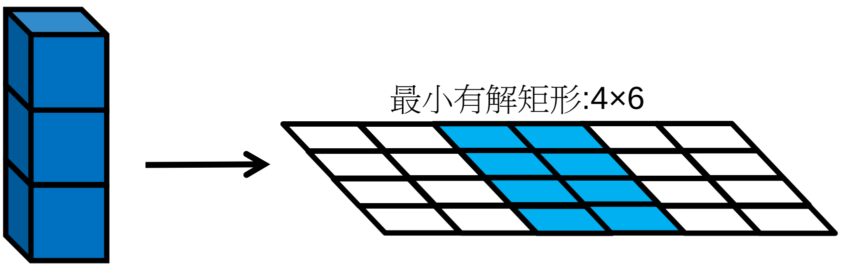
以(1,1)為起點分別移動到點(*x*, *y*) 與點(*y*, *x*) 走法具有對稱性且步數相同。例如：

從 (1, 1) 到 (3, 1) 走法依序為P_y, $2R_x$, S_{-y}；從 (1, 1) 到 (1, 3) 走法依序為P_x, $2R_y$, S_{-x}。

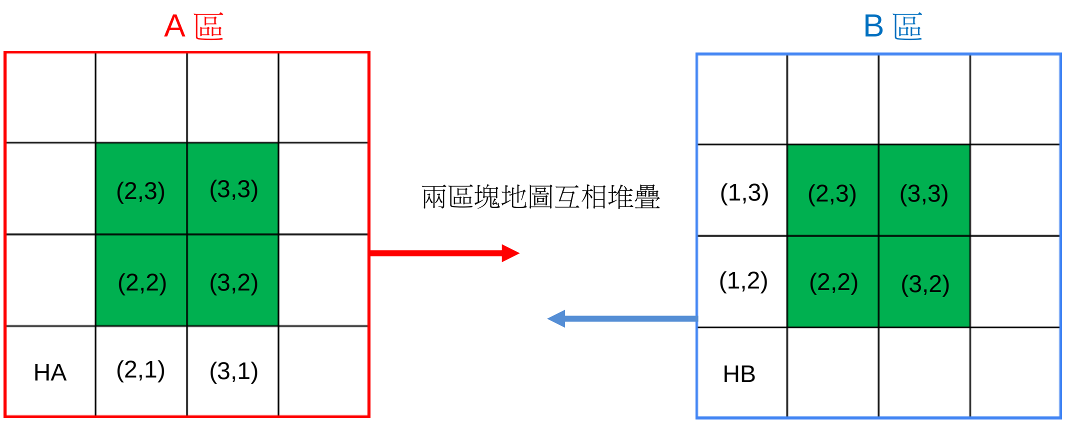


(四) 最小有解矩形地圖

發現四：最小皆有解矩形地圖尺吋為 4×6。



最小皆有解矩形的地圖是由兩塊一倒一立方形地圖所組成，其可組成的原因說明如下：下圖中兩塊一倒一地方形地圖分別為 A 區和 B 區。而兩區對應的（2,2）、（2,3）、（3,2）、（3,3）皆為無解方格，以綠色區塊表示。

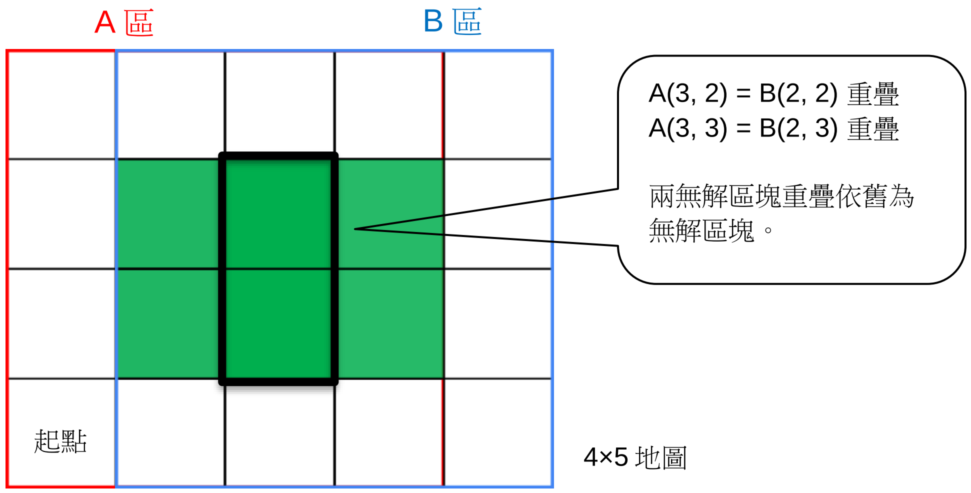


當兩區塊地圖開始堆疊成 4×5 地圖時，中間有三行區塊重疊，已經是有解區塊的地圖不論如何被覆蓋，各區起點皆可抵達，但若是**原無解區塊被有解區塊覆蓋，則原無解區塊會變為有解區塊**。

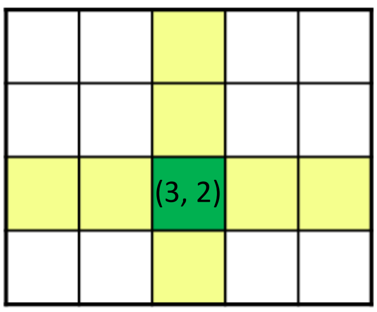
$$\mathbf{HA \to A(2,1) = HB \to B(1,2) = A(2,2)}$$

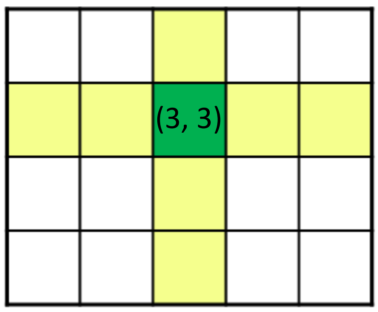
因此可得$\mathrm{HA} \to \mathrm{A}(2,2)$，原 A 區的無解區塊 A(2, 2) 變為有解。

同理， A(2, 3)、B(3, 2) 及 B(3, 3) 重無解區塊因與有解重疊而變為有解區塊。
不過在 4×5 的地圖中，A 區中 A(3, 2)、A(3, 3) 和 B 區中 B(2, 2)、B(2, 3) 兩區的無解區塊重疊，仍為無解方格，皆無法從起點抵達，故不能當作終點處，如附圖所示。



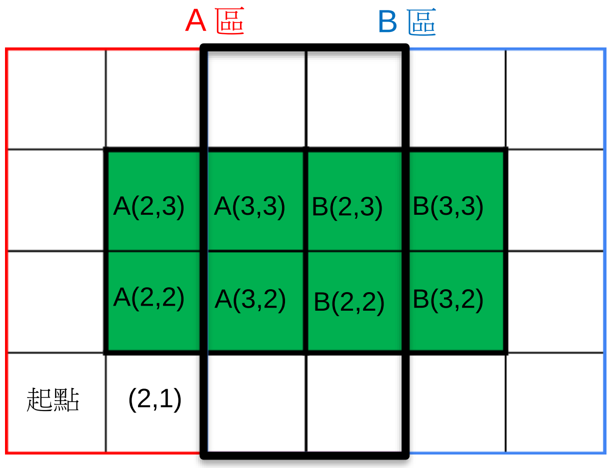
另外我們亦可以借用在前段所討論一倒一立地圖中無解區塊的原因來解釋 4×5 地圖形況，如附圖：





1×1×3 的積木一倒一立總共需要四格（包含自身站立方格），若矩形不夠常不夠寬則無法從所立之處返回起點，自然起點也無法抵達該點，故為無解區塊。

因此在把堆疊處往後移一格，即只重疊兩行，此時地圖尺寸為 4×6，我們發現為最小皆有解的矩形地圖，即地圖上任一格皆可抵達起點處。



最小皆有解 4×6 地圖

先論重疊兩行中的原兩區無解區塊，因為 A(3,2)和 A(3,3)與 B 區有解區塊重疊，故自然從無解變為有解，同理 B(2, 2)和 B(2,3)亦與 A 區有解區塊重疊，故也變為有解。

而要如何解釋 A(2,2) 從無解變為有解呢？又沒有與 B 區地圖重疊？但很明顯地，A(2, 2) 右側方格數大於 3，因此至少可進行一次右倒的動作，但要如何確切地說必定有解，這時可用前段討論的 4×5 地圖中 A(2,2) 的狀況

$\mathrm{HA} \rightarrow \mathrm{A}(2,1) = \mathrm{HB} \rightarrow \mathrm{B}(1,2) = \mathrm{A}(2,2)$.......在 4×5 地圖中

因此可得$\mathrm{HA} \rightarrow \mathrm{A}(2,2)$，因此即便沒有與有解區重疊，只要地圖尺寸夠大，A(2, 2)就變為有解區。 同理， A(2, 3)、B(3, 2) 及 B(3, 3) 亦從無解區塊變為有解區塊。

最後小結**最小有解矩形的發展模式，即兩個一倒一立方形地圖只重疊兩排**，因此矩形長為 5+5-2=6，寬還是原本方形邊長 4。

四、1×1×n 積木在地圖中的各種表現

後續統整 1×1×2、1×1×31×1×4、1×1×5、1×1×6 的積木，我們找出 1×1×n 積木的規律

(一) 在橫列地圖時：

定理 1：

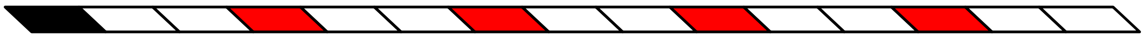
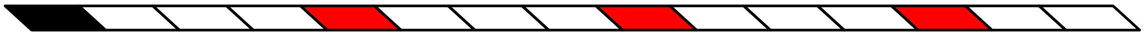
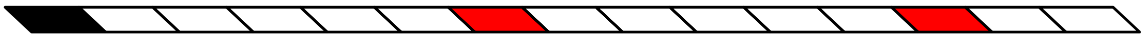
1×1×n 積木在橫列地圖中能立的終點必在每排第 $(n+1)x+1$之方格，其中 x 為正整數。

橫立地圖的走法為 x 組一倒一立，即$x(P_x+P_y)$。

證明：橫列地圖是指列數比積木高數還要低，行數比積木高數還要高之地圖，因此積木在移動時只能作橫向若干組倒 (n 格) 立 (1 格) 移動或滾的動作，無法作向上下倒、立，而一組一倒一立所需格數為 n+1 格，故算上起點的 1 格，前進 x 組一倒一立後的終點必在每排第 $(n+1)x+1$之方格，其走法為 $x(P_x+P_y)$。

下表 1 為 1×1×2 到 1×1×6 各尺寸積木在橫列地圖之討論，由此可以很直覺地推論 1×1×n 積木在橫列地圖的表現。

表 1 各尺寸積木在橫列地圖之討論

積木 尺寸	積木在橫列地圖的有解終點，黑色區塊為起點，紅色區塊為有解終點，其公式為按照積木尺寸及地圖變化之觀察結果。
1×1×2	 1×1×2 的積木在 1×多的地圖內，其有解終點位置公式為 3x+1。 在此地圖中有解終點分別為 4、7、10、13。
1×1×3	 1×1×3 的積木在 1×多的地圖內，其有解終點位置公式為 4x+1。 在此地圖中有解終點分別為 5、9、13。
1×1×4	 1×1×2 的積木在 1×多的地圖內，其有解終點位置公式為 3x+1。 在此地圖中有解終點分別為 6、11。
1×1×5	 1×1×2 的積木在 1×多的地圖內，其有解終點位置公式為 3x+1。 在此地圖中有解終點分別為 7、13。
1×1×6	 1×1×2 的積木在 1×多的地圖內，其有解終點位置公式為 3x+1。 在此地圖中有解終點分別為 8、15

(二) 在一倒一立方形地圖時：

定理 2：

1×1×n 積木的一倒一立最小方形地圖尺寸為 $(n+1)^2$，其中心無解區塊尺寸為 $(n-1)^2$。

證明：為了讓 1×1×n 積木可以往 x 軸及 y 軸方向做一組一倒（n 格）一立（1 格）的動作，其邊長至少需要 (n + 1) 格，故滿足此條件最小方形地圖尺寸為$(n+1)^2$，而在這樣的方形地圖中，除了最外圍一圈有足夠的空間讓積木移動，中心$(n-1)^2$ 塊的方格皆無法讓積木作任何移動，故中心$(n-1)^2$方格皆為無解區塊。

表 2 各尺寸積木在一倒一立方型地圖之討論

<table>
<tr><th>積木尺寸</th><th>1×1×2</th><th>1×1×3</th><th>1×1×4</th></tr>
<tr><td>地圖尺寸
與討論</td>
<td>
<table>
<tr><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td>H</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>
地圖尺寸為 3×3。
無解區塊尺寸為 1×1。
</td>
<td>
<table>
<tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td>9</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>H</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
</table>
地圖尺寸為 4×4。
無解區塊尺寸為 2×2。
</td>
<td>
<table>
<tr><td>6</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>9</td></tr>
<tr><td>H</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
</table>
地圖尺寸為 5×5。
無解區塊尺寸為 3×3。
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>積木尺寸</th><th>1×1×5</th><th>1×1×6</th></tr>
<tr><td>地圖尺寸
與討論</td>
<td>
<table>
<tr><td>7</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>13</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>12</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>H</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
</table>
地圖尺寸為 6×6。
無解區塊尺寸為 4×4。
</td>
<td>
<table>
<tr><td>8</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>14</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>13</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>12</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>H</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
</table>
地圖尺寸為 7×7。
無解區塊尺寸為 5×5。
</td></tr>
</table>

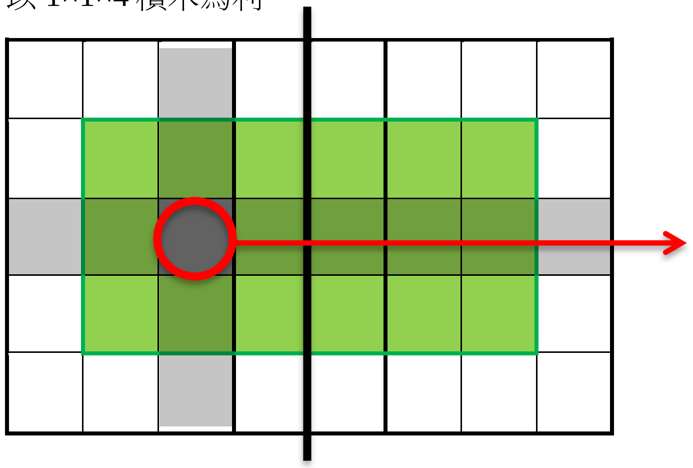
(三) 在最小有解矩形地圖時：

> **定理 3：**
>
> 1×1×n 積木之最小有解矩形地圖尺寸為 $2n \times (n+1)$。

證明：最小有解矩形地圖可視為由兩塊一倒一立方形地圖所組成，其組成方式與發現 4 過程一樣，故對 1×1×n 積木來說兩塊方形地圖只重疊兩排，則最小有解矩形地圖長為 $2(n+1)-2=2n$，地圖寬為 $n+1$。

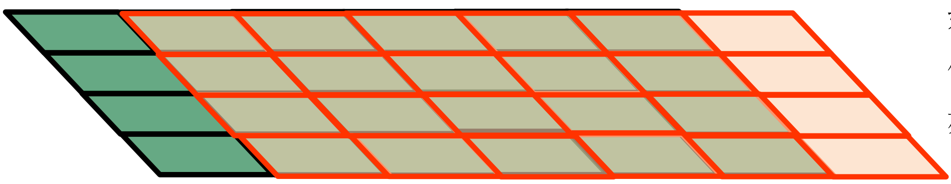
以 1×1×4 積木的最小有解矩形地圖說明，必須使原無解區塊中任一點（站立狀態）都可以作至少某一方向的移動，則表示該一方向的方格數大於或等於高數（不包含自身站立的方格）。不難理解滿足這樣條件的矩形寬度必至少為 $2n$，因為$2n \div 2 = n$，也就是把 $2n \times (n+1)$ 地圖中心分兩半看，積木雖無法只靠單半區方格走回起點，但另一半區至少有 n 格足以讓積木移動到起點處，因此 $2n \times (n+1)$ 為 1×1×n 積木之最小有解矩形地圖尺寸。

以 1×1×4 積木為利



定理 4：
1×1×n 積木在任意 m×n 矩形地圖中，若 m×n 大於 2n×(n+1) 則必定每個方格皆有解。

說明：同定理 3 的模式，可將 m×n 矩形視作多個 2n×(n+1)矩形的重疊，即再任意長寬大於最小有解矩形的矩形地圖，每個方格皆必有解。



如圖，這是一個 4×7 矩形，由兩個 4×6 最小有解矩形重疊合成，亦為 1×1×4 積木的有解矩形。

(四) 最小步數之討論：

為了研究積木到目標終點的最少移動步法之次數，我們定義

定義：
在滾動積木遊戲中，給定一個起點和終點位置後，從起點出發使積木狀態改變最少次數，即可抵達終點，此次數稱為**最小步數**。

定理 5：

1×1×n 積木在任意 m×n 有解矩形中，

若移動步數為最小步數，則不會有同方向滾動$(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$ 次。

證明：引用第 55 屆作品中發現三的結果，1×1×n 積木移動時有幾個現象：

1. $(a,b)+P_x+S_x=(a+(n+1),\ b)$ 即一倒一立向右移動了共 n+1 格，同理向左亦同。
2. $(a,b)+P_y+S_y=(a\ ,b+(n+1))$ 即一倒一立向上移動了共 n+1 格，同理向下亦同。
3. $(a,b)+P_x+S_{-x}=(a+b)$ 先右倒後再左立，等同於沒有移動，積木還是在原來方格，同理左倒後再右立；上倒後再下立；下倒後再上立，因此最小步數走法中不能有連續的上述四種走法。
4. 往任何方向滾動一次，表積木往該方向移動一格，如向右滾一次相當於右移一格。
5. 不論左右滾動$(R_x\ or\ R_{-x})$ 幾次，此動作必須介於一組上下方向的倒 $\left(P_y\ or\ P_{-y}\right)$ 、立 $\left(S_y\ or\ S_{-y}\right)$ 之間，同理，不論上下滾動 $(R_y\ or\ R_{-y})$ 幾次，此動作必須介於一組上下方向的倒 $(P_x\ or\ P_{-x})$ 、立$(S_x\ or\ S_{-x})$之間，事實上這很直觀，要進行翻滾動作之前，本來就得讓積木變成平躺狀態，且移動至終就是要立於終點處，故翻滾動中必在倒與立之間。

由上述五點可得

$$P_y+(n+1)R_x+S_y=P_y+S_y+P_x+S_x$$
$$P_x+(n+1)R_y+S_x=P_x+S_x+P_y+S_y$$

即向右翻滾 $(n+1)$ 次相當於向右作一組倒$\left(n\text{格}\right)$立$\left(1\text{ 格}\right)$。

因此再任意有解矩形中若移動步數為最少步數，則不會有同方向滾動$(n+1)$ 次的情況。

(五) 積木在最小有解矩形中的最少移動步法：

定理 6：

1×1×n 積木在**最小有解矩形**中以$(1,1)$ 為起點時，其**最少移動的步法**在

一、已知 $m < n+2$， $1 < p \leq n$，

1. 若目標終點為$(m,1)$，則走法為 P_y 、$(m-1)R_x$ 、S_{-y}。
2. 若目標終點為$(1,m)$，則走法為 P_x 、$(m-1)R_y$ 、S_{-x}。
3. 若目標終點為(m,p)， $(m,1)$為中繼點，步法為

$$P_y \text{、}(m-1)R_x \text{、}S_{-y} + P_x \text{、}(p-1)R_y \text{、}S_{-x}\text{。}$$

二、已知 $m = n+2$， $1 < p \leq n+1$，

1. 若目標終點為$(m,1)$，則走法為 P_x 、S_x，步數為二。
2. 若目標終點為 (m,p)，**無中繼點**，走法為 P_y 、$(m-1)R_x$ 、S_y。

三、已知 $m > n+2$，$1 < p \leq n+1$

1. 若目標終點為$(m,1)$，步法為

   P_y 、$\big(m-(n+1)\big)R_x$ 、S_{-y} 、P_x 、S_x ，其中$(\boldsymbol{m-(n+1),1})$ **為中繼點**

   P_x 、S_x 、P_y 、$(m-(n+1))R_x$ 、S_{-y} ，其中$(\boldsymbol{n+2,1})$ **為中繼點**

2. 若目標終點為(m,p)， $(\boldsymbol{m-(n+1),1})$ **為中繼點**，則走法必為 P_y 、$(m-(n+2))R_x$ 、S_{-y} 、P_x、 $(p-1)R_y$ 、S_x。

其中，

最小有解矩形尺寸為 $2n \times (n+1)$，m、p為正整數，**中繼點**指到終點路徑中必經之點。

證明：

一、已知 $m < n+2$， $1 < p \leq n$，

1. 若目標終點為$(m,1)$，表示目標終點在起點正右方，因為在定理 1 提過橫列地圖中能立的終點必在$(n+1)x+1$處，其中$x=1$ 代入表示橫列地圖中能立的第一點在 $n+2$ 處，所以 $m < n+2$ 表示**不能向右倒，只能向上倒**、**向右滾（$\boldsymbol{m-1}$）次，最後在向下立**即可抵達終點$(m,1)$。
2. 若目標終點為$(m,1)$，利用發現三的結果，以$(1,1)$為起點時，$(m,1)$與$(1,m)$的走法具有對稱性，因此走法更改為**向上倒**、**向右滾（$\boldsymbol{m-1}$）次，最後在向下立**即可抵達終點$(1,m)$。

3. 若目標終點為(m,p)，因為 $p>1$，因此積木立於終點前是一個平躺的狀態，且積木前端（最靠近終點的一端）位於$(m+1,p)$，為了讓積木平躺可以抵達$(m+1,p)$處，必先經過$(m,1)$，再向上滾$(p-1)$次，因此$(m,1)$為中繼點。其走法為

$$\underbrace{P_y、(m-1)R_x、S_{-y}}_{\text{抵達}(m,1)}+\underbrace{P_x、(p-1)R_y、S_{-x}}_{\text{抵達}(m,p)}。$$

二、已知 $m=n+2$， $1<p\leq n+1$，

1. 若目標終點為$(m,1)$，表示目標終點在起點正右方，因為在定理 1 提過橫列地圖中能立的終點必在$(n+1)x+1$處，其中$x=1$ 代入表示橫列地圖中能立的第一點在 $n+2$ 處，所以 $m=n+2$ 表示可向右作一組一倒一立抵達$(m,1)$處，其走法為 P_x、S_x 步數為二，為最小有解矩形地圖中的最少步數。
2. 若目標終點為(m,p)，因為$m=n+2$，所以積木的第一步可以先向右倒，再向上滾$(p-1)$次，最後右立於(m,p)，所以步法中不經過$(m,1)$。

三、已知 $m>n+2$，$1<p\leq n+1$

1. 若目標終點為$(m,1)$，因為$m>n+2$，所以走法可分為兩種 。第一種：先將積木移動到$(m-(n+1),1)$，再一倒一立抵達目標終點$(m,1)$處。第二種：先將積木一倒一立到$(n+2,1)$後，相當於視$(n+2,1)$為新的起點，再做上倒、右滾 $m-(n+1)$次、下立抵達目標終點$(m,1)$。
2. 若目標終點為(m,p)，則 $(m-(n+1),1)$ 為中繼點， 接著右倒、上滾 $(p-1)$ 次、右立抵達目標終點(m,p)。

上述研究在 1×1×2、1×1×3、1×1×4、1×1×5 以及 1×1×6 積木之最小有解矩形的走法，皆已整理至附表中。

> 引理 1
> 最小有解地圖中，起點抵達至 $(n,n+1)$以及$(n+1,n+1)$ 的走法分別為
> $$P_x、nR_y、S_x+P_{-y}、(n+2-n)R_{-x}、S_y$$
> $$P_x、nR_y、S_x+P_{-y}、\big(n+2-(n+1)\big)R_{-x}、S_y$$

證明：

在最小有解地圖中，若目標終點為$(n,n+1)$以及$(n+1,n+1)$，則可先抵達中繼點$(n+2,n+2)$，引此前段走法皆為P_x 、nR_y 、S_x+P_y，接著下倒後分別左滾$(n+2-n)$ 和$(n+2-(n+1))$次，最後上滾即可抵達。

(六) 積木在最小有解矩形中的最小步數：

討論完步法問題後，我們開始研究 1×1×n 積木在最小有解矩形中起點抵達每一個方格的移動最小步數，首先分工實際操作 1×1×3、1×1×4、1×1×5 以及 1×1×6 在對應最小有解矩形的走法並記錄其駔小有解步數，為了研究方便首先定義兩個名詞。

> 定義：
> 令 (m,p)為地圖上的**非起點的任意點；**$C(m,p)$ 為計算起點抵達(m,p)的最小步數之函數。

接著我們討論 1×1×n 積木在**最小有解矩形**中以$(1,1)$ 為起點時，若目標終點位於與起點相同橫列和縱行時的最小步數討論。

若目標終點 $(m,1)$ 在最小有解矩形之方格內，則 $1\le m\le 2n$，因為最小有解矩形尺寸為$2n\times(n+1)$。

> 引理 2：
> 當以$(1,1)$ 為起點，到目標終點 $(m,1)$ 的最小步數$C(m,1)$有下列三項結果。
> (1) $m+1$，若 $m<n+2$
> (2) $m-n$，若$m=n+2$
> (3) $m-n+2$，若$m>n+2$

證明：

針對結果 (1) ，若 $m<n+2$，則積木不能右倒只能上倒、再向右滾 $(m-1)$次，最後在抵達終點 $(m,1)$，步數為$1+1+(m-1)=m+1$。

針對結果 (2)，若 $m=n+2$，則積木能直接向右作一倒一立的移動，故步數為 $m-n=2$。

針對結果 (3)，若 $m>n+2$，則積木能先直接向右作一倒一立的移動，但右方剩餘格數 $m-(n+1)$ 無法再作一組一倒一立，故只能上倒、在向右滾 $\big(m-(n+1)\big)-1$ 次、最後向下倒，故步數為$2+1+\ \big(m-(n+1)\big)-1+1=3+m-n-1=m-n-2$。

1×1×n 積木在**最小有解矩形**中以$(1,1)$ 為起點時，到目標終點 $(1,p)$ 的**最小步數**為

引理 3： 當以$(1,1)$ 為起點，到目標終點 $(1,p)$ 的最小步數$C(1,p)=p+1$。

證明：

引用發現三的結果，

令 $p=m$，則 $(m,1)$與$(1,m)$具有對稱性，走法對稱步數相同，故步數為 $m+1=p+1$。

定理 7： 當以$(1,1)$ 為起點，到目標終點 (m,p) 的最小步數$C(m,p)$有下列結果 (1) $C(m,p)=C(m,1)+C(1,p)=m+p+2$，若 $m<n+2$。 (2) $C(m,p)=C(1,p)=p+1$，若 $m=n+2$。 (3) $C(m,p)=C(m-(n+1),p)=C(m-(n+1),1)+C(1,p)=m-n+p+1$， 若 $m>n+2$。

證明：

針對結果 (1) ，若 $m<n+2$，則積木其走法為

$$P_y、(m-1)R_x、S_{-y}+P_x、(p-1)R_y、S_{-x}。$$

因此步數可視為

$$C(m,p)=C(m,1)+C(1,p)=m+1+p+1=m+p+2$$

針對結果 (2)，若 $m=n+2$，則積木走法為 P_y、$(m-1)R_x$、S_y，與$(1,p)$走法相似（差在最後一步是左立或右立）故步數為

$$C(m,p)=C(1,p)=p+1$$

此步數也可視作以$(m,1)$為新的起點，(m,p)在新起點正上方 $p-1$個方格，因此共需$p+1$。

針對結果 (3)，若 $m>n+2$，積木走法為

$$P_y、(m-(n+2))R_x、S_{-y}+P_x、(p-1)R_y、S_x。$$

故步數可視為

$$\begin{aligned}C(m,p)=C(m-(n+1),p)=C(m-(n+1),1)+C(1,p)&=m-(n+1)+1+p+1\\&=m-n+p+1\end{aligned}$$

1×1×7 積木為例，其最小有解矩形尺寸為 14×8，則最小有解矩形的步數計算方式為

$(n, n+1)$以及$(n+1, n+1)$ 的走法分別為

P_x、nR_y、$S_x + P_{-y}$、$(n+2-n)R_{-x}$、S_y or

P_x、nR_y、$S_x + P_{-y}$、$\big(n+2-(n+1)\big)R_{-x}$、$S_y$

$C(m,p) = C(1,p) = p+1$，若 $m = n+2$

8	9	3+9			6+9	7+9	13	12	9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9
7	8	3+8	4+8			7+8	8+8	9+8	8		4+8	5+8	6+8	7+8
6	7	3+7	4+7	5+7			8+7	9+7	7			5+7	6+7	7+7
5	6	3+6	4+6	5+6	6+6			9+6	6	3+6			6+6	7+6
4	5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5			5	3+5	4+5			7+5
3	4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4		4	3+4	4+4	5+4		
2	3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3	3	3+3	4+3	5+3	6+3	
1	H	3	4	5	6	7	8	9	2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

$C(m,p) = C(m,1) + C(1,p) = m+p+2$，若 $m < n+2$ 且 m 和 p

$C(m,p) = C(m-(n+1),p) = C(m-(n+1),1) + C(1,p) = m-n+p+1$，若 $m > n+2$。

1. 若目標終點為$(m,1)$，則走法為 P_y、$(m-1)R_x$、S_{-y}。
2. 若目標終點為$(1,m)$，則走法為 P_x、$(m-1)R_y$、S_{-x}。
3. 若目標終點為(m,p)， $(m,1)$為中繼點，步法為

$$P_y、(m-1)R_x、S_{-y} + P_x、(p-1)R_y、S_{-x}。$$

表 3 各尺寸積木在最小有解矩形中的最少移動步數

<table>
<tr><th>積木尺寸</th><th>最小有解矩形之最少移動步數</th><th>積木尺寸</th><th>最小有解矩形之最少移動步數</th></tr>
<tr><td>1×1×2</td><td>
<table>
<tr><td>4</td><td>7</td><td>7</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>3</td></tr>
<tr><td>H</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr>
</table>
地圖尺寸為 4×3</td><td>1×1×3</td><td>
<table>
<tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td><td>8</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>4</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>H</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>
地圖尺寸為 6×4</td></tr>
<tr><td>1×1×4</td><td colspan="3">
<table>
<tr><td>6</td><td>9</td><td>10</td><td>10</td><td>9</td><td>6</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>H</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td></tr>
</table>
地圖尺寸為 8×5</td></tr>
<tr><td>1×1×5</td><td colspan="3">
<table>
<tr><td>7</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>11</td><td>10</td><td>7</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>6</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>6</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td>5</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>5</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>4</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>H</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
</table>
地圖尺寸為 10×6</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1×1×6</td><td>

8	11	12	13	13	12	11	8	11	12	13	14
7	10	11	12	13	14	15	7	10	11	12	13
6	9	10	11	12	13	14	6	9	10	11	12
5	8	9	10	11	12	13	5	8	9	10	11
4	7	8	9	10	11	12	4	7	8	9	10
3	6	7	8	9	10	11	3	6	7	8	9
H	3	4	5	6	7	8	2	5	6	7	8

地圖尺寸為 12×7
</td></tr>
</table>

肆、研究結果

針對 $1\times1\times n$ 積木，我們得到了以下結果：

一、 在橫列地圖時，能立的終點必在每排第 $(n+1)x+1$之方格，其中 x 為正整數。

二、 橫立地圖的走法為 x 組一倒一立，即$x(P_x+P_y)$。

三、 一倒一立最小方形地圖尺寸為 $(n+1)^2$，其中心無解區塊尺寸為 $(n-1)^2$。

四、 最小有解矩形地圖尺寸為 $2n\times(n+1)$。

五、 任意 m×n 矩形地圖中，若 m×n 大於 $2n\times(n+1)$ 則必定每個方格皆有解。

六、 在任意 m×n 有解矩形中，若移動步數為最小步數，則不會有同方向滾動$(n+1)$ 次。

七、 在最小有解矩形中以$(1,1)$ 為起點時，其最少移動的步法在

(一) 已知 $m<n+2$， $1<p\le n$，

1. 若目標終點為$(m,1)$，則走法為 P_y、$(m-1)R_x$、S_{-y}。
2. 若目標終點為$(1,m)$，則走法為 P_x、$(m-1)R_y$、S_{-x}。
3. 若目標終點為(m,p)， $(m,1)$為中繼點，步法為

$$P_y、(m-1)R_x、S_{-y}+P_x、(p-1)R_y、S_{-x}。$$

(二) 已知 $m=n+2$， $1<p\le n+1$，

1. 若目標終點為$(m,1)$，則走法為 P_x、S_x，步數為二。
2. 若目標終點為 (m,p)，無中繼點，走法為 P_y、$(m-1)R_x$、S_y。

(三) 已知 $m>n+2$，$1<p\le n+1$

1. 若目標終點為$(m,1)$，步法為

   P_y、$\big(m-(n+1)\big)R_x$、S_{-y}、P_x、S_x ，其中$(m-(n+1),1)$ 為中繼點

   P_x、S_x、P_y、$(m-(n+1))R_x$、S_{-y} ，其中$(n+2,1)$ 為中繼點

2. 若目標終點為(m,p)， $(m-(n+1),1)$ 為中繼點，則走法必為 P_y、$(m-(n+2))R_x$、S_{-y}、P_x、 $(p-1)R_y$、S_x。

八、 當以$(1,1)$ 為起點，到目標終點 (m,p) 的最小步數$C(m,p)$有下列結果

(一) $C(m,p)=C(m,1)+C(1,p)=m+p+2$，若 $m<n+2$。

(二) $C(m,p)=C(1,p)=p+1$，若 $m=n+2$。

(三) $C(m,p)=C(m-(n+1),p)=C(m-(n+1),1)+C(1,p)=m-n+p+1$，若 $m>n+2$。

伍、未完成研究之討論

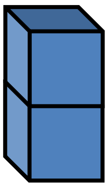
在研究之前有些待確定的問題，為什麼可以用 1×1×2 積木的研究架構去發展 1×1×n 積木的移動模式？以及是否能將此研究架構去套用到其他尺寸的積木？因此我們做了下列討論。

一、能否用 1×1×2 積木的研究架構去發展 1×1×n 積木的移動模式？

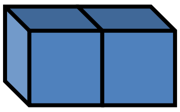
我們的答案是可行，因為兩種積木的狀態與移動模式相似。

(一) 1×1×2 積木的移動模式

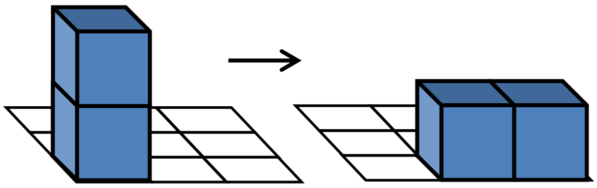
用 1×1×2 積木的狀態只有立和倒，在立（積木站立）的情況下與地圖接觸的面積最小為 1×1；在倒（積木平躺）的情況下與地圖接觸的面積最大為 1×2。移動的模式可以分為三種，立、倒、滾，其中立的下一步必是倒 ，倒的下一步可以是滾或立，滾的下一步可以是持續滾或立。



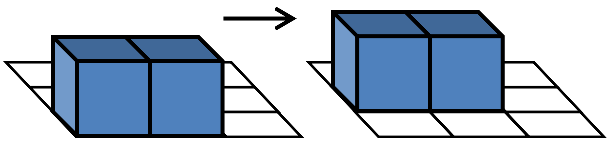
立：積木與地圖面積最小為 1×1



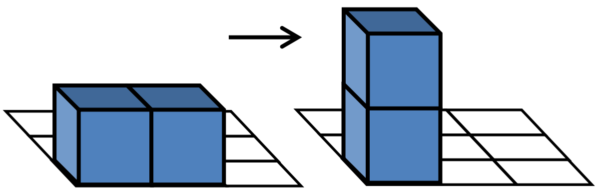
倒：積木與地圖面積最大為 1×2



立的下一步只能是倒



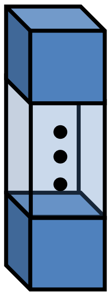
或



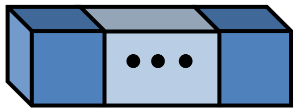
倒的下一步可以是滾或立，而滾因為狀態就是倒，所以用同一個示意圖表示。

(二) 1×1×*n* 積木的移動模式

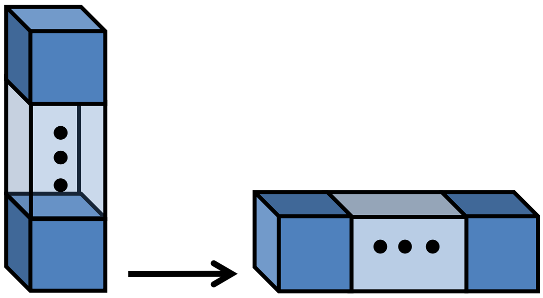
1×1×n 積木同 1×1×2 積木的狀態一樣只有立和倒，在立（積木站立）的情況下與地圖接觸的面積最小為 1×1；在倒（積木平躺）的情況下與地圖接觸的面積最大為 1×n。移動的模式也與 1×1×2 積木相同。



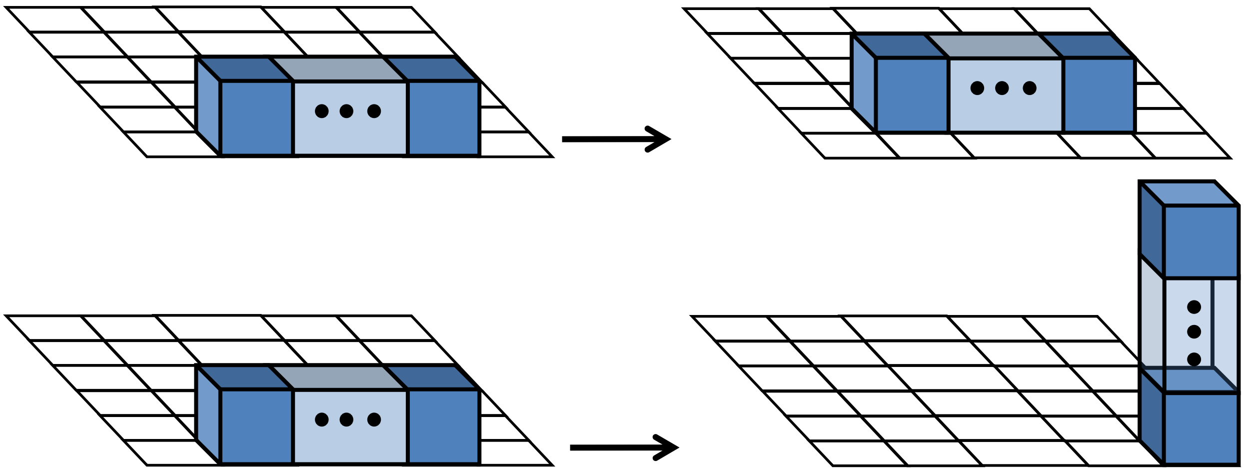
立：積木與地圖面積最小為 1×1



倒：積木與地圖面積最大為 1×n



立的下一步只能是倒



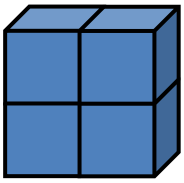
倒的下一步可以是滾或立，而滾因為狀態就是倒，所以用同一個示意圖表示。

二、能否用 1×1×2 積木的研究架構去發展其他尺寸積木的移動模式？

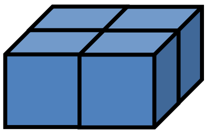
我們的答案是不可行，因為兩種積木的狀態與移動模式不相似。

(三) 1×2×2 積木的移動模式

用 1×2×2 積木的狀態只有立和倒，在立（積木站立）的情況下與地圖接觸的面積最小為 1×2；在倒（積木平躺）的情況下與地圖接觸的面積最大為 2×2。但移動的模式與 1×1×2 積木的差別很大，其狀態與移動模式以下圖說明。

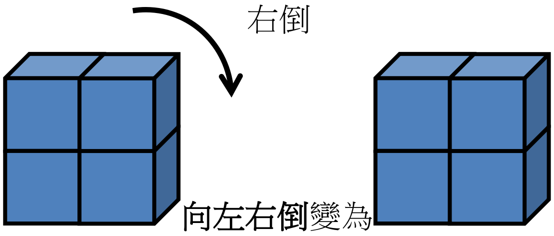


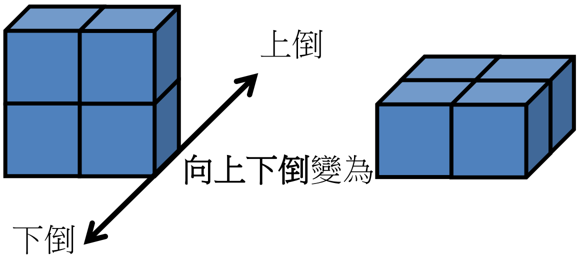
立：積木與地圖面積最小為 1×2

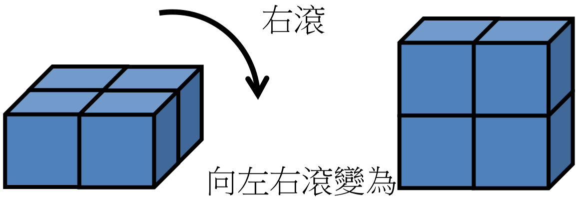


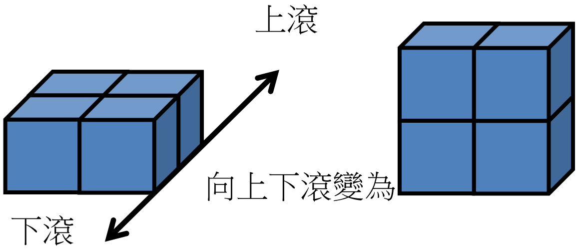
倒：積木與地圖面積最大為 2×2

由立→倒的移動狀態會依據方向而不同。





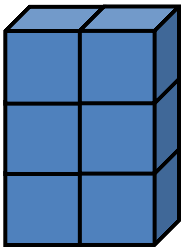




(四) 1×2×3 積木的移動模式

用 1×2×3 積木的狀態有三種，與地圖接觸的面積依序分別為 1×2、1×3、2×3，定義在立（積木站立）的情況下與地圖接觸的面積最小為 1×2；在倒（積木平躺）的情況下與地圖接觸的面積最大為 2×3。光是狀態就與 1×1×2 積木的差別很大，其狀態與移動模式以下圖說明。

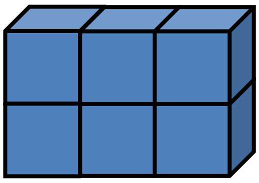
1×2×3 積木的狀態可分為三種



與地圖接觸的底面積為 1×2

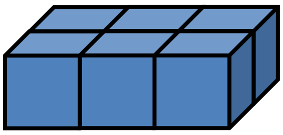
接觸面積最小

定義此狀態為立



與地圖接觸的底面積為 1×3

與 1×1×2 定義不符

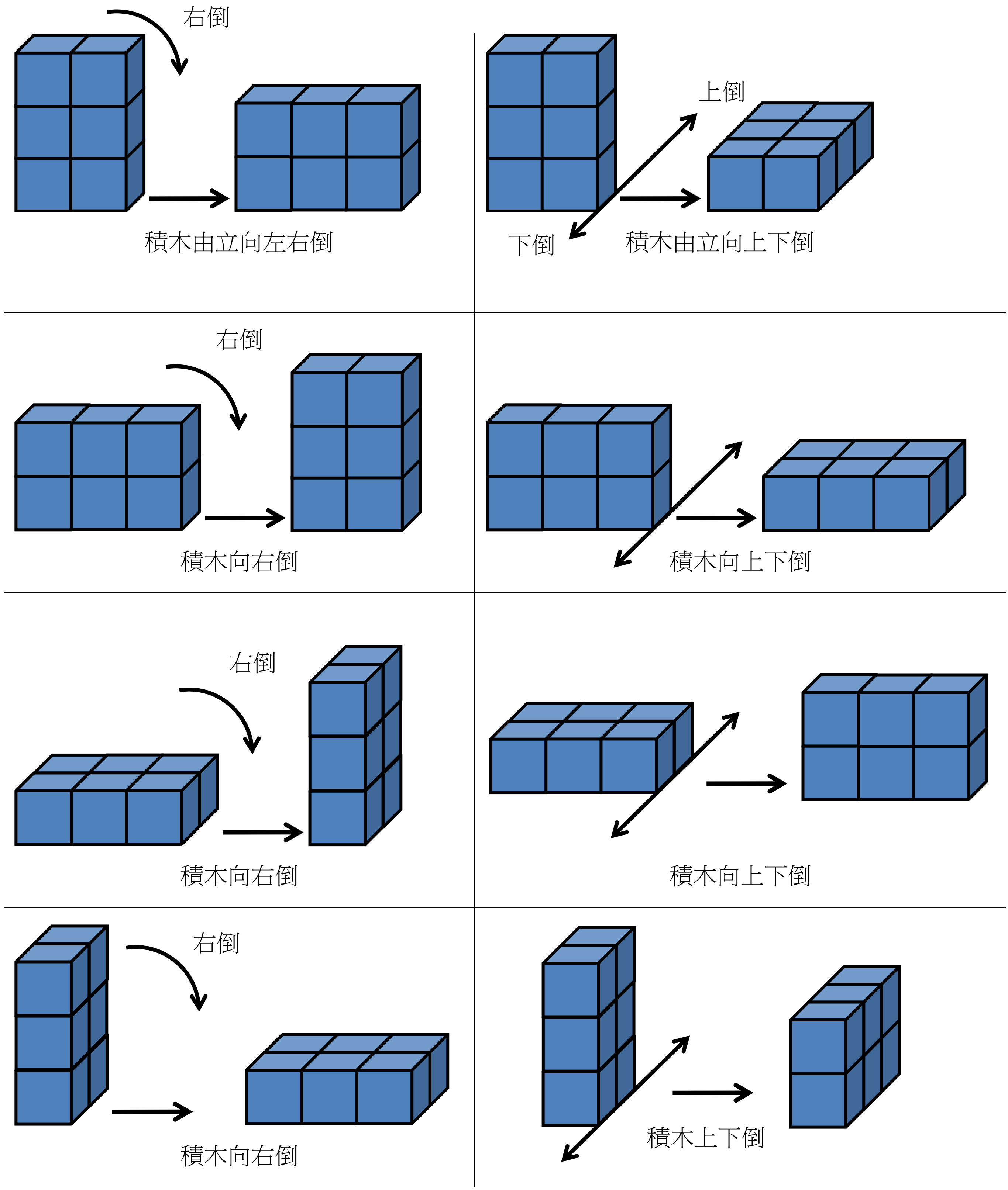


與地圖接觸的底面積為 2×3

接觸面積最大

定義此狀態為倒

1×2×3 積木的移動模式



1×2×2 與 1×2×3 積木的狀態與移動模式與 1×1×2 積木差別很大，故無法用 1×1×2 積木的研究架構直接拓展去研究 1×2×2 與 1×2×3 積木，我們也猜測其他積木尺寸也不可行。

陸、未來展望與結論

一、未來展望：

未來我們希望可以做出下列幾點的研究：

1. **完成其他積木尺寸的基礎地圖研究**
2. **其他類型的地圖**
3. **走法限制的情況**
4. **做出上述情況的進階遊戲**

我們目前的研究只討論到以 1×1×n 積木為基礎時，橫列的地圖、一倒一立的方形地圖及最小有解矩形地圖的步數，走法變化。未來，我們想討論當地圖為不規則形，出現中繼點時，積木的走法，步數，有甚麼改變。當我們限制地圖的走法，例如：積木遇到特定方格後，只能利用滾移動、或用立的方式來開啟新的格子，該如何抵達終點。最後，我們想利用電腦的軟體，如：Scratch，來發展更進階的的地圖。

此外，我們想繼續研究 1×2×2、1×2×3 積木，甚至 1×m×n，看看與 1×1×n 積木有甚麼變化，是否也有最小有解矩形及最少有解步數。

二、結論：

透過這次做科展的活動，讓我們更加認識電腦軟體，對事情負責任的心以及團結合作的態度，感謝我們的指導老師，教我們使用電腦軟體（word、ppt），將一張空白的文件填滿了密密麻麻的文字，也謝謝我們夥伴能互相團結合作，雖然有時會因分工、修改而吵架，不斷重複地修改檔案，常會做到快放棄自我，但我們依舊揮發著我們努力地汗水，奮力地往前衝。在做科展的這段期間，心情有如彈簧球般，起起伏伏，俗話說：「不經一番寒徹骨，焉得梅花撲鼻香」，在過程中很難熬及疲累，不過經過辛苦過後得到的果實，總是最甜美的。

柒、參考文獻資料

1. 游復廷等（2015）・中華民國第 55 屆中小學科學展覽會 作品說明書

2. 滾動積木・昌爸工作坊・取自\https://archive.org/details/bloxors

捌、附錄

附表 1　各尺寸積木在一倒一立方形地圖之走法

座標	1×1×2 解法	1×1×3 解法	1×1×4 解法	1×1×5 解法	1×1×6 解法
(1,1)	起點	起點	起點	起點	起點
(1,2)	Px,Ry,S-x	Px,Ry,S-x	Px,Ry,S-x	Px,Ry,S-x	Px,Ry,S-x
(1,3)	Px,2Ry,S-x	Px,2Ry,S-x	Px,2Ry,S-x	Px,2Ry,S-x	Px,2Ry,S-x
(1,4)		Px,3Ry,S-x	Px,3Ry,S-x	Px,3Ry,S-x	Px,3Ry,S-x
(1,5)			Px,4Ry,S-x	Px,4Ry,S-x	Px,4Ry,S-x
(1,6)				Px,5Ry,S-x	Px,5Ry,S-x
(1,7)					Px,6Ry,S-x
(2,1)	Py,Rx,S-y	Py,Rx,S-y	Py,Rx,S-y	Py,Rx,S-y	Py,Rx,S-y
(2,2)	無解	無解	無解	無解	無解
(2,3)	Px,2Ry,S-x, P-y,Rx,Sy	無解	無解	無解	無解
(2,4)		Px,3Ry,S-x, P-y,Rx,Sy	無解	無解	無解
(2,5)			Px,4Ry,S-x, P-y,Rx,Sy	無解	無解
(2,6)				Px,5Ry,S-x, P-y,Rx,Sy	無解
(2,7)					Px,6Ry,S-x, P-y,Rx,Sy
(3,1)	Py,2Rx,S-y	Py,2Rx,S-y	Py,2Rx,S-y	Py,2Rx,S-y	Py,2Rx,S-y
(3,2)	Py,2Px,S-y, R-x,Ry,Sx	無解	無解	無解	無解
(3,3)	Px,2Ry,S-x, P-y,2Rx,Sy	無解	無解	無解	無解
(3,4)		Px,3Ry,S-x, P-y,2Rx,Sy	無解	無解	無解
(3,5)			Px,4Ry,S-x, P-y,2Rx,Sy	無解	無解

座標	1×1×2 解法	1×1×3 解法	1×1×4 解法	1×1×5 解法	1×1×6 解法
(3,6)				Px,5Ry,S-x, P-y,2Rx,Sy	無解
(3,7)					Px,6Ry,S-x, P-y,2Rx,Sy
(4,1)		Py,3Rx,S-y	Py,3Rx,S-y	Py,3Rx,S-y	Py,3Rx,S-y
(4,2)		Py,3Rx,S-y, P-x,Ry,Sx	無解	無解	無解
(4,3)		Py,3Rx,S-y, P-x,2Ry,Sx	無解	無解	無解
(4,4)		Py,3Rx,S-y, P-x,3Ry,Sx	無解	無解	無解
(4,5)			Px,4Ry,S-x, P-y,3Rx,Sy	無解	無解
(4,6)				Px,5Ry,S-x, P-y,3Rx,Sy	無解
(4,7)					Px,6Ry,S-x, P-y,3Rx,Sy
(5,1)			Py,4Rx,S-y	Py,4Rx,S-y	Py,4Rx,s-y
(5,2)			Py,4Rx,S-y, P-x,Ry,Sx	無解	無解
(5,3)			Py,4Rx,S-y, P-x,2Ry,Sx	無解	無解
(5,4)			Py,4Rx,S-y, P-x,3Ry,Sx	無解	無解
(5,5)			Py,4Rx,S-y, P-x,4Ry,Sx	無解	無解
(5,6)				Px,5Ry,S-x, P-y,4Rx,Sy	無解
(5,7)					Px,5Ry,S-x, P-y,4Rx,Sy
(6,1)				Py,5Rx,S-y	Py,5Rx,S-y

座標	**1×1×2 解法**	**1×1×3 解法**	**1×1×4 解法**	**1×1×5 解法**	**1×1×6 解法**
(6,2)				Py,5Rx,S-y, P-x,Ry,Sx	無解
(6,3)				Py,5Rx,S-y, P-x,2Ry,Sx	無解
(6,4)				Py,5Rx,S-y, P-x,3Ry,Sx	無解
(6,5)				Py,5Rx,S-y, P-x,4Ry,Sx	無解
(6,6)				Py,5Rx,S-y, P-x,5Ry,Sx	無解
(6,7)					Px,6Ry,S-x, P-y,5Rx,Sy
(7,1)					Py,6Rx,S-y
(7,2)					Py,6Rx,S-y, P-x,Ry,Sx
(7,3)					Py,6Rx,S-y, P-x,2Ry,Sx
(7,4)					Py,6Rx,S-y, P-x,3Ry,Sx
(7,5)					Py,6Rx,S-y, P-x,4Ry,Sx
(7,6)					Py,6Rx,S-y, P-x,5Ry,Sx
(7,7)					Py,6Rx,S-y, P-x,6Ry,Sx

附表 2　各尺寸積木在最小有解地圖之走法

座標	1×1×2 解法	1×1×3 解法	1×1×4 解法	1×1×5 解法	1×1×6 解法
(1,1)	起點	起點	起點	起點	起點
(1,2)	Px,Ry,S-x	Px,Ry,S-x	Px,Ry,S-x	Px,Ry,S-x	Px,Ry,S-x
(1,3)	Px,2Ry,S-x	Px,2Ry,S-x	Px,2Ry,S-x	Px,2Ry,S-x	Px,2Ry,S-x
(1,4)		Px,3Ry,S-x	Px,3Ry,S-x	Px,3Ry,S-x	Px,3Ry,S-x
(1,5)			Px,4Ry,S-x	Px,4Ry,S-x	Px,4Ry,S-x
(1,6)				Px,5Ry,S-x	Px,5Ry,S-x
(1,7)					Px,6Ry,S-x
(2,1)	Py,Rx,S-y	Py,Rx,S-y	Py,Rx,S-y	Py,Rx,S-y	Py,Rx,S-y
(2,2)	Py,Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,Ry,S-x
(2,3)	Py,Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,2Ry,S-x
(2,4)		Py,Rx,S-y, Px,3Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,3Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,3Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,3Ry,S-x
(2,5)			Py,Rx,S-y, Px,4Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,4Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,4Ry,S-x
(2,6)				Py,Rx,S-y, Px,5Ry,S-x	Py,Rx,S-y, Px,5Ry,S-x
(2,7)					Py,Rx,S-y, Px,6Ry,S-x
(3,1)	Py,2Rx,S-y	Py,2Rx,S-y	Py,2Rx,S-y	Py,2Rx,S-y	Py,2Rx,S-y
(3,2)	Py,2Rx,S-y, P-x,Ry,Sx	Py,2Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,Ry,S-x
(3,3)	Py,2Rx,S-y, P-x,2Ry,Sx	Py,2Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,2Ry,S-x
(3,4)		Py,2Rx,S-y, Px,3Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,3Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,3Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,3Ry,S-x
(3,5)			Py,2Rx,S-y, Px,4Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,4Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,4Ry,S-x
(3,6)				Py,2Rx,S-y, Px,5Ry,S-x	Py,2Rx,S-y, Px,5Ry,S-x

座標	1×1×2 解法	1×1×3 解法	1×1×4 解法	1×1×5 解法	1×1×6 解法
(3,7)					Py,2Rx,S-y, Px,6Ry,S-x
(4,1)	Px,Sx	Py,3Rx,S-y	Py,3Rx,S-y	Py,3Rx,S-y	Py,3Rx,S-y
(4,2)	Px,Ry,Sx	Py,3Rx,S-y, P-x,Ry,Sx	Py,3Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,3Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,3Rx,S-y, Px,Ry,S-x
(4,3)	Px,2Ry,Sx	Py,3Rx,S-y, P-x,2Ry,Sx	Py,3Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,3Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,3Rx,S-y, Px,2Ry,S-x
(4,4)		Px,3Ry,Sx,P- y, R-x,Sy	Py,3Rx,S-y, Px,3Ry,S-x	Py,3Rx,S-y, Px,3Ry,S-x	Py,3Rx,S-y, Px,3Ry,S-x
(4,5)			Py,3Rx,S-y, Px,4Ry,S-x	Py,3Rx,S-y, Px,4Ry,S-x	Py,3Rx,S-y, Px,4Ry,S-x
(4,6)				Py,3Rx,S-y, Px,5Ry,S-x	Py,3Rx,S-y, Px,5Ry,S-x
(4,7)					Py,3Rx,S-y, Px,6Ry,S-x
(5,1)		Px,Sx	Py,4Rx,S-y	Py,4Rx,S-y	Py,4Rx,S-y
(5,2)		Px,Ry,Sx	Py,4Rx,S-y, P-x,Ry,Sx	Py,4Rx,S-y, Px,Ry,S-x	Py,4Rx,S-y, Px,Ry,S-x
(5,3)		Px,2Ry,Sx	Py,4Rx,S-y, P-x,2Ry,Sx	Py,4Rx,S-y, Px,2Ry,S-x	Py,4Rx,S-y, Px,2Ry,S-x
(5,4)		Px,3Ry,Sx	Py,4Rx,S-y, P-x,3Ry,Sx	Py,4Rx,S-y, Px,3Ry,S-x	Py,4Rx,S-y, Px,3Ry,S-x
(5,5)			Px,4Ry,Sx,P- y, R-x,Sy	Py,4Rx,S-y, Px,4Ry,S-x	Py,4Rx,S-y, Px,4Ry,S-x
(5,6)				Px,5Ry,Sx, P-y,2R-x,Sy	Py,4Rx,S-y, Px,5Ry,S-x
(5,7)					Px,6Ry,Sx,P-y, 3R-x,Sy
(6,1)		Py,Rx,S-y, Px,Sx	Px,Sx	Py,5Rx,S-y	Py,5Rx,S-y

座標	1×1×2 解法	1×1×3 解法	1×1×4 解法	1×1×5 解法	1×1×6 解法
(6,2)		Py,Rx,S-y, Px,Ry,Sx	Px,Ry,Sx	Py,5Rx,S-y, P-x,Ry,Sx	Py,5Rx,S-y, Px,Ry,S-x
(6,3)		Py,Rx,S-y, Px,2Ry,Sx	Px,2Ry,Sx	Py,5Rx,S-y, P-x,2Ry,Sx	Py,5Rx,S-y, Px,2Ry,S-x
(6,4)		Py,Rx,S-y, Px,3Ry,Sx	Px,3Ry,Sx	Py,5Rx,S-y, P-x,3Ry,Sx	Py,5Rx,S-y, Px,3Ry,S-x
(6,5)			Px,4Ry,Sx	Py,5Rx,S-y, P-x,4Ry,Sx	Py,5Rx,S-y, Px,4Ry,S-x
(6,6)				Px,5Ry,Sx,P-y, R-x,Sy	Py,5Rx,S-y, Px,5Ry,S-x
(6,7)					Px,6Ry,Sx,P-y, 2R-x,Sy
(7,1)			Py,Rx,S-y, Px,Sx	Px,Sx	Py,6Rx,S-y
(7,2)			Py,Rx,S-y, Px,Ry,Sx	Px,Ry,Sx	Py,6Rx,S-y, P-x,Ry,Sx
(7,3)			Py,Rx,S-y, Px,2Ry,Sx	Px,2Ry,Sx	Py,6Rx,S-y, P-x,2Ry,Sx
(7,4)			Py,Rx,S-y, Px,3Ry,Sx	Px,3Ry,Sx	Py,6Rx,S-y, P-x,3Ry,Sx
(7,5)			Py,Rx,S-y, Px,4Ry,Sx	Px,4Ry,Sx	Py,6Rx,S-y, P-x,4Ry,Sx
(7,6)				Px,5Ry,Sx	Py,6Rx,S-y,P-x, 5Ry,Sx
(7,7)					Px,6Ry,Sx,P-y, R-x,Sy
(8,1)			Py,2Rx,S- y,Px,Sx	Py,Rx,S-y,Px,Sx	Px,Sx
(8,2)			Py,2Rx,S-y, Px,Ry,Sx	Py,Rx,S-y, Px,Ry,Sx	Px,Ry,Sx
(8,3)			Py,2Rx,S-y, Px,2Ry,Sx	Py,Rx,S-y, Px,2Ry,Sx	Px,2Ry,Sx

座標	1×1×2 解法	1×1×3 解法	1×1×4 解法	1×1×5 解法	1×1×6 解法
(8,4)			Py,2Rx,S-y, Px,3Ry,Sx	Py,Rx,S-y, Px,3Ry,Sx	Px,3Ry,Sx
(8,5)			Py,2Rx,S-y, Px,4Ry,Sx	Py,Rx,S-y, Px,4Ry,Sx	Px,4Ry,Sx
(8,6)				Py,Rx,S-y, Px,5Ry,Sx	Px,5Ry,Sx
(8,7)					Px,6Ry,Sx
(9,1)				Py,2Rx,S-y,Px,Sx	Py,Rx,S-y,Px,Sx
(9,2)				Py,2Rx,S-y, Px,Ry,Sx	Py,Rx,S-y, Px,Ry,Sx
(9,3)				Py,2Rx,S-y, Px,2Ry,Sx	Py,Rx,S-y, Px,2Ry,Sx
(9,4)				Py,2Rx,S-y, Px,3Ry,Sx	Py,Rx,S-y, Px,3Ry,Sx
(9,5)				Py,2Rx,S-y, Px,4Ry,Sx	Py,Rx,S-y, Px,4Ry,Sx
(9,6)				Py,2Rx,S-y, Px,5Ry,Sx	Py,Rx,S-y, Px,5Ry,Sx
(9,7)					Py,Rx,S-y, Px,6Ry,Sx
(10,1)				Py,3Rx,S-y,Px,Sx	Py,2Rx,S-y, Px,Sx
(10,2)				Py,3Rx,S-y, Px,Ry,Sx	Py,2Rx,S-y, Px,Ry,Sx
(10,3)				Py,3Rx,S-y, Px,2Ry,Sx	Py,2Rx,S-y, Px,2Ry,Sx
(10,4)				Py,3Rx,S-y, Px,3Ry,Sx	Py,2Rx,S-y, Px,3Ry,Sx
(10,5)				Py,3Rx,S-y, Px,4Ry,Sx	Py,2Rx,S-y, Px,4Ry,Sx
(10,6)				Py,3Rx,S-y, Px,5Ry,Sx	Py,2Rx,S-y, Px,5Ry,Sx

座標	1×1×2 解法	1×1×3 解法	1×1×4 解法	1×1×5 解法	1×1×6 解法
(10,7)					Py,2Rx,S-y, Px,6Ry,Sx
(11,1)					Py,3Rx,S-y, Px,Sx
(11,2)					Py,3Rx,S-y, Px,Ry,Sx
(11,3)					Py,3Rx,S-y, Px,2Ry,Sx
(11,4)					Py,3Rx,S-y, Px,3Ry,Sx
(11,5)					Py,3Rx,S-y,Px,4Ry,Sx
(11,6)					Py,3Rx,S-y, Px,5Ry,Sx
(11,7)					Py,3Rx,S-y, Px,6Ry,Sx
(12,1)					Py,4Rx,S-y, Px,Sx
(12,2)					Py,4Rx,S-y, Px,Ry,Sx
(12,3)					Py,4Rx,S-y, Px,2Ry,Sx
(12,4)					Py,4Rx,S-y, Px,3Ry,Sx
(12,5)					Py,4Rx,S-y, Px,4Ry,Sx
(12,6)					Py,4Rx,S-y, Px,5Ry,Sx
(12,7)					Py,4Rx,S-y, Px,6Ry,Sx