

投稿類別:

自然科技組

篇名:

小拼圖，大數學：探索 T puzzle 的對稱性

隊名:

四塊拼天下

作者:

王昱臻 新北市崇林國中 八年五班

葉育鳴 新北市崇林國中 八年十六班

指導老師:

楊佳鳳 老師

謝孟琪 老師

壹、前言

一、研究動機

在數學教室的櫃子上，擺放著一個由四塊木板組成的 T-puzzle。每次上課前，我們總會忍不住去挑戰它，想辦法把拼塊組成一個完整的「T」。雖然最後都能成功，但心裡始終有個疑問：為什麼這四塊木頭只能拼成「T」字，而不能隨意拼成其他的英文字母呢？

這個疑問讓我們開始思考，T-puzzle 的設計裡一定藏有某些數學上的巧思。例如：每一塊的面積是否經過精確計算？它們的形狀之間有什麼關係？拼湊的方式是否具有唯一性，還是可以延伸出其他的圖形？因此，我們決定以 T-puzzle 作為研究主題，運用數學的方法來分析它的對稱性與拼湊的可能性。我們希望能透過這項研究，找到 T-puzzle 的數學祕密，同時體會到數學不僅存在於課本裡，更隱藏在生活中的遊戲與樂趣之中。

每次上課前我們都會去玩 T puzzle 這個教具，我們都可以拼出 T（如圖一），但我想為什麼不能拼出其他的字母或形狀，這些圖形是否能拼出各種對稱圖形，因此我們決定將 T puzzle 作為我們小論文的研究主題。



二、研究目的

- （一） 解出獨數一格數學解題競賽第五十四期中關於 T-puzzle 的題目的答案。
- （二） 探討可以用 T puzzle 拼出的點對稱圖形。
- （三） 探討可以用 T puzzle 拼出的線對稱圖形。
- （四） 探討可以用 T puzzle 拼出的是點對稱圖形也是線對稱圖形。

貳、文獻探討

一、名詞解釋

（一）T-puzzle 定義

T 字拼圖是一種由四個多邊形組成的拼圖，它們可以拼成一個大寫的「T」字。這四個部分通常是一個等腰直角三角形、兩個直角梯形和一個不規則五邊形。

（二）線對稱圖形的定義

若一個圖形沿著一條直線對折，兩邊圖形完全重合，該圖形就稱為線對稱圖形，而該直線就稱為對稱軸，而對折後對應的點以及線段就稱為對稱點、對稱線段。

（三）對稱軸定義

指一圖形為線對稱或點對稱的時候，圖形以對稱軸對折後能與另一半重合。

（四）對稱角定義

指一個圖形沿著對稱軸對折後與原圖形相重合的角稱為對稱角。

（五）對稱點定義

指一個圖形沿著對稱軸對折後與原圖形相重合的點稱為對點。

（六）點對稱圖形的定義

點對稱圖形，又稱中心對稱圖形，是指將圖形照著中心對稱點旋轉 180 度，而旋轉後的圖形會和原本的圖形重合，而這個點就稱為中心對稱點。我們可用這項定義來推論圖形是否為點對稱圖形。

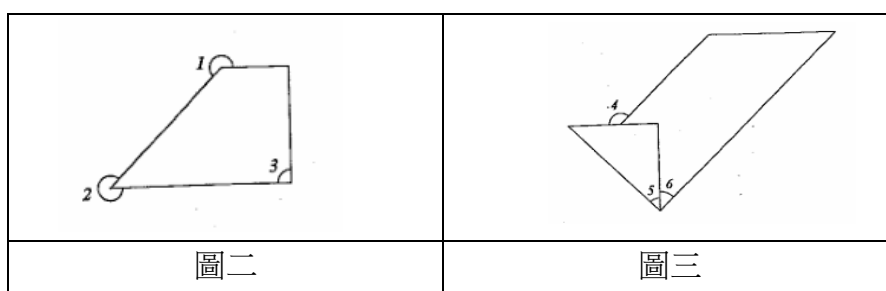
（七）外部角的定義

1. 由一塊積木組成的幾何圖形，各邊線段在圖外的形成的的夾角稱為外部角，如（圖二）中的 $\angle 1$ 或 $\angle 2$ 。

2. 由 2 塊以上的積木，邊與邊緊密結合後，所產生的新圖形，此圖形的各邊線段在圖外形成的的夾角叫外部角如（圖三）的 $\angle 4$ 。

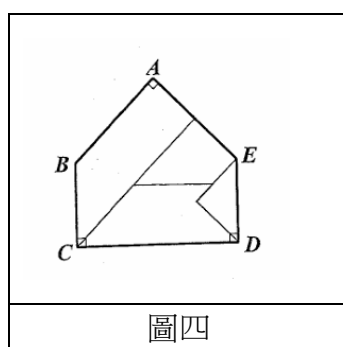
（八）內部角的定義

1. 由一塊積木組成的幾何圖形，各邊線段在圖內的形成的的夾角稱為內部角，如（圖二）中的 $\angle 3$ 。
2. 由 2 塊以上的積木，邊與邊緊密結合後，所產生的新圖形，此圖形的各邊線段在圖內形成的夾角叫內部角如（圖三）的 $\angle 5 + \angle 6$ 。



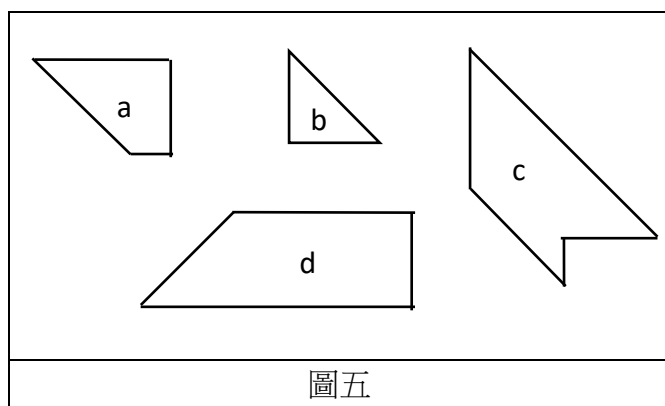
用這組拼圖能夠拼出一個有三個內部角為直角的線對稱凸五邊形

ABCDE 如（圖四）。

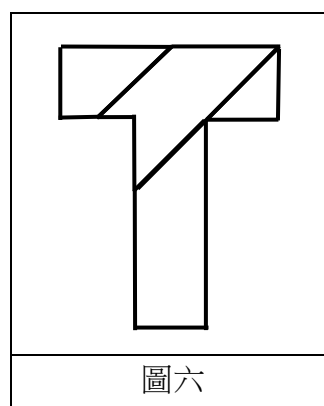


二、根據獨數一格數學解題競賽第五十四期的題目

T-puzzle 是一種幾何拼圖，由四個多邊形所組成（見圖五）。這些圖形能夠完整拼合成一個大寫字母 T（如圖六）。四個拼圖分別為：一個等腰直角三角形（b）、一個凹五邊形（c），以及兩個形狀不相同的直角梯形（a 與 d），而凹五邊形的擺放位置則會是關鍵。



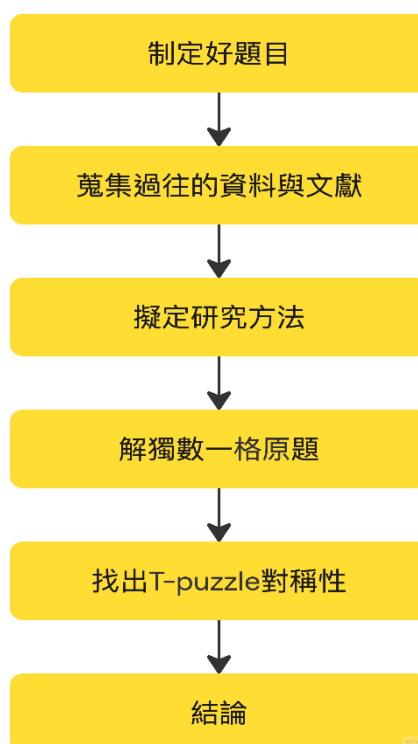
圖五



圖六

參、研究過程與方法

一、研究架構圖



二、解獨數一格數學解題競賽第五十四期的題目

(一) T puzzle 是由四塊積木所組成，請問這四塊積木各自的內部角共有幾種，度數分別為多少？

我們分別計算出如圖五中積木 a、b、c 和 d 的內部角度數，分別為：

$$a : 360^{\circ} - (90^{\circ} + 90^{\circ} + 45^{\circ}) = 135^{\circ} \text{ 或 } 360^{\circ} - (90^{\circ} + 90^{\circ} + 135^{\circ}) = 45^{\circ}$$

$$\text{或 } 360^{\circ} - (90^{\circ} + 45^{\circ} + 135^{\circ}) = 90^{\circ}$$

$$b : (180^{\circ} - 90^{\circ}) \div 2 = 45^{\circ} \text{ 或 } 180^{\circ} - 45^{\circ} - 45^{\circ} = 90^{\circ}$$

$$c : 540^{\circ} - (270^{\circ} + 45^{\circ} + 45^{\circ} + 45^{\circ}) = 135^{\circ} \text{ 或 } 540^{\circ} - (135^{\circ} + 45^{\circ} + 45^{\circ} + 45^{\circ}) = 270^{\circ}$$

$$\text{或 } 540^{\circ} - (270^{\circ} + 135^{\circ} + 45^{\circ} + 45^{\circ}) = 45^{\circ}$$

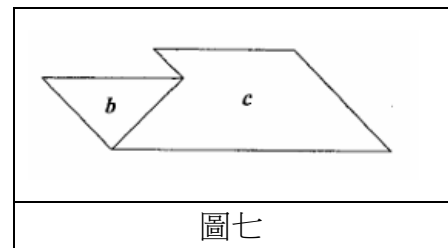
$$d : 360^{\circ} - (90^{\circ} + 90^{\circ} + 45^{\circ}) = 135^{\circ} \text{ 或 } 360^{\circ} - (90^{\circ} + 90^{\circ} + 135^{\circ}) = 45^{\circ}$$

$$\text{或 } 360^{\circ} - (90^{\circ} + 45^{\circ} + 135^{\circ}) = 90^{\circ}$$

(二) (圖七)是由(圖五)的積木b與積木c組成的幾何圖形，寫出此圖形有幾種外部角？

我們計算出外部角的度數如下：

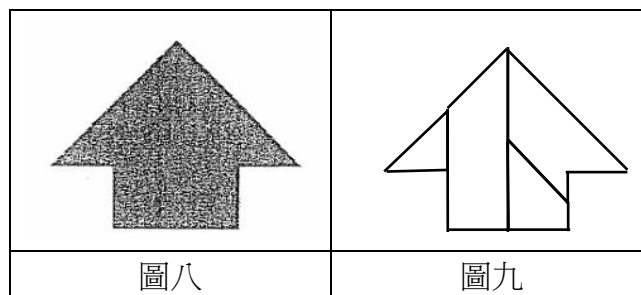
1. $360^{\circ} - 45^{\circ} = 315^{\circ}$
2. $360^{\circ} - 135^{\circ} = 225^{\circ}$
3. $360^{\circ} - (270^{\circ} + 45^{\circ}) = 45^{\circ}$



圖七

(三) (圖八)是由T puzzle的四塊積木所組成，請將它的拼法找出來，並拼出來。

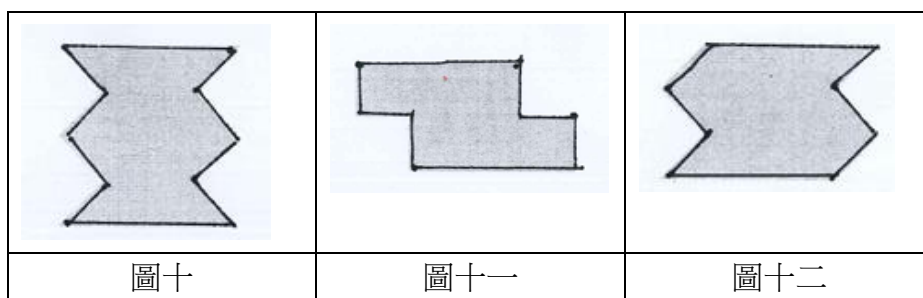
我們拼出來的結果如(圖九)：



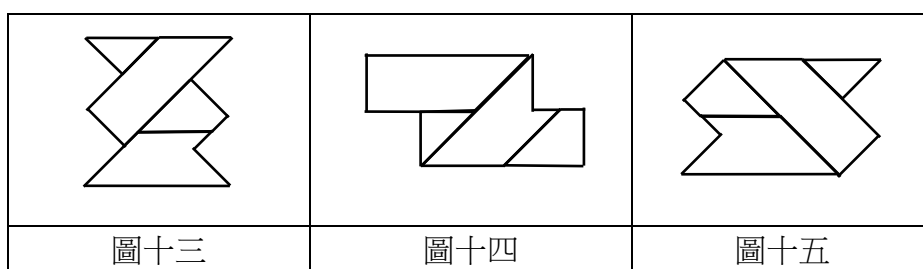
圖八

圖九

(四) 承上題，下方三個圖都可由(圖八)沿著對稱軸切割翻轉拼出，請找到他們的拼法，並畫出。



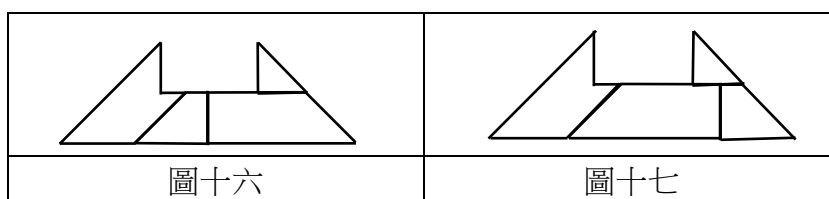
我們用 T-puzzle 積木拼出答案，如下圖十三至圖十五的拼法。



這題我們發現：這三個圖形都是由兩塊積木組成像半個箭

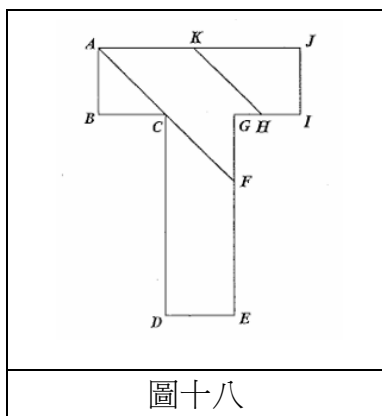
頭的圖形進行旋轉後組合而成。

(五) 請利用四塊積木，拼出一個線對稱圖形，此圖形恰擁有四個 45 度的內部角、兩個 90 度的外部角。



我們的排法如上圖十六、十七 因 T-puzzle 有兩個梯形，交換位置角度不變，所以拼法有兩種。

(六) (圖六) 的比例求 $\overline{CD}$ 與 $\overline{GH}$ 分別為多少單位長。



圖十八

解：因為三角形 ABC 為等腰直角三角形，

所以 $\overline{BC} = 1$ ，且 $\overline{AK} = \sqrt{2}$ ，且 $\overline{AK} = \overline{CH}$

（因為 AKCH 為平行四邊形），則 $\overline{GH} = \sqrt{2} - 1$ ，

故所求為 $\overline{CD} = 3$ 、 $\overline{GH} = \sqrt{2} - 1$ 。

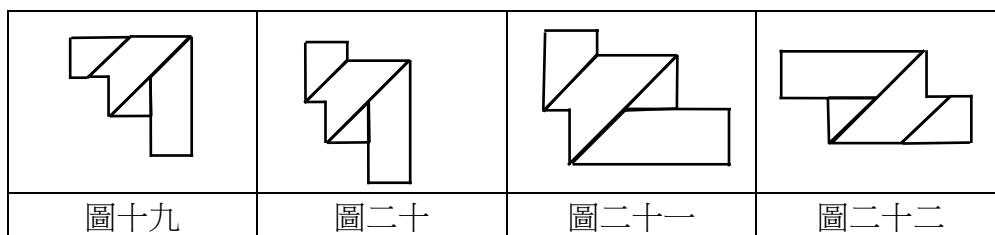
（七）試著說明，能否將四個積木組合成一個正方形？若可以，請畫出拼法；若不行，請寫下理由。

我們討論出以下原因：

1. 正方形的定義是：四個內角都是直角，且四個邊都等長，正因為 T-puzzle 四塊積木中最長與次長的兩個邊分屬不同積木，又因為不可切斷緣故，所以無法構成四邊等長的正方形。
2. 這六塊積木總面積為 6，若要構成一個正方形，勢必先找到能組成邊長為 $\sqrt{6}$ 的四個，才能構成正方形的邊長，但因為此四塊積木不管如何拼湊都無法組成 $\sqrt{6}$ ，所以不能組成正方形。

（八）如（圖十八）若 $\overline{AB}$ 為 1 單位長，請試著說明，能否將四塊積木組合成一個周長為 12 單位長的多邊形？若可以，請畫出所有可能的拼法；若不行，請寫下理由。

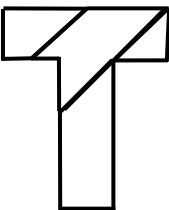
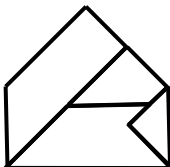
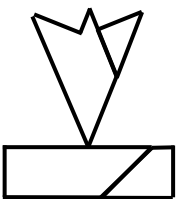
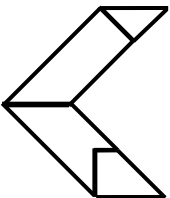
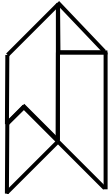
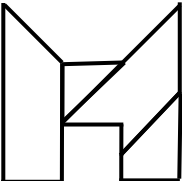
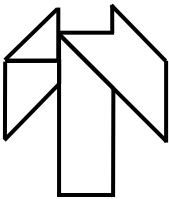
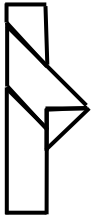
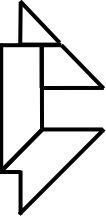
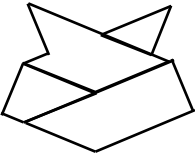
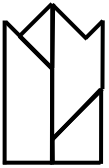
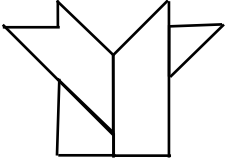
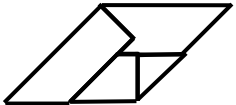
我們的拼法如下圖十九、二十、二十一、二十二。



三、尋找用 T-puzzle 可拼出圖形中的點對稱與線對稱

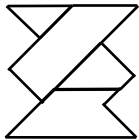
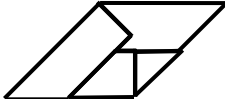
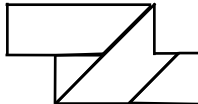
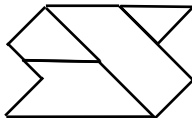
我們用學校的 T puzzle 教具拼出以下的圖形。

(一) 線對稱圖形

		
圖二十三	圖二十四	圖二十五
		
圖二十六	圖二十七	圖二十八
		
圖二十九	圖三十	圖三十一
		
圖三十二	圖三十三	圖三十四
		
圖三十五	圖三十六	圖三十七

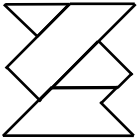
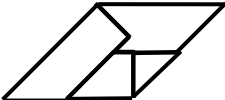
（二）點對稱圖形

點對稱圖形：我們用學校的 T puzzle 教具拼出以下的圖形。

		
圖三十八	圖三十九	圖四十
		
圖四十一	圖四十二	

我們用 T-puzzle 教具將圖形拼出來後描在紙上，將教具轉 180 度，如果可以完全重合，那就是點對稱圖形。

（三）同時是線對稱及點對稱的圖形

		
圖四十三	圖四十四	圖四十五

我們發現（圖五）中的 a 和 c 可以組成一個平行四邊形，b 和 d 也可以組成與 a 和 c 相等的平行四邊形，將這兩個平行四邊形相組，就拼出（圖二十七），剩下的圖形是我們用 T-puzzle 教具拼出來後描在紙上，再剪下來對折，如果可以對折，就是線對稱圖形。

肆、結論

本研究以 T-puzzle 拼圖為主題，我們發現雖然它僅由四塊簡單的幾何圖形組成，但卻蘊含了面積守恆、空間想像、對稱性以及幾何轉換等數學觀念。我們總共找出 15 個線對稱，5 個點對稱，3 個同時具備點對稱及線對稱的圖形，在解題與尋找對成圖形的過程中，我們需要不斷嘗試旋轉、翻轉與組合，實際上這是一種訓練邏輯思維與策略選擇的過程。所以我們覺得 T-puzzle 不僅能作為數學課堂的教具，幫助學生培養專注力與問題解決能力，也能應用於益智遊戲設計及心理學研究。與七巧板相比，T-puzzle 雖然塊數較少，卻能設計的很有巧思。綜合而言，T-puzzle 不僅是一個趣味遊戲，更是一種融合數學、教育與生活應用的工具，顯示出簡單的幾何拼圖也能啟發人們在有限條件下創造多種可能，進一步提升學習興趣與創意思維。

伍、參考文獻資料

- 一、蘭雅國中獨數一格數學解題競賽第五十四期。
- 二、均一教育平臺 點對稱圖形 <https://www.youtube.com/watch?v=H-tgi8Lrfqc>
- 三、T-puzzle 定義、由來、比例 https://en.wikipedia.org/wiki/T_puzzle
- 四、洪有情（主編）(2025)。國民中學數學課本第二冊。康軒文教。