投稿類別：自然科學 (數學)

篇名：
探索小星星的邊角世界

作者：

楊昀臻。鳳林國中。9 年 2 班
江芝其。鳳林國中。9 年 3 班

指導老師：
陳志彥　老師

壹、前言：

八年級下學期數學課曾學到兩個題目：(1)五角星星的五個內角和共幾度 ？ (2)六角星星的六個內角和共幾度 ？突發奇想，除了童年熟悉的五角星、六角星外，還會有七角星、八角星、九角星、十角星………嗎 ？其內角和各幾度 ？若是正多角星，其每個內角各幾度 ？若想用尺規、量角器畫一個給定邊長的正多角星，要如何畫出 ？而這些正多角星 ，與人類歷史古文明甚至宗教是否有運用或關連性 ？

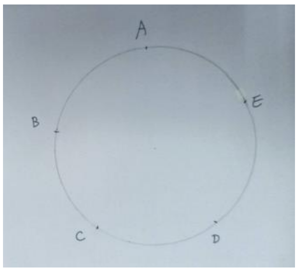
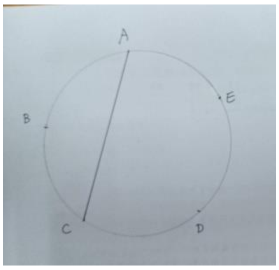
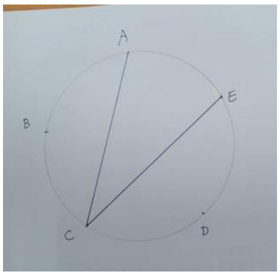
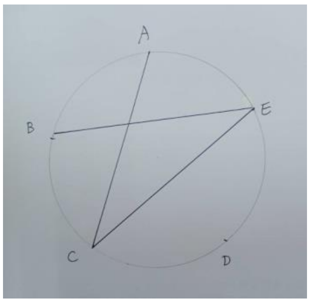
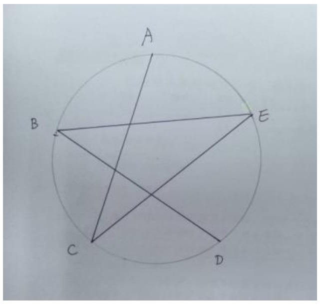
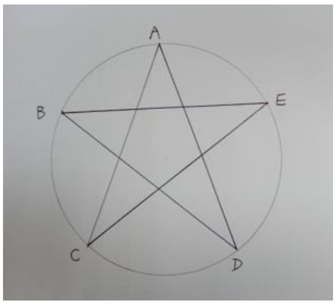
貳、正文：

一、研究器材 ： 圓規、直尺、量角器、筆、電算器、三角函數查表(查表網站如下一列所示)

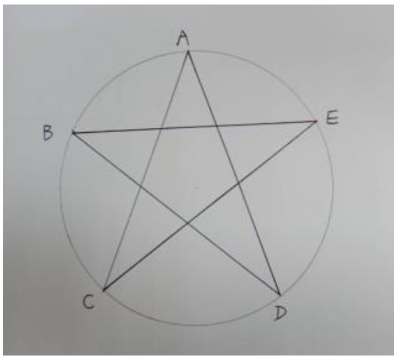
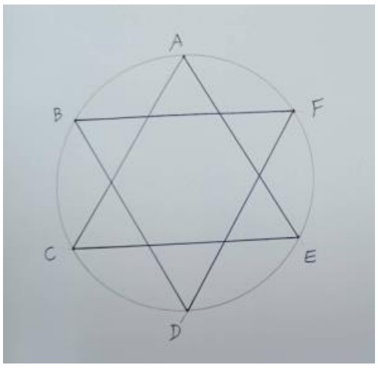
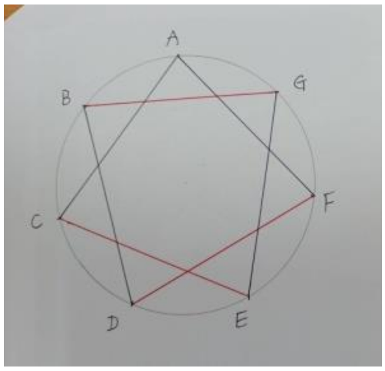
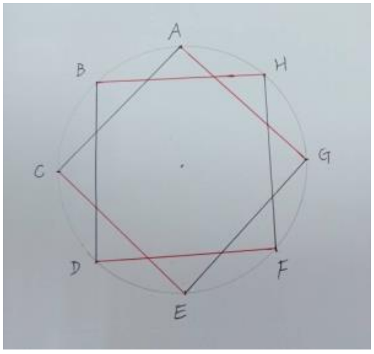
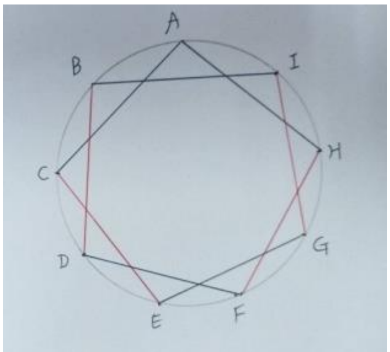
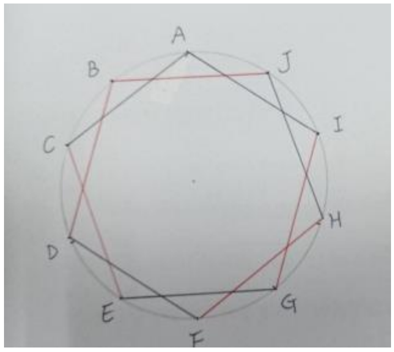
https://mathsolver.microsoft.com/zh-Hant/trigonometry-calculator

二、特別說明：傳統的「尺規作圖」乃指：無刻度的直尺、圓規，且不可使用量角器，而本次研究，並非傳統尺規作圖，而是使用「有刻度的直尺、圓規及量角器」等三個工具並用。

首先 ,利用尺規畫一個五角星星 ,步驟如下所示 ：

 【圖一】	 【圖二】	 【圖三】
如【圖一】:用圓規畫一圓 ，並在圓周上取五點，依逆時針方向依序標示 A、B、C、D、E 五點	如【圖二】: 用直尺將 A 點連至 C 點(基本上都是跳一個點連接)	如【圖三】: 用直尺，將 C 點連至 E 點(基本上都是跳一個點連接)
 【圖四】	 【圖五】	 【圖六】
如【圖四】: 用直尺，將 E 點連至 B 點(基本上都是跳一個點連接)	如【圖五】: 用直尺，將 B 點連至 D 點(基本上都是跳一個點連接)	如【圖六】: 用直尺，將 D 點連回至 A 點(基本上都是跳一個點連接)

以上方法可發現 ，以此方法畫奇數角星(5 角星、7 角星、9 角星、11 角星……)，可以一路連到底，回到出發點，但以此方法畫偶數角星(6 角星、8 角星、10 角星、12 角星……)，則無法回到出發點，會變成兩個多邊形的組合(複合多邊形)，如下表所示：

		
【圖七】五角星	【圖八】六角星	【圖九】七角星
【連接路徑】： A → C → E → B → D → A	【連接路徑】： (1) A → C → E → A (2) B → D → F → B	【連接路徑】： A → C → E → G → B → D → F → A
從 A 點出發後，先連至 C 點、再連至 E 點、再連至 B、再連至 D，最後再連回 A 點(出發點) 最後發現五角星可一路連到底 ,沒有任何點沒有連到	1.從 A 點出發後，先連至 C 點、再連至 E 點、再連回 A。 2.結果發現，B、D、F 點沒有被連接到，於是只好從剛剛沒有被連到的任一點(如 B 點)出發，再連至 D，最後再連回 A 點(出發點)	1. 從 A 點出發後，先連至 C 點、再連至 E、再連至 G、再連至 B，再連至 D、再連至 F、最後再連回 A 點(出發點) 最後發現七角星可一路連到底 ,沒有任何點沒有連到
		
【圖十】八角星	【圖十一】九角星	【圖十二】十角星
【連接路徑】: (1) A → C → E→ G → A (2) B → D → F → H → B	【連接路徑】： A → C → E → I → B → D → F → H → A	【連接路徑】: (1) A→C→E→G→I→A (2) B→D→F→H→J→B
1.從 A 點出發後，依序連至 C、E 點、再連至 E 點、再連回 A。 2.結果發現，B、D、F、H 點沒有連接到，於是只好從剛剛沒有被連到的任一點(如 B 點)出發，再連至 D，再連至 F，再連至 H，最後再連回 B 點(出發點)	1. 從 A 點出發後，依序連接至 C、E、I、B、D、F、最後再由 F 連回 A 點(出發點) 最後發現九角星可一路連到底 ,沒有任何點沒有連到	1.從 A 點出發後，依序連至 C、E 點、再連至 E 點、再連回 A。 2.結果發現，B、D、F、H 點沒有連接到，於是只好從剛剛沒有被連到的任一點(如 B 點)出發，再連至 D，再連至 F，再連至 H，最後再連回 B 點(出發點)

從上表發現，六角星星是由兩個三角形組合而成(如【圖七】：△ACE 和△BDF)，八角星星是由兩個四邊形組合而成(如【圖十】：四邊形 ACEG 和四邊形 BDFH)、十角星星由兩個五邊形組合而成(如【圖十二】：五邊形 ACEGI 和五邊形 BDFHJ)。

即若為偶數角星星(6 角星星、8 角星星、10 角星星等)，均由兩個多邊形構成，若是 N 角星星，則是由兩個【$\frac{N}{2}$邊形】組成，(6 角星星由兩個三角形、8 角星星由兩個四邊形、10 角星星由兩個五邊形構成，以此類推……)，若是奇數角星(5 角星星、7 角星星、9 角星星等)，則無此現象，可一路連到最後。

正當我們研究出如何畫星星時，同時也搜尋維基百科，意外發現「五角星、六角星、七角星八角星、、十角星與十二角星」都分別有詳細資料，除了關於數學的部分，更發現這些星星與人類歷史文明甚至宗教有很大關聯：

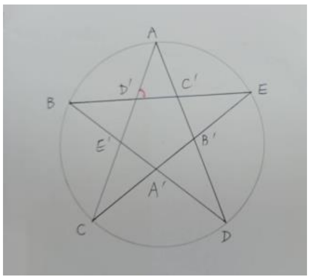
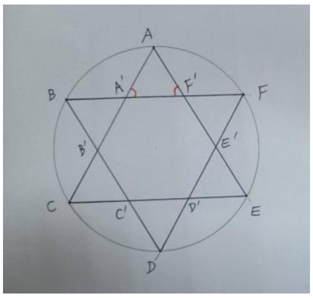
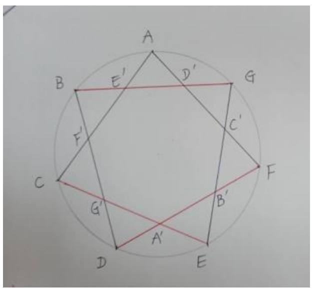
西方文化中，五芒星指有五个前端的星形，是大家最熟悉的星形，而六芒星被称为「达维狄之星」，是犹太教的象徵。至于有七个前端的七芒星，则被神秘学视为意义上更复杂的芒星，力量也更强大的图案。十二芒星则为天星，是“正”与“善”的代表。如果说左翼的话，在基督教的肖像学中，基督就被认为是：“上帝的右手”。通常就代表着“正直与公正”。左手却通常被代表“迂回与狡黠”。

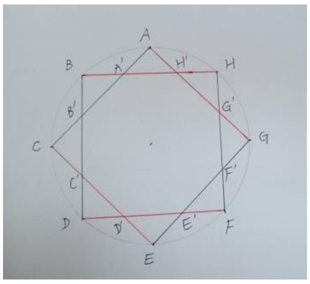
(斜體字網路出處 https://zhidao.baidu.com/question/2075849393601876628.html)

關鍵字	人類歷史古文明與宗教關聯性
五角星	1. *又稱五芒星，有許多國家的國旗設計都包含五角星：如智利、賴比瑞亞、衣索比亞、摩洛哥、越南、朝鮮民主主義人民共和國、中華人民共和國、美國等等。* 2. *五角星是魔術的代表符號，是非猶太教徒的符號。初期基督教會亦有用五角星代表耶穌的五個傷口，但現在則多代表異教徒和撒但崇拜者。* (網路資料出處： https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%94%E8%A7%92%E6%98%9F)
六角星	1. *又稱六芒星，在此種用法中是猶太教和猶太身份的公認的象徵，也被通俗地稱為猶太星，或「大衛之星」。以色列、卡拉曼侯國的國旗上均繪有六角星。* *(網路資料出處：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%AD%E8%A7%92%E6%98%9F)* 2. *《古兰经》有云，"真主曾在六日内创造了天地万物"，六角星就是这一思想的最佳体现。六角星图案即传说中的"所罗门封印"，也叫"六芒星"、"犹太星"，就是今天以色列国旗上那两个正三角形交叠在一起的图案，它在伊斯兰艺术中非常常见。* (網路資料出處：https://zhuanlan.zhihu.com/p/363118719)
七角星	1.*又稱七芒星，西元 1901 年起澳洲國旗為藍底、左上角為英國國旗。藍色體現環繞澳洲的大海。白色大六角星被稱為「澳大利亞聯邦之星」，其六個角代表澳洲的六個州；其餘部分有四顆較大的白色七角星與一顆較小的白色五角星，代表的是太平洋上空的南十字星座，到 1908 年後巴布亞領地加入後，白色六角星改為七角星。* (網路資料出處： https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%BE%B3%E5%A4%A7%E5%88%A9%E4%BA%9A%E5%9B%BD%

	E6%97%97)
八角星	1. *八角星是一個伊斯蘭文化中的標誌，形狀是兩個疊加的正方形，常見於伊斯蘭國家的建築、旗幟和徽章中。這個圖案最初出現在《古蘭經》中，用在古蘭經全文 60 節中每節四分之一結束處，以便輔助記憶。* 2. *國徽中出現八角星的國家有：土庫曼斯坦國徽（2003 年起）、烏茲別克斯坦國徽（1992 年起）、卡拉卡爾帕克斯坦國徽（1992 年起）。建築中出現八角星的有：馬來西亞雙峰塔、香港中環中心（但與伊斯蘭教沒有任何關連）* (網路資料出處：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%AB%E8%A7%92%E6%98%9F_(%E4%BC%8A%E6%96%AF%E5%85%B0)
十角星	1. *又稱十芒星，十角星常出現在伊斯蘭教使用的綺理花磚上。* (網路資料出處 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%81%E8%A7%92%E6%98%9F)
十二角星	1. *諾魯的國旗上有一枚白色 12 角星,象徵島嶼上居住的 12 支玻里尼西亞與密克羅尼西亞部落，星星為白色，代表歷史上諾魯的主要礦物資原為硝酸鹽。* (出處: Flying Colors 國旗的故事：世界國旗的設計、歷史與文化 / P.61)

接下來，我們好奇的是各種「正 N 角星星」的內角和多少 ？ 每一個內角各多少 ？
下表分別就「正五角星星、正六角星星、正七角星星、正八角星星」，依序探討：

	如左圖 :正五邊形*A' B' C' D' E'* 中,因為多邊形外角和為 360°，所以正五邊形的每一個外角為$\frac{360}{5}=72°$，故∠AD' C' =∠AC' D' =72°，所以∠A=180°-72°×2=36°，所以正五角星星的每個內角為 36°，其內角和為 36°×5=180°。
	如左圖 :正六邊形*A' B' C' D' E' F'* 中,因為多邊形外角和為 360°，所以正六邊形的每一個外角為$\frac{360°}{6}=60°$，故∠AA' F' =∠AF' A' =60°度，所以∠A=180°-60°×2=60°，所以正六角星星的每個內角為 36°，因為正六角星星有六個內角，其內角和為 60°×6=360°度。
	如左圖 :正七邊形*A' B' C' D' E'* F' G' 中,因為多邊形外角和為 360°，所以正七邊形的每一個外角為$\frac{360°}{7}$，故∠AE' D' =∠AD' E' =$\frac{360°}{7}$，所以∠A=180°-2×$\frac{360°}{7}$=$\frac{540}{7}$°，所以正七角星星的每個內角為$\frac{540°}{7}$，因為正七角星星有七個內角，故其內角和為$\frac{540°}{7}$×7=540°。



如左圖 :正八邊形$A'B'C'D'E'F'G'H'$中,因為多邊形外角和為 360°，所以正五邊形的每一個外角為$\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$，故∠AA’H’ = ∠AH’A’ =45°，所以∠A=180°-45°x2=90°，因此正八角星星的每個內角為 90°，因為正八角星星有八個內角，其內角和為 90°x8=720°。

綜合上表可知：

- ✧ 正五角星星的每個內角 $=(180-\frac{360}{5}\times2)^\circ$，內角和 $=5\times(180-\frac{360}{5}\times2)^\circ=180^\circ$
- ✧ 正六角星星的每個內角 $=(180-\frac{360}{6}\times2)^\circ$，內角和 $=6\times(180-\frac{360}{6}\times2)^\circ=360^\circ$
- ✧ 正七角星星的每個內角 $=(180-\frac{360}{7}\times2)^\circ$，內角和 $=7\times(180-\frac{360}{7}\times2)^\circ=540^\circ$
- ✧ 正八角星星的每個內角 $=(180-\frac{360}{8}\times2)^\circ$，內角和 $=8\times(180-\frac{360}{8}\times2)^\circ=720^\circ$

故正 N 角星星的每個內角 $=(180-\frac{360}{N}\times2)^\circ$

正 N 角星星的內角和 $=N(180-\frac{360}{N}\times2)^\circ=N(\frac{180N-720}{N})^\circ=(180N-720)^\circ$

針對正五角星至正二十角星的每一個內角及內角和 ,列表如下：

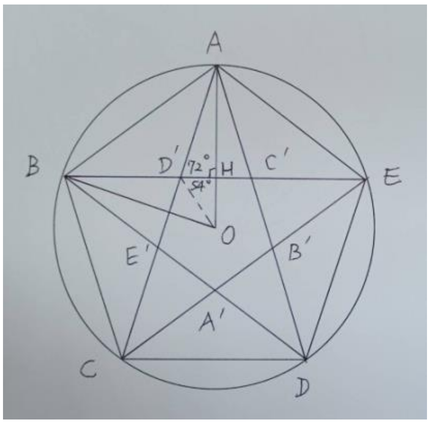
正多角星	星星的每個內角		相差	內角和
正 N 角星	$180^\circ-2\times(\frac{360}{N})^\circ$	近似值		$(180N-720)^\circ$
正五角星	$180^\circ-2\times(\frac{360^\circ}{5})=180^\circ-144^\circ$	36°		180°
正六角星	$180^\circ-2\times(\frac{360^\circ}{6})=180^\circ-120^\circ$	60°	24	360°
正七角星	$180^\circ-2\times(\frac{360^\circ}{7})=180^\circ-\frac{720^\circ}{7}$	77.14°	17.14	540°
正八角星	$180^\circ-2\times(\frac{360^\circ}{8})=180^\circ-90^\circ$	90°	12.86	720°
正九角星	$180^\circ-2\times(\frac{360^\circ}{9})=180^\circ-80^\circ$	100°	10	900°
正十角星	$180^\circ-2\times(\frac{360^\circ}{10})=180^\circ-72^\circ$	108°	8	1080°
正 12 角星	$180^\circ-2\times(\frac{360^\circ}{12})=180^\circ-60^\circ$	120°	5.45	1440°

我們還很好奇的是，如果我們想用直尺、圓規和量角器，畫出一個邊長為 1 公分的正五角星，要如何用圓規、量角器、直尺畫出來 ？

根據前面的畫法，若是要畫邊長為 1 公分的正五角星，一開始即是先用圓規畫一個圓(本研究小組暫且將此圓稱為星星的「外接圓」)，再利用量角器將圓周等分為五等分，最後以直尺連接即可。但最棘手的是，首先要求出「此圓的半徑多少」？ 經研究討論後發現，需要到三角函數，並使用網路的計算機查出三角函數之值，再利用電算器算出圓半徑的值。

下表分別針對「正五角星、正六角星、正八角星」進行研究探討其外接圓半徑長 ：

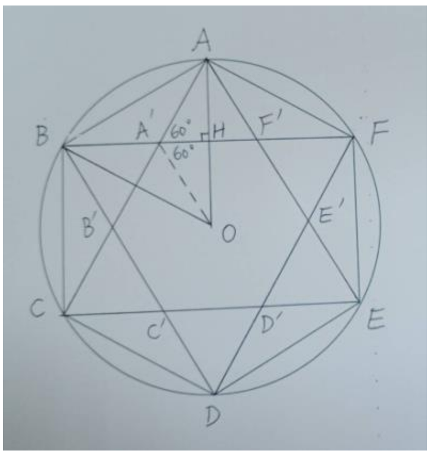
<table>
<tr><th>正 N 角星</th><th>研究與演算過程</th></tr>
<tr><td>



</td><td>

如左圖 ：O 為圓心
正五角星中，星星的每一邊均等於 1 公分，意即 ：
$AD' = D'B = BE' = E'C = CA' = A'D = DB' = B'E = EC' = C'A = 1$
又五邊形$A'B'C'D'E'$為正五邊形，正五邊形的每個外角為$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$，故∠AD’E=72°，∠ED’C=180°-72°=108°(正五邊形的每個內角)，∠ED’O=$\frac{108^\circ}{2}$=54°
因為，此外接圓的半徑長= $\overline{AO}$= $\overline{AH}$+ $\overline{OH}$
在直角△AD’H中，根據三角函數，$\overline{AH}$ =sin72°、$\overline{D'H}$=cos72°，在直角△OHD’中，$\overline{OH}$= $\overline{D'H}$ tan54°= cos72°× tan54°
故此外接圓半徑= $\overline{AO}$= $\overline{AH}$+ $\overline{OH}$= sin72°+cos72°×tan54°

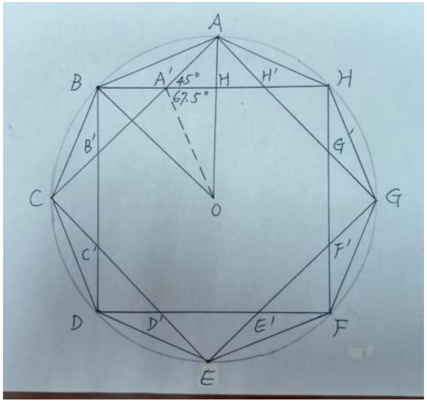
</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

如左圖 ：O 為圓心
正六角星中，星星的每一邊都等於 1 公分，意即 ：
$AA' = A'B = BB' = B'C = CC' = C'D = DD' = D'E = EE' = E'F = FF' = F'A = 1$
又六邊形$A'B'C'D'E'F'$為正六邊形，正六邊形的每個外角為$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$，故∠AA’F=60°，∠FA’C=180°-60°=120°度(正六邊形的每個內角)，∠HA’O=$\frac{120^\circ}{2}$=60°
因為，此外接圓的半徑長= $\overline{AO}$= $\overline{AH}$+ $\overline{OH}$
在直角△AA’H中，根據三角函數，$\overline{AH}$=sin60°、$\overline{A'H}$=cos60°，
在直角△OHA’中， $\overline{OH}$=$\overline{AH'}$×tan60°= cos60°×tan60°

</td></tr>
</table>

	故此外接圓半徑= $\overline{AO}$= $\overline{AH}$+ $\overline{OH}$= sin60°+cos60°xtan60°
	如左圖 ：O 為圓心 正八角星中，星星的每一邊都等於 1 公分，意即 ： $AA' = A'B = BB' = B'C = CC' = C'D = DD' = D'E = EE' = E'F = FF'$ $= F'G = GG' = G'H = HH' = H'A = 1$ 又八邊形$A'B'C'D'E'F'G'H'$為正八邊形，正八邊形的每個外角為$\frac{360}{8} = 45°$，故∠AA'H=45°，∠HA'C=180-45=135°(正八邊形的每個內角)，∠HA'O=$\frac{135°}{2}$=67.5° 因為，此外接圓的半徑長= $\overline{AO}$= $\overline{AH}$+ $\overline{OH}$ 在直角△AA'H中，$\overline{AH}$=sin67.5°、$\overline{A'H}$=cos67.5°，在直角△OHA'中， $\overline{OH}$= $\overline{AD'}$xtan60°= cos60°xtan60° 故此外接圓半徑= $\overline{AO}$= $\overline{AH}$+ $\overline{OH}$= sin60° + cos60°× tan60°

由以上表可知：

- ✧ 要畫出每邊長為 1 的正五角星，外接圓半徑長= sin72° + cos72° × tan54°
- ✧ 要畫出每邊長為 1 的正六角星，外接圓半徑長= sin60° + cos60° × tan60°
- ✧ 要畫出每邊長為 1 的正八角星，外接圓半徑長= sin45° + cos45° × tan67.5°

由以上歸納得知，要畫出每邊長為 1 的正 N 角星，其**外接圓半徑長公式為：**

sin(正 N 邊形每一外角)+cos(正 N 邊形每一外角)xtan(正 N 邊形每一內角之半)

下表分別列出邊長為 1 公分時，正 5 角星~正 20 角星之外接圓半徑近似值：
(下表僅列出可以整除 360 之 N 值)

正 N 角星	正 N 邊形每一外角	正 N 邊形每一內角	外接圓半徑長
正五角星	72°	108°	sin72° +cos72° xtan54° ≒ 0.9510 + 0.3090 × 1.3763 ≒ 1.3763
正六角星	60°	120°	sin60° +cos60° xtan60° ≒ 0.8660 + 0.5000 × 1.7320 ≒ 1.7320
正八角星	45°	135°	sin45°+ cos45°xtan67.5° ≒ 0.7071 + 0.7071 × 2.4142 ≒ 2.4142
正九角星	40°	140	sin40° +cos40° × tan70° ≒ 0.6428 + 0.7660 × 2.7475 ≒ 2.7474
正十角星	36°	144°	sin36° +cos36° × tan72° ≒ 0.5878 + 0.8090 × 3.0770 ≒ 3.0771

正 12 角星	30°	150°	sin30° +cos30° xtan75° ≒ 0.5000 + 0.8660 × 3.7321 ≒ 3.7320

由上表歸納的近似值中，意外發現：(請見彩色標註的部分)

✧	正五角星外接圓半徑 ≒0.9510 + 0.3090 × 1.3763 ≒ 1.3763
✧	正六角星外接圓半徑 ≒0.8660 + 0.5000 × 1.7320 ≒ 1.7321
✧	正九角星外接圓半徑 ≒0.6428 + 0.7660 × 2.7475 ≒ 2.7474
✧	正十角星外接圓半徑 ≒0.5878 + 0.8090 × 3.0770 ≒ 3.0771

因此，我們十分懷疑，外接圓半徑公式中：sin(正 N 邊形每一外角)+cos(正 N 邊形每一外角)xtan(正 N 邊形每一內角之半)即是等於 tan(正 N 邊形每一內角之半) .

遂請教老師如何解決？ 老師建議我們利用高中的三角函數公式來推導，結果如下 ：

假設∠A 為正 N 邊形每一內角角度的一半，則正 N 邊形每一外角角度=(180-2A)

則**外接圓半徑**

= sin(正 N 邊形每一外角)+cos(正 N 邊形每一外角)xtan(正 N 邊形每一內角之半)

= sin (180-2A) + cos(180-2A)× tanA (將紅線和藍線部份分別代入三角函數的補角公式)

= sin2A -cos2A tanA (將紅線和藍線部分分別代入三角函數的二倍角公式)

= 2sinAcosA -(2$\cos^2$A-1)× tanA

= tanA〔$\frac{2\sin A\cos A}{\tan A}$ − (2 $\cos^2$A -1)〕 (將 tanA 提出來，)

= tanA〔$\frac{2\sin A\cos A\times\cos A}{\sin A}$ − (2 $\cos^2$A -1)〕 (將 tanA = $\frac{\sin A}{\cos A}$ 代入)

= tanA〔2$\cos^2$A − (2 $\cos^2$A -1) 〕

= tanA × 1

= tanA

由以上推導得知，每一邊長均為 1 的正 N 角星，外接圓半徑確實等於 tanA (∠A 為正 N 邊形每一內角角度的一半)

參、結論 ：

一、欲畫出一個正 N 角星星，若 N 為奇數(正五角星星、正七角星星、正九角星星……等)，則可從出發點一路畫回到出發點。

二、欲畫出一個正 N 角星星，若 N 為偶數(正六角星星、正八角星星、正十角星星……等)，則若從某點出發連接線段，則有一半的點沒有畫到，必須再從其中一個未被畫到的點出發，再畫一次，才能將所有頂點都畫到，方能成為一個完整的星星

三、正 N 角星星，若 N 為偶數(正六角星星、正八角星星、正十角星星……等)，必定是由兩個正多邊形所組成，(例如：正六角星乃由兩個正三角形組成，正八角星乃由兩個正四邊形組成，正十角星乃由兩個正五邊形組成)。亦即，若 N 為偶數，該正 N 角星星，則必

由兩個【正$\frac{N}{2}$邊形】組成。

四、 正 N 角星星的每個內角 $= (180-\frac{360}{N}\times 2)°$

五、 正 N 角星星的內角和 $= N(180-\frac{360}{N}\times 2)° = N(\frac{180N-720}{N})° = (180N-720)°$

六、 倘若要畫出每邊長為 1 的正 N 角星星，則此正 N 角星星的外接圓半徑為 tanA (∠A 的角度為正 N 邊形每個內角度數之半)

七、承上，同理，倘若要畫出每邊長為 a 的正 N 角星星，依據相似形對應邊成比例，則此正 N 角星星的外接圓半徑= a×tanA (∠A 的角度為正 N 邊形每個內角度數之半)

八、為了驗證、確認以上結論是否正確 ?

現在，我們想利用「直尺、圓規、量角器」畫一個【每邊長均為 2 公分的正 7 角星星】:

1. 首先求此星星之**<u>外接圓半徑</u>**：

   因為，正七邊形的每個外角度數=$\frac{360°}{7} ≒ 51.43°$

   故正七邊形的每個內角度數 $≒ 180°-51.43° ≒ 128.57°$

2. 根據以上結論，正 7 角星星的外接圓半徑 $≒ 2 \times \tan(\frac{128.57}{2})° ≒ 2 \times \tan(64.29°)$

   $≒ 2 \times 2.0769 ≒ 4.15$(公分)

3. 由上得知，外接圓半徑為 4.15 公分，故以 4.15 公分為半徑長用圓規畫一圓。
4. 接著以量角器將圓周等分為七等份(每等分的弧度數大約 51.5°)，所得的 7 個點，依逆時針旋轉，依序標註為 A、B、C、D、E、F、G 等七點
5. 從 A 出發，依序連接至 C→E→G→B→D→F→最後再連回到 A 點
6. 最後用直尺量正七角星星的每邊長是否非常接近 2 公分 ?

   (因為這是近似值，未必全然精準)

7.依此方法 ，即可計算出任意邊長的正多角星之外接圓半徑長，再以直尺(有刻度的)、圓規與量角器輔助， 繪製出該正多角星。

肆、引註資料 :

1. 康軒出版社國中數學 2 下課本 (康軒出版社編輯團隊 著 / 康軒出版社)
2. 翰林版高中數學【二上】課本 (翰林出版社編輯團隊 著 / 翰林出版社)
3. 睡夢中學三角 (木棉著 / 下文化出版社)
4. Flying Colors 國旗的故事：世界國旗的設計、歷史與文化
   (Robin Jacobs 著 / 蔡伊斐 譯 / 麥浩斯出版社)
5. 數學女孩秘密筆記：圓圓的三角函數篇 (結城浩 著 / 陳朕疆 譯 / 世茂出版社)
6. 三角函數：三角函數的基礎入門書 少年伽利略 2 (日本牛頓出版社編輯團隊 著 / 黃經良譯，日本牛頓出版獨家授權台灣人人出版社出版))
7. 維基百科網站關鍵字搜尋 : 正五角星、正六角星、正七角星、正八角星(伊斯蘭)、正十角星、正十二角星

8. 網路三角函數計算機：
https://mathsolver.microsoft.com/zh-Hant/trigonometry-calculator