投稿類別：自然科學類

篇名：

同形同螺？

作者：

沈忻穎。花蓮縣立國風國中。國二 14 班

王宜澄。花蓮縣立國風國中。國二 12 班

黃彗紜。花蓮縣立國風國中。國二 06 班

陳品妤。花蓮縣立國風國中。國二 06 班

指導老師：

潘恩勤老師

壹、 前言

一、研究動機

本研究探討正多邊形經不同的排列方式而作出多層不同規律排列的正多邊形後，其分割出圖形間的每層正多邊形對應頂點連接後所形成的軌跡與等角螺線之間的關聯性。

我們發現日常生活中會出現螺線，像是鸚鵡螺及蝸牛的殼切面等，想也聯想到，畫纏繞畫時利用正多邊形向內依循某種固定的規則重複且規律地畫出多層正多邊形，其圖形會產生螺旋的效果。我們想了解這些螺線中的規律性質，同時也產生一個問題：**如何利用正多邊形畫出螺旋線**？

在第 61 屆數學科展「同形同螺」的作品中，我們研究的螺旋規則為正 n 邊形在等比例內縮與固定距離內縮的形況下，隨著內縮率越來越小，多層正多邊形頂點連線所建構出來的螺旋線會越來越接近 「等角螺線」，因此作品取名為同形同螺，即**同樣的形狀下不同內縮方式卻建構出一樣的螺線（等角螺線）**。而在這次作品中，以相同正多邊形為前提下，是否可以藉由別種排列方式來找出其他形式的螺旋線？這是我們想要研究的主題，因此在名稱上加一個問號。

二、研究目的

（一） 研究同一種正多邊形可以排列出幾種螺線。

（二） 研究各種排列方式中螺線的形式。

（三） 探討所找出的螺線與等角螺線關係。

三、研究方法

先以尺規作圖畫出正三角形，接續以其中一邊畫出原先邊長一半的正三角形，同樣步驟不斷畫出多層正三角形，找出可以畫出螺線的排列方式後，以線上軟體 GeoGebra（內文簡稱 ggb）畫出圖形並嘗試將規則推廣至其他正多邊形，最後研究圖形中的相關數學性質。

四、研究流程

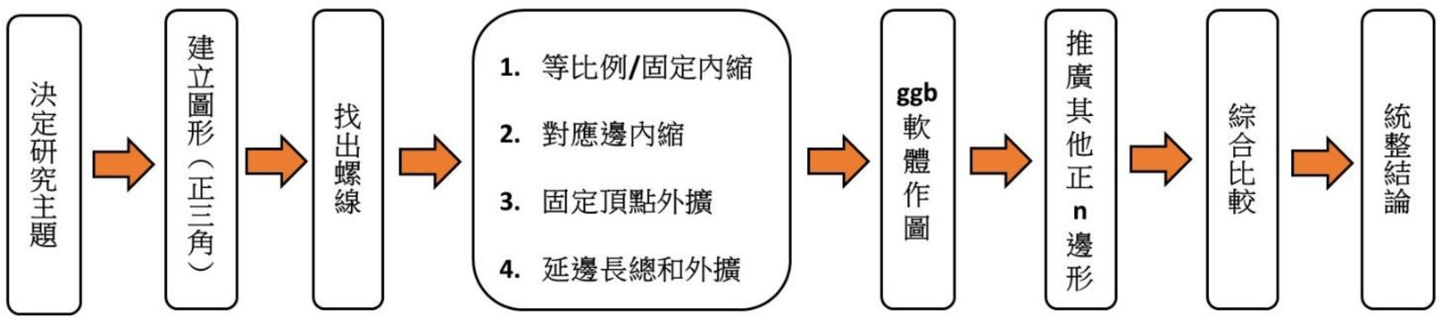


圖 1 研究流程圖

貳、　正文

一、文獻探討

（一）　等角螺旋

在趙文敏教授的文章中，我們查到關於等角螺旋的敘述，

若一曲線在每個點 P 的切向量都與某定點 O 至此點 P 所成的向量夾成一定角，且定角不是直角，則此曲線稱為一等角螺線 (equiangular spiral)。

（取自：文獻資料四）

在本研究中，我們發現由正多邊形所發展出的螺線，在縮放率越來越小的形況下，其多層正多邊形對應頂點的連線軌跡（內文以螺線表示）會趨近於等角螺線。

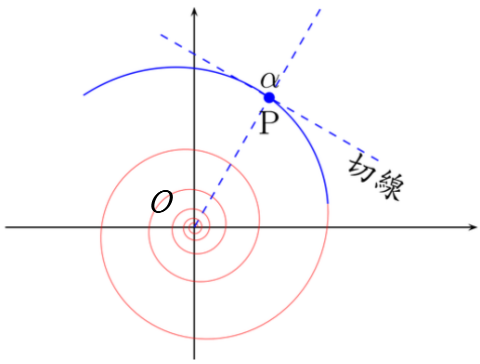


圖 2 等角螺線示意圖

（取自：文獻資料四）

（二）　黃金比例螺線

黃金螺旋與黃金比例具有密切關係。它是藉由通過黃金矩形即黃金比例的長寬比向外擴張，再將圖形頂點依序連接，所繪製而成的連續弧形，構成出流線形的螺旋。因其螺旋狀曲線與鸚鵡螺外殼上的螺線極為相似，又稱之為黃金螺線。(黃金矩形的意思即每層矩形的邊長分別為費氏數列 1、1、2、3、5、8，數列中的每個數字都是由前兩個數字相加而成的，而與上一層矩形的邊長比例為**黃金比例約 1.618**。)（取自：文獻資料三）

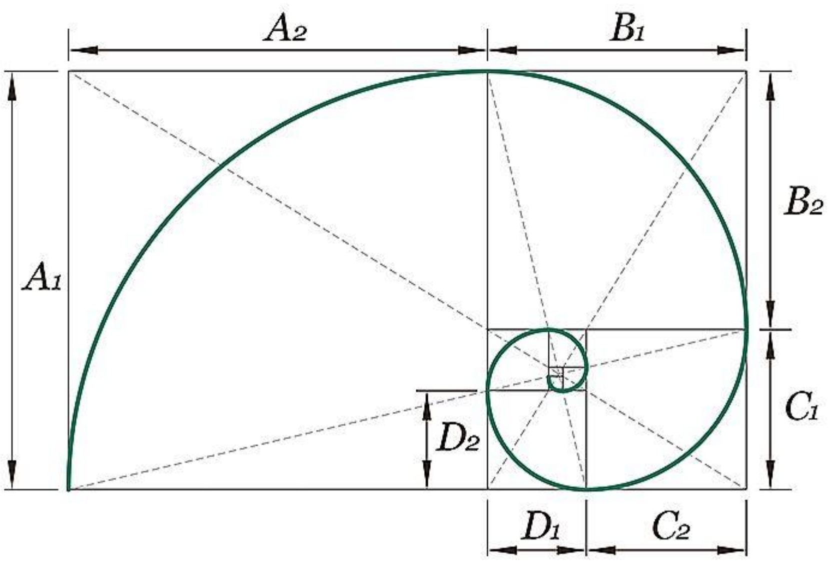


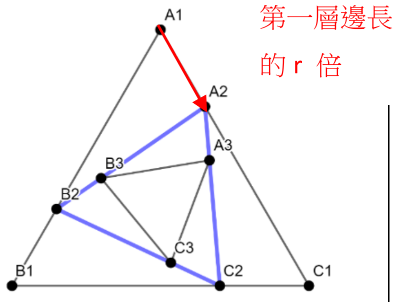
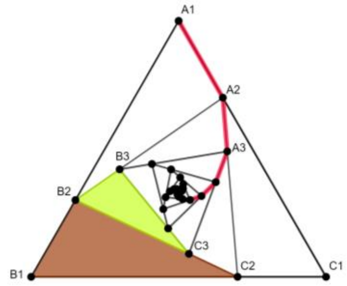
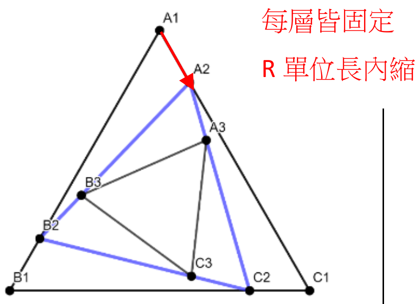
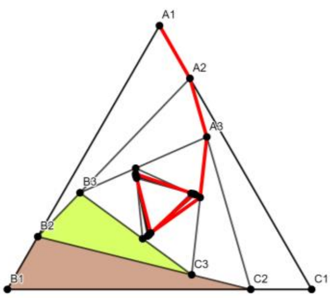
圖 3 黃金比例螺線圖

（取自：文獻資料三）

二、正多邊形的排列規則介紹

（一） 等比例／固定長度內縮

表 1 等比例／固定長度之圖形規則與螺線說明

<table>
<tr><td>規則說明</td><td>圖示皆以 ggb 作圖</td></tr>
<tr><td>等比例內縮：
繪出一個邊長為 a 的正三角形，即第一層圖形以 n1 表示，接著以點 A1 沿著 $\overrightarrow{A1C1}$ 的方向，平移第一層圖形邊長的 r 倍（r 為等比例內縮的縮放比例）的距離，即點 A2。依此類推，以同樣的規則畫出多層圖形。</td><td>
</td></tr>
<tr><td>等比例內縮之螺線：
當圖形依此內縮規則向中心點迭代出多層圖形，每層圖形之頂點 An 所連成的曲線稱為該圖形的螺線。在此行式之下，當縮放倍率 r 無限小時，此螺線會無窮地接近中心點且近似於等角螺旋。</td><td>
</td></tr>
<tr><td>固定長度內縮：
繪出一邊長為 a 的正三角形，即第一層圖形以 n1 表示。以點 A1 沿著 $\overrightarrow{A1C1}$ 的方向平移單位向量 R 倍的距離，即點 A2。依此類推，以同樣的規則畫出多層圖形。</td><td>
</td></tr>
<tr><td>固定長度內縮之螺線：
當圖形依此內縮規則向中心迭代出多層圖形後，每層圖形之頂點 An 所連成的曲線稱為該圖形的螺線。在此形式之下，當縮放倍率 R 無限小時，此螺線亦會無窮地接近中心點且近似於等角螺旋，但與等比例內縮螺線的差別是固定內縮螺線的逼近速度較慢。</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">等比例內縮與固定縮的螺線之綜合比較：
1. 在圖層無限迭代下，等比例內縮所呈現的圖形會趨近於中心點，固定內縮的圖形反而會縮成邊長接近為 R 之小正 n 邊形。
2. 在等比例內縮圖形中，頂點對應軌跡的偏移角度皆固定；而在固定內縮圖形中，頂點對應軌跡的偏移角度需迭代多層後才會穩定，且會趨近於正 n 邊形的外角。
3. 在 r/R 無窮小時，兩者之對應頂點軌跡十分接近等角螺線，但固定內縮逼近速度較慢。</td></tr>
</table>

（二） 對應邊逆時針內縮

如圖形中最外圍的正三角形為第一層正三角形，其頂點分別為 A1、B1、C1。

圖形排列規則：

1. 選取第一層圖形的底邊 $\overline{A1B1}$ 的中點（即為 A2），並以 $\overline{A2B1}$ 為底邊畫出第二層正三角形，此時第二層正三角形的頂點分別為 A2、B2（此時 B2 與 B1 共點）、C2。
2. 逆時針方向選取第二層圖形邊長 $\overline{B2C2}$ 的中點（即為 B3），$\overline{B3C2}$ 畫出第三層正三角形。
3. 依此類推，不斷以逆時針方向，以每層正三角形邊長的一半做出下一層的正三角形。

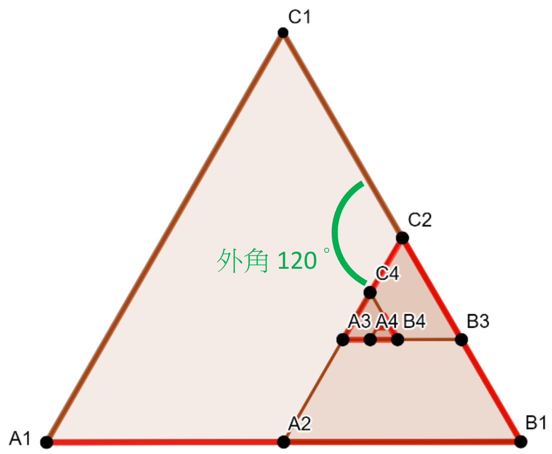


圖 4 對應邊逆時針內縮圖（ggb 作圖）

螺線說明：

1. 正三角對應邊內縮之螺線會以逆時針方向外角 120°旋轉後接續下一層，**可推得正 n 邊形的所發展的螺線每層會以(360/n)°旋轉內縮**。如圖中的螺線為
$\overline{A1B1}$（第一層三角形的邊長）往$\overline{B1C2}$（第二層三角形的邊長）旋轉 120°
$\overline{B1C2}$（第二層三角形的邊長）往 $\overline{C2A3}$（第三層三角形的邊長）旋轉 120°
$\overline{C2A3}$（第三層三角形的邊長）往 $\overline{A3B4}$（第四層三角形的邊長）旋轉 120°
，不斷延續。
2. 對應邊內縮之螺線總長為每層邊長的總和，假設第一層邊長為 1，因為各層邊長皆為上一層的一半，相當於內縮率為 1/2，因此螺線總長為

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

其中 k 為總層數，因此螺線總長相當於公比為 1/2 的無窮等比級數之和趨近於 2。

因此**若內縮率為 r（$0<r<1$），螺線總長將近似於 $\frac{1}{1-r}$，且不論用何種正 n 邊形皆是一樣的結果**。

（三） 固定頂點逆時針外擴

圖形排列規則：

1. 正三角形頂點分別為 A1、B1、C1，而點 D、E、F 分別為正三角形三邊之中點。
2. 以 A1 為中心點，P 為沿著正三角形邊長移動的動點。
3. A1 與 P 點連線，逆時針畫出第二層正三角形。
4. 接著以$\overline{A1P}$: $\overline{A1B1}$為比值 R，在第二層正三角形對應邊的 R 倍處為 P2 點，接著以$\overline{A1P2}$為底邊畫出第三層正三角形，依此類推。
5. 將 B1 與所有動點（即 P、P2、P3…）連線為螺線。

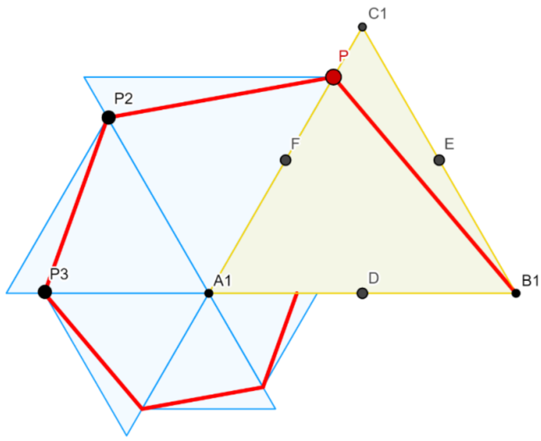
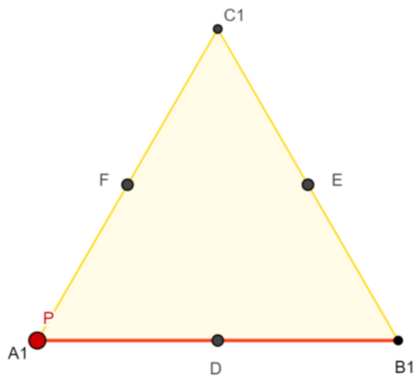
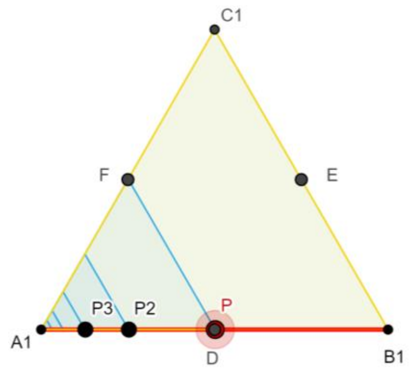
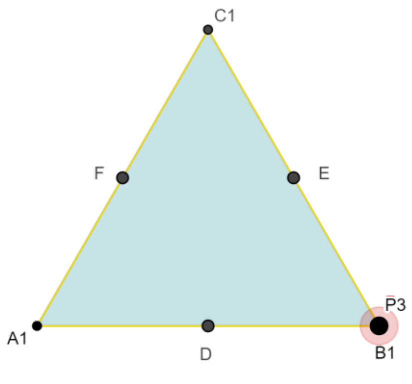
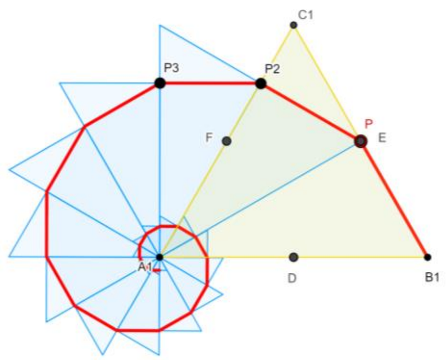


圖 5 固定頂點逆時針外擴圖（ggb 作圖）

我們將圖形的變化整理成六種形式來討論螺線的變化。

表 2 六種形式的螺線（圖中紅線）變化

	
動點 P 與 A1 重疊（即 $\overline{A1P}=0$）時，第二層圖形邊長為 0，相當於不再迭代新圖層。	動點 P 移動至 D 點($\overline{A1B1}$中點)，對應動點(P1、P2、P3……）連線相當於$\overline{A1B1}$。
	
動點 P 移動至 B1。以$\overline{A1P}$為底邊畫出第二層圖形會與第一層重疊，其餘層圖皆會如此。	動點 P 沿著$\overline{B1C1}$至 E 點(中點 P)時。對應動點（P1、P2、P3……）相連形成此圖形的螺線。

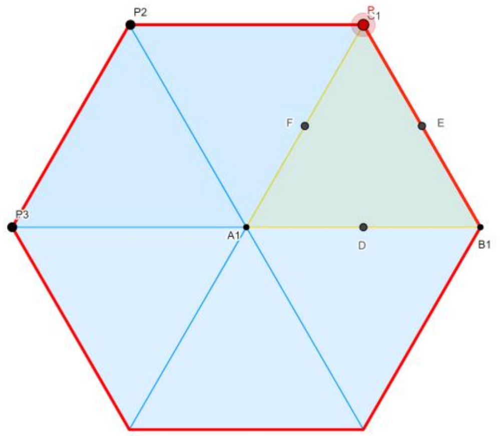
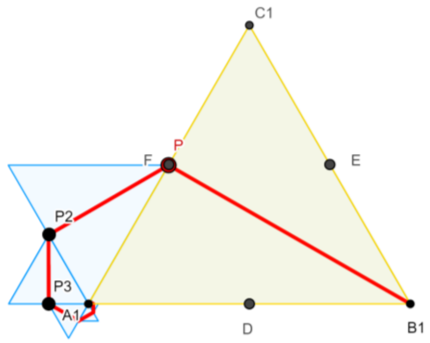
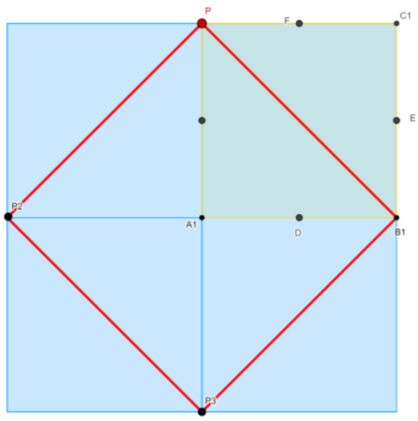
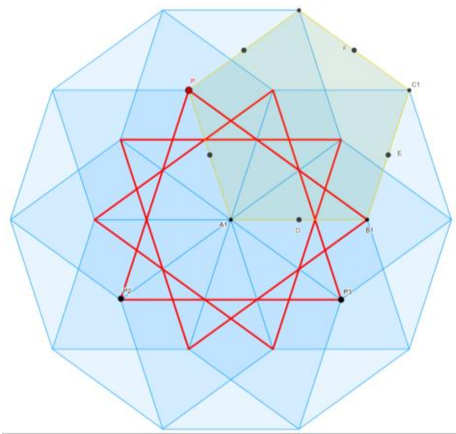
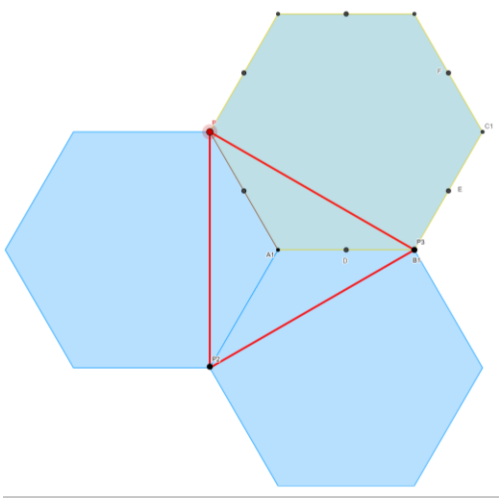
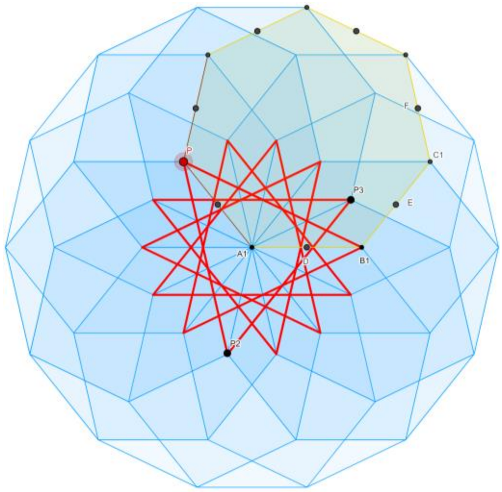
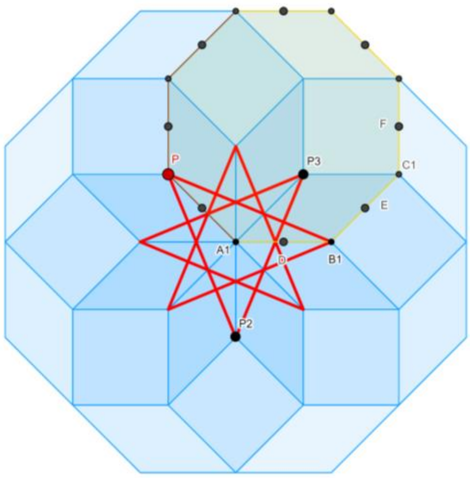
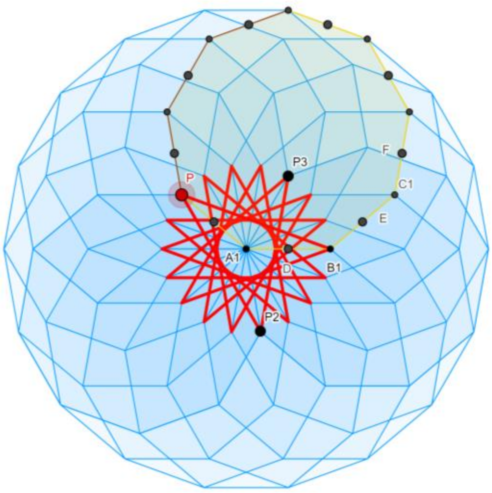
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>動點移動至 C1，$\overline{A1P}$畫出第二層圖形，以此類推。因每層圖形之底邊為前一層正三角形的邊長，所以會形成一個正六邊形。</td>
<td>動點 P 沿著$\overline{C1A1}$至 F 點(中點 P)，$\overline{A1P}$逆時畫出第二層圖形。以此類推畫出多層圖形。每層圖形與 A1 連成底邊的頂點相連形成此圖形的螺線。</td>
</tr>
</table>

表 3 其他正多邊形的特殊圖形變化—當動點移動至正多邊形逆時針數來最後一個頂點時

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>正四邊形：
動點 P 移動至 D1，$\overline{A1P}$畫出第二層圖形，以此類推。因每層圖形之底邊為前一層正四角形的邊長，所以會形成一個正四邊形。</td>
<td>正五邊形：
動點 P 移動至 E1，圖形經迭代後，螺線會形成一個 10 角星（角星的角數為此正多邊形邊長數的 2 倍）。</td>
</tr>
</table>

	
正六邊形： 動點 P 移動至 F1，$\overline{A1P}$畫出第二層圖形，以此類推。因每層圖形之底邊為前一層正六角形的邊長，會產生類蜂窩狀的排列方式。	正七邊形： 動點 P 移動至 G1，圖形經迭代後，螺線會形成一個 14 角星（角星的角數為此正多邊形邊長數的 2 倍）。
	
正八邊形： 動點 P 移動至 H1，$\overline{A1P}$畫出第二層圖形，圖形經迭代後，螺線會形成一個 8 角星（角星的角數為此正多邊形邊長數）。	正九邊形： 動點 P 移動至 I1，$\overline{A1P}$畫出第二層圖形，圖形經迭代後，螺線會形成一個 18 角星（角星的角數為此正多邊形邊長數的兩倍）。

小結：

動點 P 移動至正 n 邊形逆時針數來的最後一個頂點時，當 n 為奇數時，對應頂點軌跡會為 2n 角星；當 n 為偶數時，對應頂點軌跡會為 n 角星（n≠3、6）。

（四） 延著邊長總和外擴排列

圖形排列規則：

在起始邊長為 1 的正三角形中，以其 O 點為中心，其中一邊為底邊往外畫出第二層正三角形，再接續同樣規則，畫出第三層正三角形（第一層至第三層皆為邊長為 1 的正三角形），此時第一層與第三層邊長為一線段，再以此線段為底邊畫出第四層正三角形。以此類推，則這個圖形由小到大、不斷纏繞出多層正三角形，我們得到了一組數列（邊長長度）為 1、1、1、2、2、3、4、5、7、9、12、16……。

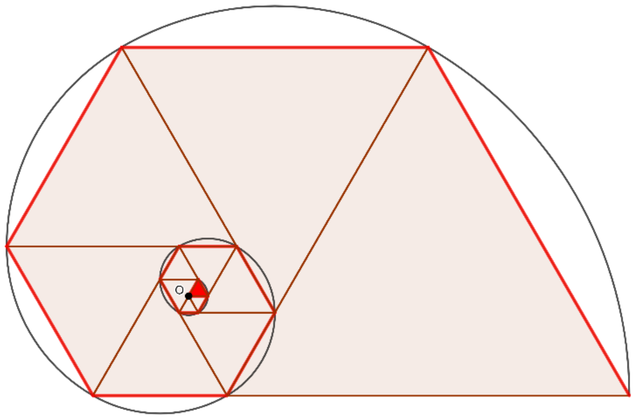


圖 6 沿著邊長總和外擴排列圖
（ggb 作圖）

數列規則：

這數列類似「費氏數列」的規則。費氏數列是由 0 和 1 開始，之後的數則是由前兩項數相加而得出，因此為 0、1、1、2、3、5、8、13、21、34……（事實上，若**正四邊形以此圖形規則排列的邊長數即為費氏數列**）。而我們與費氏數列的差別是我們的數列由 3 個 1 開始，之後數列的規則是由前面第二個數及前第三個數相加而得出（如數列 1、1、1、2、2、3、4、5、7、9、12、16……中，12 是由 5 加 7 而來，16 是由 7 加 9 而來）。

螺線說明：

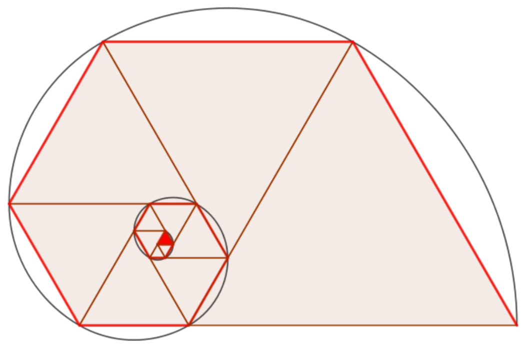
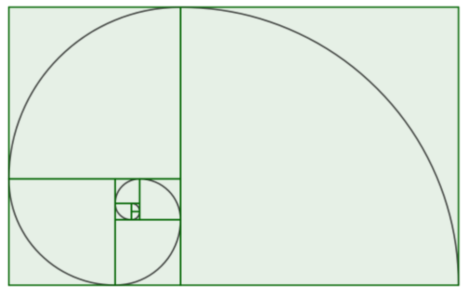
在這個圖形中我們發展出兩種螺線形式。第一種延續先前的螺線模式，即每層邊長連接，如圖形中的紅線，因此螺線總長為數列 1、1、1、2、2、3、4、5、7、9、12、16……的總和。第二種則以每層正三角形邊長為半徑所畫出的 60° 圓弧相連，**其螺線總長為第一種螺線總長的 $\pi/3$ 倍。**

已知弧長公式為$r\theta$，其中$\theta = 60^\circ = \pi/3$。因此第二種螺線總長為

$$\frac{\pi}{3}(1+1+1+2+3+4+5+7+9+12+\cdots) = \frac{\pi}{3}(\text{第一種螺線總長})$$

我們發現正三邊形與正四邊形在此規則下所排列出的螺線圖形有所不同，以下列表格分析比較。

表 4　綜合比較

排列方式	正三角形延邊長外擴排列	正四角形延邊長外擴排列(即黃金比例螺線)
圖形		
數列	1、1、1、2、2、3、4、5、7、9、12、16......	0、1、1、2、3、5、8、13、21、34......
數列規則	當前數字由前二個數及前三個數相加而得出。 以a_n表示該數列中第 n 個數字 則可發現 $a_n = a_{n-3} + a_{n-2}$，$n = 4,5,6, \ldots$	當前數字由之前的兩個數相加而得出。 以b_n表示該數列中第 n 個數字 則可發現 $b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$，$n = 3,4,5, \ldots$
圓弧螺線總長	$\frac{\pi}{3}(\text{各層邊長總和})$	$\frac{\pi}{2}(\text{各層邊長總和})$
比值	$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx 1.33$　（後項：前項之比值） $\frac{a_n}{a_{n-2}} \approx 1.75$　（後項：前二項之比值）	$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx 1.618$　（後項：前項之比值）

正三角形排列之邊長數列比值趨近於1.33，若改成後項與前二項的比，其比值則會趨近於1.75，明顯與正方形排列之邊長數列比值（即費氏數列）不同。**另外這種排列方式在正五邊形之後很難畫出相似的圖形，其主要原因在於其餘正多邊形的兩個內角和不等於180°**，因此這種排列方式在別種正多邊形的發展還需要時間來研究出適合的模式。

參、　結論、其他猜想與未來展望

一、結論

（一）　等比例內縮與固定縮的螺線之綜合比較：

1. 在圖層無限迭代下，等比例內縮所呈現的圖形會趨近於中心點，固定內縮的圖形反而會縮成邊長接近為 R 之小正 n 邊形。

2. 在等比例內縮圖形中，頂點對應軌跡的偏移角度皆固定；而在固定內縮圖形中，偏移角度需迭代多層後才會穩定，且會趨近於正 n 邊形的外角。
3. r/R 無窮小時，兩者對應頂點軌跡十分接近等角螺線，但固定內縮逼近速度較慢。

（二） 對應邊逆時針內縮

1. 正 n 邊形的所發展的螺線每層會以(360/n)°旋轉內縮。
2. 若內縮率為 r（0 < r < 1），螺線總長將近似於 1/(1-r)，且不論用何種正 n 邊形皆是一樣的結果。

（三） 固定頂點逆時針外擴

1. 在正三角形中三個頂點與三邊中點有六種形式的螺線變化。
2. 動點 P 移動至正 n 邊形逆時針數來的最後一個頂點時，當 n 為奇數時，對應頂點軌跡會為 2n 角星；當 n 為偶數時，對應頂點軌跡會為 n 角星（n≠3、6）。

（四） 沿著邊長總和外擴排列

1. 由正三角形沿著邊長總和外擴排列的邊長數列為 $a_n = a_{n-3} + a_{n-2}$，$n = 4,5,6,\ldots$。
2. 由正四邊形沿著邊長總和外擴排列的邊長數列為 $b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$，$n = 3,4,5,\ldots$。
3. 用此排列規則很難畫出其餘正多邊形的排列圖形，其原因在於兩內角和大於 180°。

二、其他猜想

1. 四種排列方式所畫出的螺線間有互相對應的關係，且皆與等角螺線有密切關係。
2. 推測由多層正 n 邊形所排列出的螺線會接近等角螺線，且多層相似多邊形所排列出的螺線也會接近等角螺線。
3. 其他正 n 邊形（n > 4）沿著邊長外擴排列的各層邊長有類似於費氏數列的規則。

三、未來展望

針對這個主題，除了上述猜想問題待驗證之外，還可以討論內文中另外三個圖形排列的規則之面積、邊長、夾角等關係；非正多邊形的延伸討論諸如此類等。**另外，藉由這段時間分析圖形的方法，未來希望可以應用在研究原住民、客家等文化圖騰中的數學美感，期許找出屬於台灣的幾何之美。**

肆、 參考文獻資料

一、 趙文敏，等角螺線及其他，「數學知識」網站資料。

二、 沈忻穎、廖翌辰、陳志宇，同形同螺，第 61 屆花蓮縣科展國中組得獎作品。

三、 黃金螺線用希臘字母 φ 表示黃金比值。取自：https://reurl.cc/zWAjA6。

四、 對數螺線 logarithmic spiral。取自：https://reurl.cc/ZjX5lg。

五、 John Blackwood 。跟大自然學幾何。商周出版。

六、 約翰．布雷克伍德(John Blackwood)。數學也可以這樣學。商周出版。