投稿類別：自然科學類

篇名：

變形積木滾動中之 GeoGebra 遊戲實作

作者：

蔡囷諺。花蓮縣立國風國中。國二 10 班

孟鉉恩。花蓮縣立國風國中。國二 10 班

劉泓佑。花蓮縣立國風國中。國二 10 班

指導老師：

潘恩勤　老師

張烜翰　老師

壹、 前言

一、 研究動機：

滾動積木遊戲是將一塊 1×1×2 尺寸的積木從起點經過立、倒、滾等動作移動至終點的遊戲，而我們主要研究的問題是

「1×1×n 積木在滾動積木遊戲中的移動規則為何？」。

本篇為延續上次科展（第 62 屆）的作品，在上次作品中我們研究出 1×1×n 積木在橫列、一倒一立方形以及最小有解矩形地圖中起點為 (1,1)時的最小步數及其規律。因此這一次我們想找出**當地圖尺寸擴大時，以及當起點為地圖中任意點時（但與終點不同）時，1×1×n 積木在不同類型地圖的走法規則變化**，期許找出一個可以適用的走法通則。最後我們想利用數學軟體 GeoGebra (內文簡稱 GGB)做出有別於現有滾動積木遊戲，做出難度更高變化度更多之**任意積木尺寸版的滾動積木遊戲**。因此本篇內容分為三大部分，先前作品的架構重組、延伸的研究、GGB 遊戲實作。

二、 研究目的：

1. 擴大地圖尺寸來討論。
2. 討論從**不同起點**到地圖其他點的規律、變化及公式。
3. 利用 GGB 軟體設計 1×1×n 的滾動積木遊戲。

三、 研究方法：

一開始我們先閱讀第 55 屆滾動積木的作品說明書，了解遊戲在積木尺寸為 1×1×2 時各種地圖中的走法規則，接著研究先 1×1×3、1×1×4、1×1×5、1×1×6 積木在各地圖的表現，利用 PPT 作圖來了解積木走法的變化，並統整出 1×1×n 積木在不同矩形地圖中的變化與規律，並進一步研究擴大版地圖以及不同起點時積木過關最小步數。

四、 研究流程：

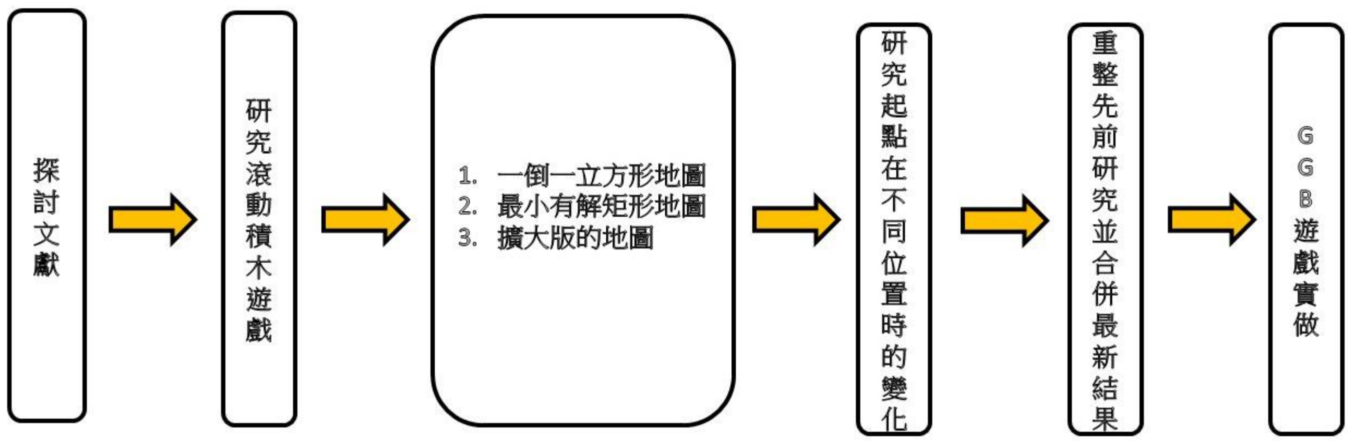


圖 1 研究流程圖

貳、 正文

一、 滾動積木遊戲介紹：

積木（原遊戲中積木尺寸為 1×1×2）會以倒滾立三種不同方式以及上下左右四個方向移動，若積木超出地圖範圍就視為出局，積木需移動到終點位置，以 1×1 的那一面進入終點才過關。

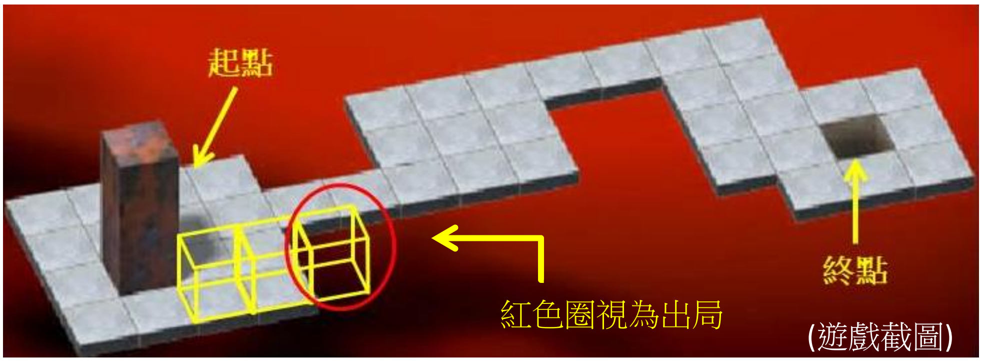


圖 2 遊戲截圖

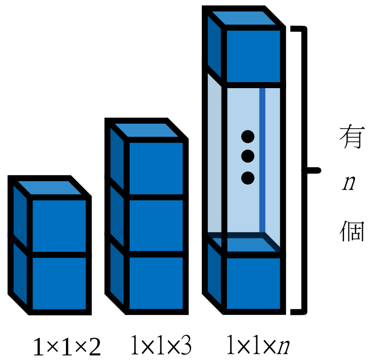


圖 3 積木尺寸圖

我們將 m×n 矩形地圖座標化，如下圖。:

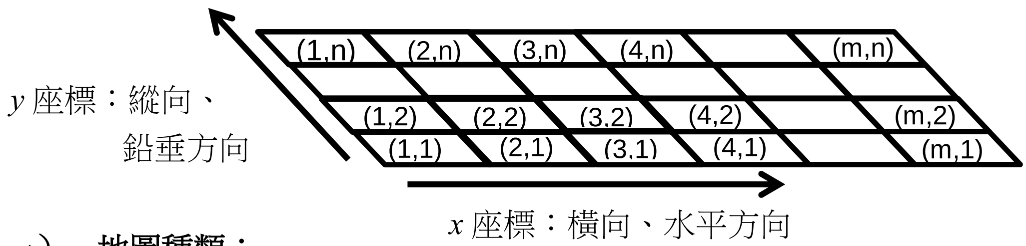


圖 4 地圖座標化

（一） 地圖種類：

1. 橫列地圖：地圖列數低於積木高數時，積木只能做**一個方向**的倒和立的動作。
2. 一倒一立之方形地圖：地圖的長寬只能使積木作**兩個方向**（橫向或縱向）的倒和立動作。
3. 最小有解方形地圖：地圖上**除起點外的任意點皆為有解方格**。

（二） 起點 H（head）與終點：

起點顧名思義為遊戲中積木的起始位置；終點則指遊戲中過關出口的位置，其中終點亦為內容中積木行進可抵達的**有解位置**。此外，因須探討不同區塊地圖間的問題，因此以下方式定義：
若有兩個區塊的地圖以 A 區和 B 區表示時，HA (head-A)：A 區的起點；HB (head-B)：B 區的起點。

（三） **動作介紹**：積木移動方式為倒、滾、立、移動方向為右、左、上、下，以下符號來表示。

表 1 積木動作介紹表

動作	右	左	上	下
倒（Pour）	P_x：積木向右倒	P_{-x}：積木向左倒	P_y：積木向上倒	P_{-y}：積木向下倒
滾（Roll）	R_x：積木向右滾	R_{-x}：積木向左滾	R_y：積木向上滾	$\mathrm{R}_{-\mathrm{y}}$：積木向下滾
立（Stand）	S_x：積木向右立	$\mathrm{S}_{-\mathrm{x}}$：積木向左立	S_y：積木向上立	S_{-y}：積木向下立

如圖，1×1×2 積木從 (1,1) 到 (1,3) 需先右倒、上滾兩次、再左立，其路徑可標記為 $P_x \rightarrow R_y \rightarrow R_y \rightarrow S_{-x}$。

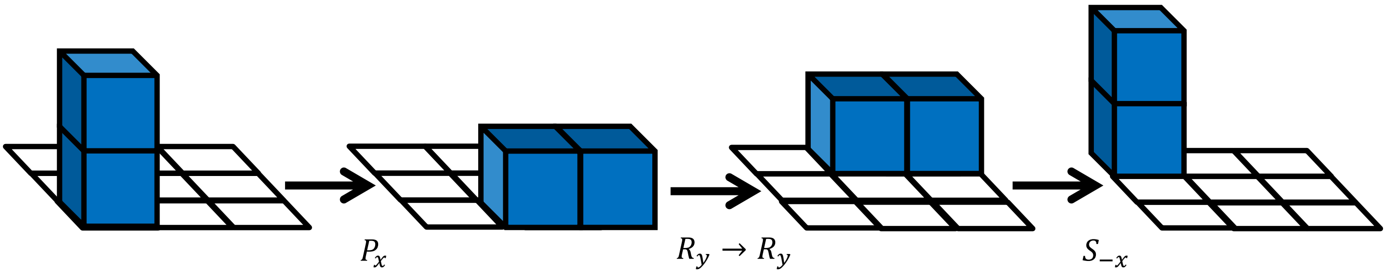
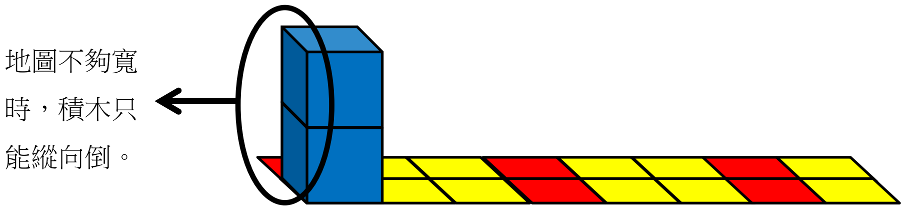


圖 5 積木的移動方式

二、 1×1×n 積木在各地圖的走法討論

（一） 橫列地圖討論：

因為地圖列數低於積木高數，所以積木在移動時只能往橫向若干組倒 (n 格) 立 (1 格) 移動，無法做向上下倒、立，而一組一倒一立所需格數為 n+1 格，故算上起點的 1 格，前進 x 組一倒一立後的**終點必在每排第 $(n+1)x+1$之方格**。下圖中，紅色方格皆為遊戲中可作為終點位置的方格。



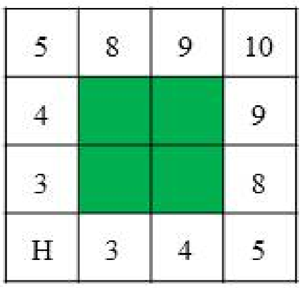
1×1×3 積木在橫列地圖中有解位置公式為 4x+1，故此地圖終點可為 5、9、13……。

1×1×n 積木在橫列地圖中有解終點位置公式為(n+1)x+1，故此地圖終點可為 n+2、2n+3……。

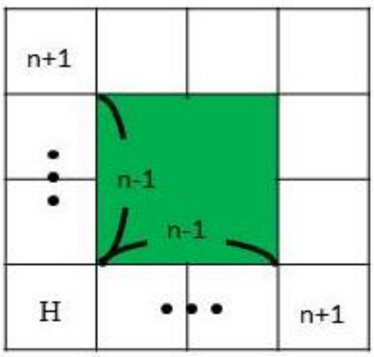
圖 6 橫列地圖與終點公式

（二） 一倒一立方形（最小方形）地圖討論：

為了讓 1×1×n 積木可以往 x 軸及 y 軸方向做一組一倒（n 格）一立（1 格）的動作，其邊長至少需要 $(n+1)$ 格，故滿足此條件**最小方形地圖尺寸為$(n+1)^2$**，而在這樣的方形地圖中，除了最外圍一圈有足夠的空間讓積木移動，中心$(n-1)^2$塊的方格皆無法讓積木做任何移動，故**中心$(n-1)^2$方格皆為無解區塊。**



1×1×3 積木時，
一倒一立共需 4 格，
因此，
地圖尺寸為 4×4
無解區塊為 2×2



1×1×n 積木時
一倒一立共需 n+1 格，
因此，
地圖尺寸為$(n+1)^2$
無解區塊為$(n-1)^2$

圖 7 各積木尺寸之最小方形地圖

而其中心無解區塊形成的原因，我們用 1×1×3 積木的一倒一立方形地圖來討論，以 (2,2) 為例，它周圍上下左右的方格皆小於三格，積木就無法往任何方向做移動，不能從 (2,2) 回到起點，起點也無法到 (2,2)。同理 (2,3)、(3,2)、(3,3) 亦為無解區塊。

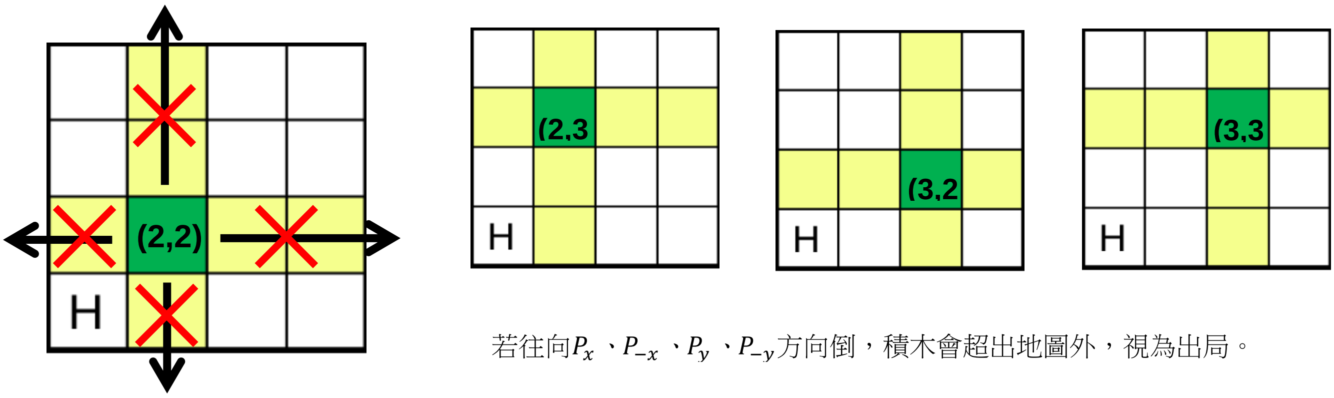


圖 8 最小方形地圖無解區塊討論

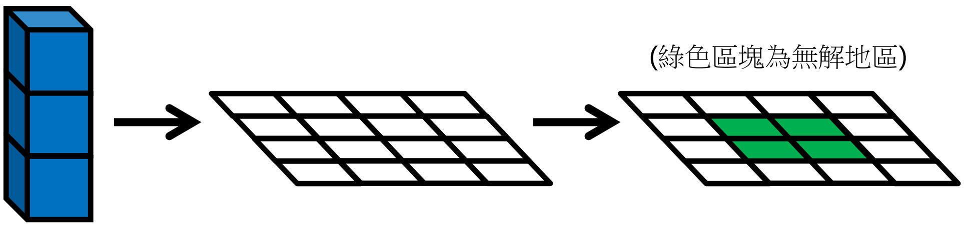


圖 9 1x1x3 積木無解區塊尺寸圖

所以 1×1×3 積木的一倒一立方形地圖中，無解區塊尺寸為2^2。

（三） 最小有解矩形地圖：

最小有解矩形地圖是由兩塊一倒一立方形地圖所組成，我們發現這種組成方式所形成的矩形地圖中任意方格皆為有解方格，**對 1x1xn 積木而言其最小有解地圖尺寸為 2*n*x(*n*+1)。**

以 1×1×3 積木來說明可組成原因，下圖的兩塊方形地圖為 1x1x3 積木的一倒一立方形地圖，分別為 A 區和 B 區。而兩區對應的（2,2）、（2,3）、（3,2）、（3,3）皆為無解方格，以綠色區塊表示。

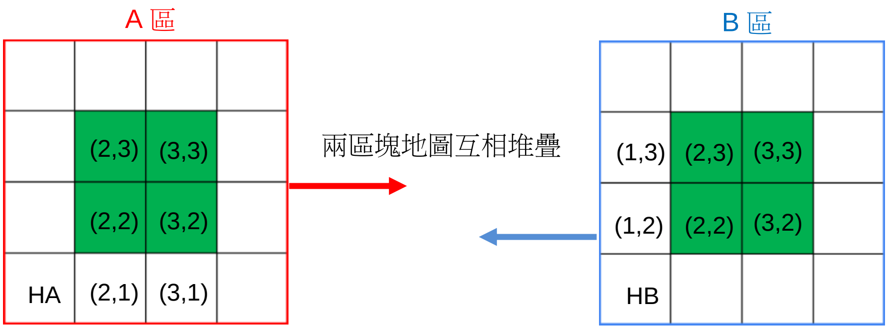
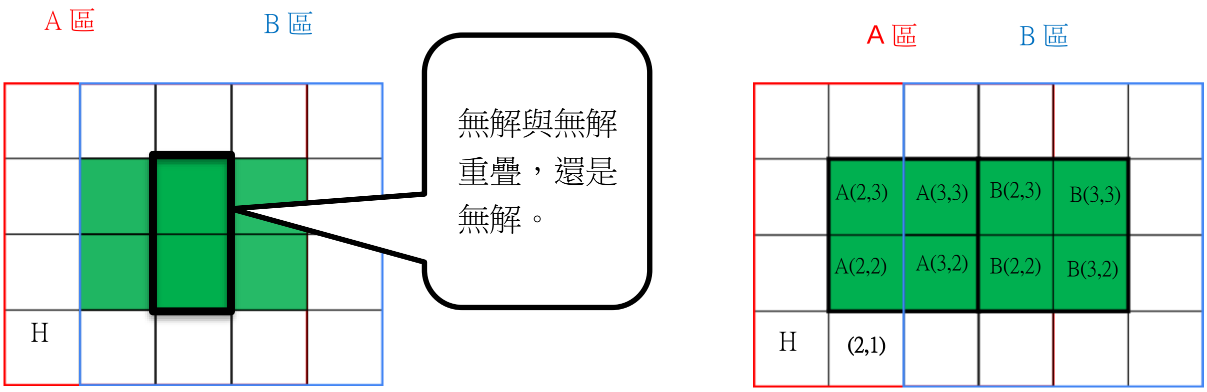


圖 10 最小有解矩形地圖組成方式

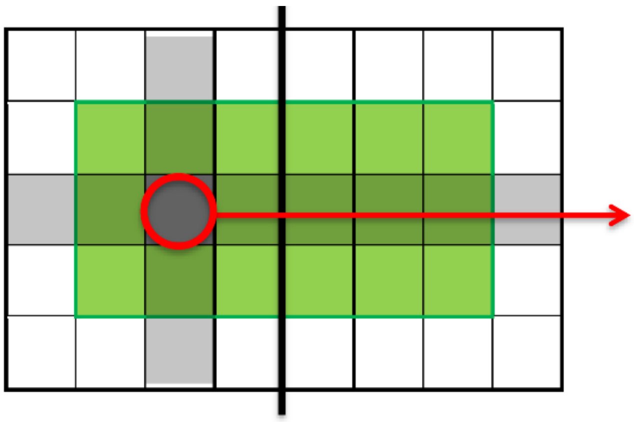
若兩地圖重疊三排，A 區(2,2)、(2,3)，B 區(3,2)、(3,3)原本為無解，不過因為與有解區塊重疊，所以變為有解。而中間黑色框框是由 A 區(3,2)、(3,3) ，B 區(2,2)、(2,3)堆疊而成的，兩個無解區塊重疊故還是無解。若兩地圖重疊兩排，那麼從 A 區的起點可以走到 B 區的無解區，反之，從 B 區的起點也可以走到 A 區的無解區，所以此地圖為 1×1×3 積木的最小有解矩形地圖。



5x4 地圖　　　　6x4 地圖

圖 11　一倒一立方形地圖只重疊兩排

因此可得一個小結論：**最小有解矩形的發展模式，即兩個一倒一立方形地圖只重疊兩排**，因此對 1×1×3 積木來說其最小有解矩形地圖尺寸的長為 3+3=6，寬還為 3+1=4。



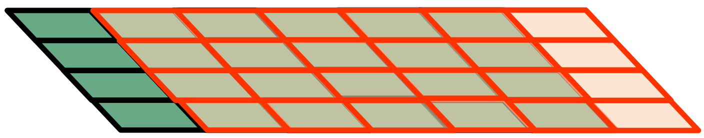
這張圖是利用兩張 1×1×4 積木的最小方形地圖所拼接而成。綠色為原無解區塊，但當拼接後長度為 8 格時，正中間分一半，不論原先在哪一區，另外半區至少有 4 格足夠作一次倒立動作。

圖 12　最小有解地圖方格皆有解原因

另外我們發現

1×1×n 積木在任意 m×n 矩形地圖中，若 m×n 大於 $2n \times (n+1)$，則必定每個方格皆有解。

若將 m×n 矩形視作多個 $2n \times (n+1)$矩形的重疊，即在任意長寬大於最小有解矩形的矩形地圖，每個方格皆必有解。



如圖，這是一個 7×4 矩形，由兩個 6×4 最小有解矩形重疊合成，亦為 1×1×3 積木的有解矩形。

圖 13　兩個最小有解地圖組成之示意圖

三、　積木移動時的最小步數討論

（一）　積木移動時的基本性質

如圖，這是 (1,1) 到 (2,1)、(1,1) 到 (1,2) 的走法路徑圖，例如 (1,1) 到 (2,1) 走法為先向上倒再向右滾最後再向下立，其路徑可標記為 $P_y \to R_x \to S_{-y}$ 。

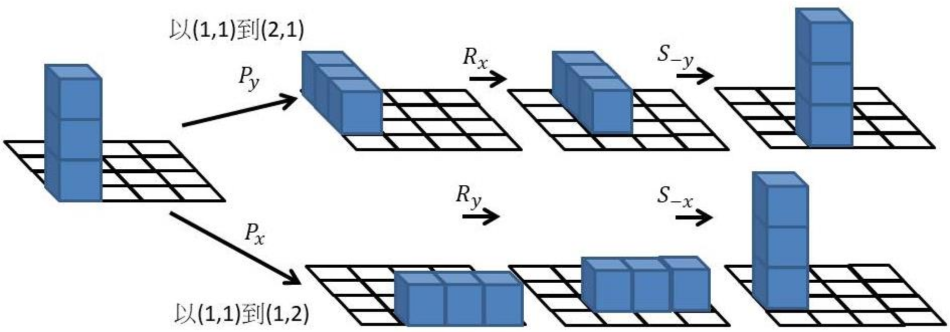


圖 14 互通性及對稱性在地圖上的變化

由上圖兩個走法路徑比較可發現積木的移動方式具有

1. **互通性：**即 (1,1) 可抵達 (1,2)，同理 (1,2) 亦可用同樣路徑逆推回 (1,1)。
2. **對稱性：**以 (1,1) 作為起點，**(x, y)** 與 (y, x) 走法**具對稱性**且**步數相同，其中 $x \neq y$，**以上圖為例 (2,1) 與 (1,2) 走法具對稱性且步數相同，且我們發現他們的步法是相反的。

因此後續在討論最小步數問題時我們將引用上述的性質。

（二） 最小步數討論

1. 互通性：

研究發現，對地圖上任意相異的 A、B 兩點來說，若 A 點可到達 B 點，則 B 點也可用相同路徑逆推回去，可得 若 A→B，則 B→A，也就是 A↔B。同樣，若 A 點用最小路徑抵達 B 點，則 B 點也可用相同最小路徑逆推回 A 點，便可再得

$$若\ A \xrightarrow{min} B，則\ B \xrightarrow{min} A\ ，也就是\ A \xleftrightarrow{min} B$$

2. 先右倒再左立，等同於沒有移動：

若積木的移動步數須為最小步數，則先右倒再左立，等同於沒有移動，積木還在原來方格，同理，左倒後再右立；上倒後再下立；下倒後再上立，因此在最小步數中，不會發生這四種情況。

3. 不會有同方向同時滾動 $(n+1)$ 次：

1×1×n 積木在任意 m×n 有解矩形中，**若移動步數為最小步數，則不會有同方向同時滾動$(n+1)$次。**以下圖 1×1×3 積木為例，向右滾動四次相當於向右做一組一倒一立，其步數前者移動四次，後者移動兩次。

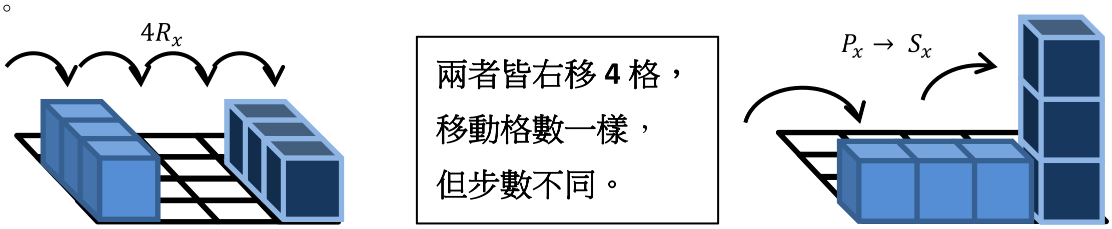


圖 15 最小移動步數規則

（三） 一倒一立方形（最小方形）地圖中的最小步數

我們研究發現，在最小方形地圖中，以起點 (1,1)為中心橫向或縱向的目標終點之移動模式與步數一樣（對稱性），而其餘外圍的移動都皆須經過**對角方格**，因此其餘外圍方格移動的最小步數相當於**對角方格步數加上橫向或縱向相對應方格之步數**。

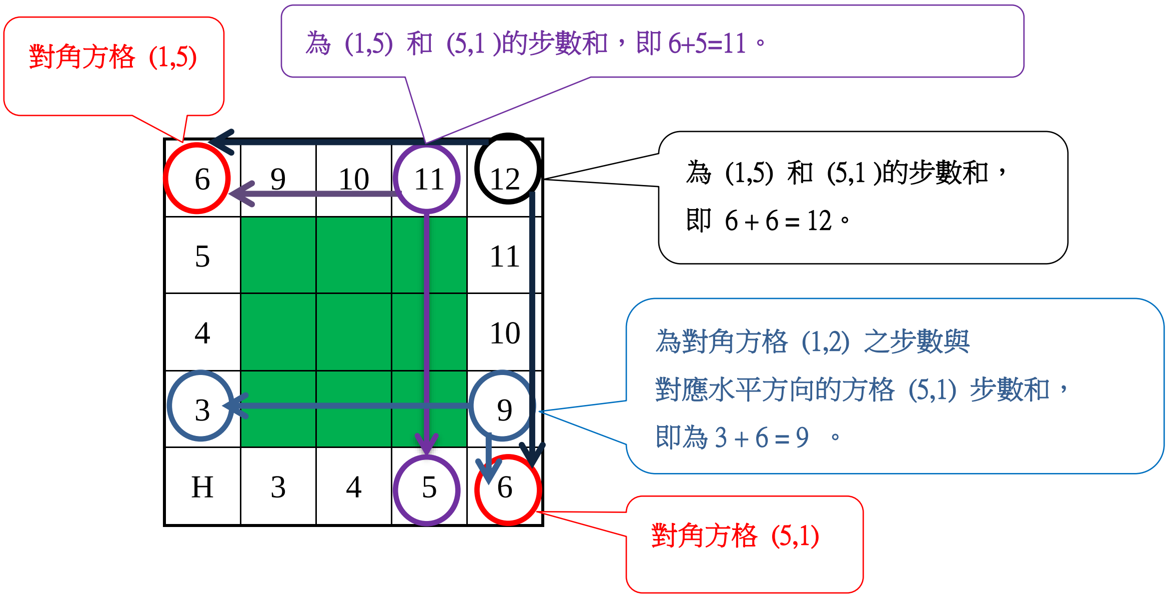


圖 16 最小方形地圖之最小步數示意圖

（四） 最小有解矩形地圖中的最小步數

我們研究發現，在最小有解矩形地圖中，以起點 (1,1)為中心橫向或縱向的目標終點之移動模式與步數一樣（對稱性），而其餘方格的移動都皆須經過**對應方格**，因此其餘方格移動的最小步數相當於對角方格步數加上橫向或縱向的相對應方格之步數。

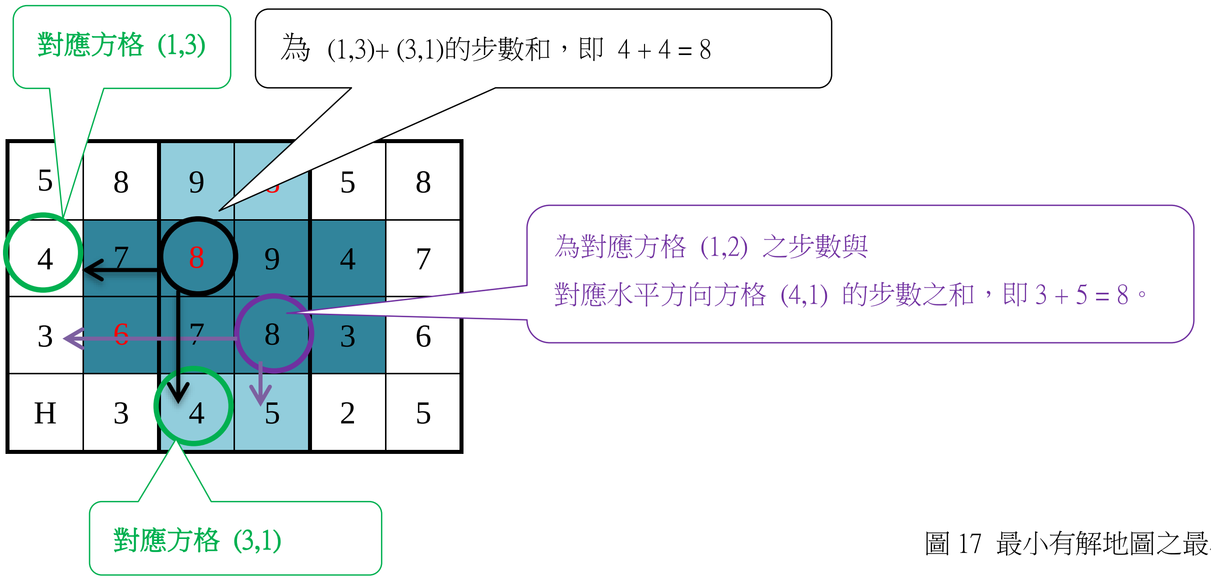


圖 17 最小有解地圖之最小步數示意圖

（五） 擴大方形地圖的最小步數

我們研究對於 1×1×n 積木而言邊長尺寸為 2(n+1) 的方形地圖，即兩個邊長都可做兩組一倒一立動作的地圖，我們很好奇當地圖擴大之後，其步數的變化與規則，而我們研究發現的結果一致，在橫向與縱向超過 n+1 後的方格，相當於以第 n+1 的方格為新起點，接續行走，因此步數為第 n+1 方格與對應方格的步數和。另外因為積木移動規則對稱性，因此我們只需要觀察下三角形之方格與對角線方格的變化便可推導出整個擴大方形地圖之最小步數的全貌。

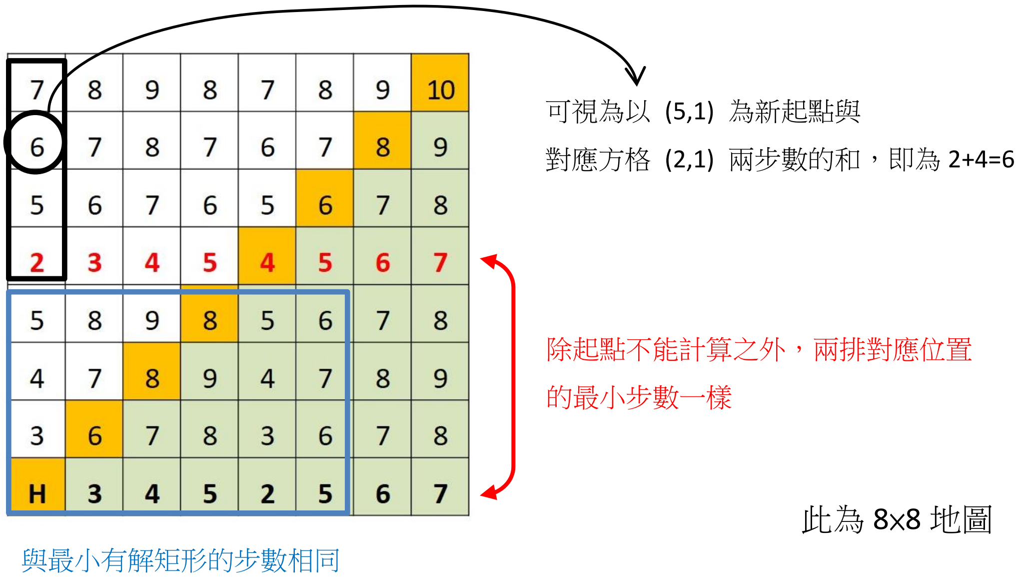


圖 18 擴大方形地圖的最小步數說明圖

（六） 當任意（a,b）起點的最小步數

以 1×1×3 積木的最小有解矩形地圖為例，我們發現當起點在任意格時，不需要一一研究，只要找出左下角 3×2 的六格，即找出所有的步數。若找出以(1,1)當起點的步數，利用**對稱性**的方式，就相當於找出以(1,4)、(6,1)、(6,4)為起點的步數。以此類推，如下圖：

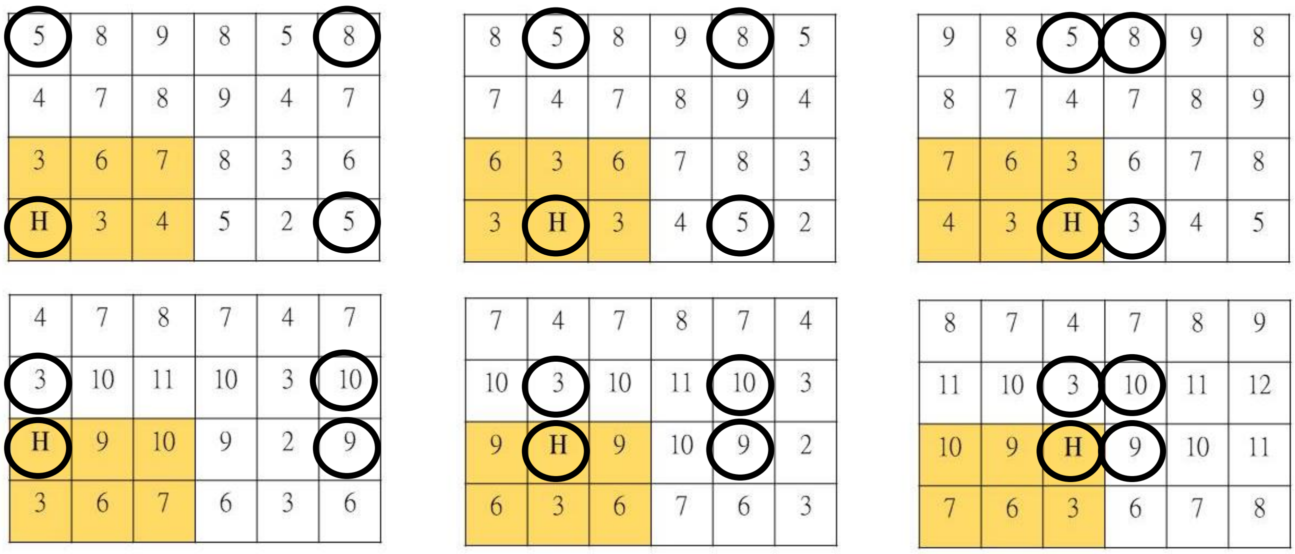


圖 19 任意（a,b）起點的最小步數

若找出以(1,2)當起點的步數，就相當於找出以(1,3)、(6,2)、(6,3)為起點的步數。
若找出以(2,1)當起點的步數，就相當於找出以(2,4)、(5,1)、(5,4)為起點的步數。
若找出以(2,2)當起點的步數，就相當於找出以(2,3)、(5,2)、(5,3)為起點的步數。
若找出以(3,1)當起點的步數，就相當於找出以(3,4)、(4,1)、(4,4)為起點的步數。
若找出以(3,2)當起點的步數，就相當於找出以(3,3)、(4,2)、(4,3)為起點的步數。

四、 GGB 遊戲實作

我們利用 GGB 軟體程式做出可調整積木大小尺寸的滾動積木遊戲，如圖中畫面所顯示，這是一個滾動積木遊戲的平面版，因為立體版的製作比較困難，我們先以俯視圖平面圖來討論積木的移動模式。圖中的左邊是遊戲畫面，藍色方格是一個站立在（1,1）的起始積木，黑色方格則是目標終

點，綠色網格是對應積木的最小有解矩形地圖。而圖中右邊的欄位則是遊戲說明與遊戲中所需的各種按鈕（包含遊戲積木尺寸的控制滑桿、方向鍵、更換種點以及回到起點）。

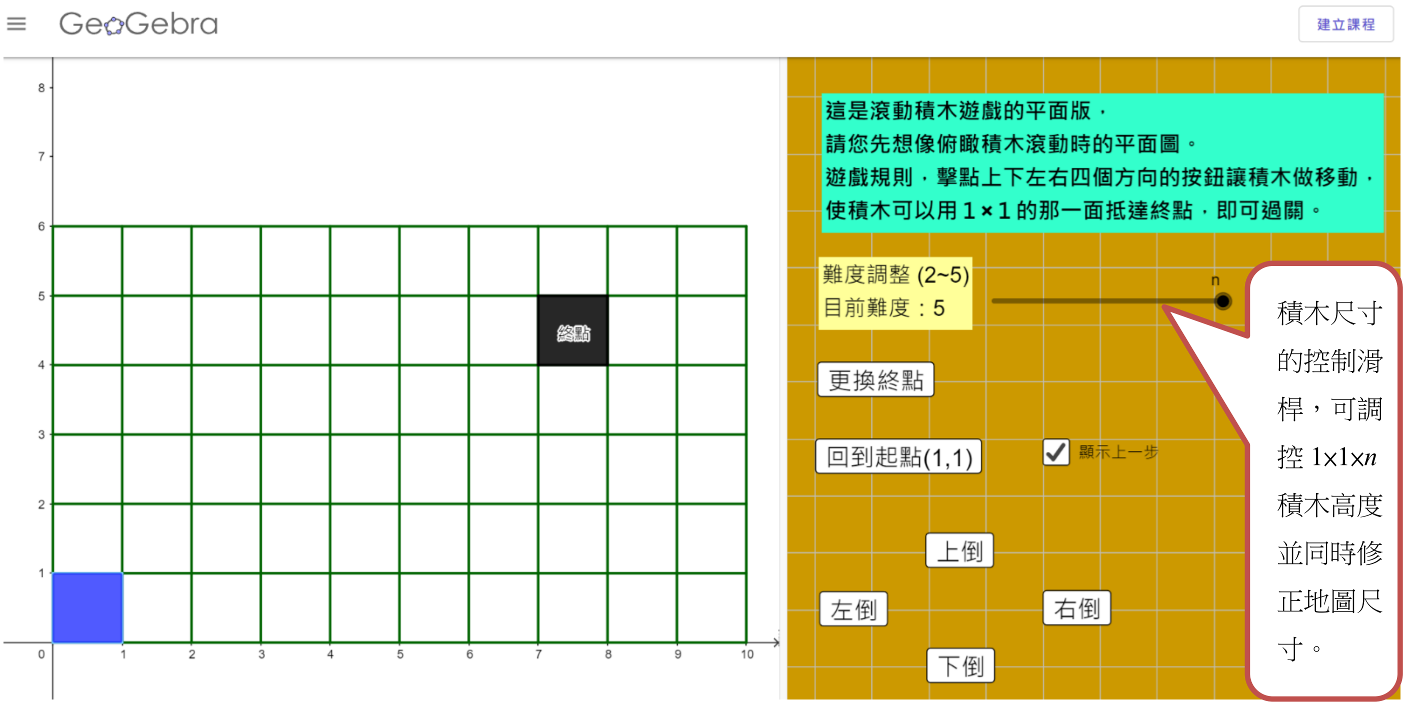


圖 20 滾動積木之 GGB 作品圖

各種元件的設計理念（1×1×3 積木為例）：

首先理解立體積木右倒後的移動模式並轉換成平面。

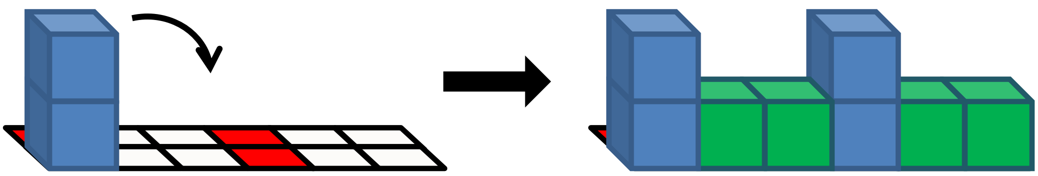
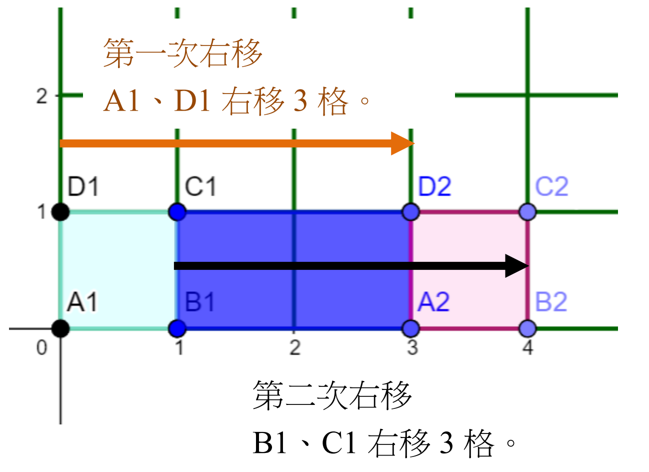


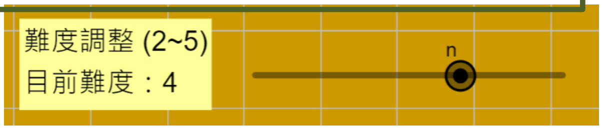
圖 21 各種元件的設計理念圖

表 2 ggb 元件設計理念整合表

<table>
<tr><td></td><td>設定起始積木為 A1B1C1D1 正方形（之後用 A2B2C2D2 矩形替換），觀察其右移的移動模式，可發現右移一次相當於 B1、C1 維持不動，A1、D1 右移 3 格，若再右移一次則換 A1、D1 不動，改為 B1、C1 右移 3 格，因此可觀察出每次右移時，會以 A1、B1 中較左邊的點右移 3 格；同理，以 D1、C1 中較左邊的的點右移 3 格。

同時再設立每次移動後 A1 等於 A2，每次右移時圖形會自動更新。</td></tr>
<tr><td>右倒按鈕之 GGB 程式碼
RunClickScript(A1)
RunClickScript(D1)
RunClickScript(B1)
RunClickScript(C1)</td><td>設定 A1 背後的程式，即 A1=A2。
同理，B1=B2、C1=C2、D1=D2。</td></tr>
</table>

A2= If(x(A1)<x(B1), A1+SX1, A1)
D2= If(x(D1)<x(C1), D1+SX2, D1)
B2= If(x(A1)>x(B1), B1+SX1, B1)
C2= If(x(D1)>x(C1), C1+SX2, C1)
 	
If(x(A2)>3*n-1,RunClickScript(button3))
If(x(B2)>3*n-1,RunClickScript(button3))
	若 A1 比 B2 更偏向左邊，則 A2 為 A1 右移 3 格，否則 A2 為仍然為原先 A1。
	其中，x(A1) 指 A1 的 x 座標，SX1 指右移 3 格。
	
	若右移導致積木超過地圖範圍外，則積木返回起點 (1,1)。

	可調控 1×1×n 積木與最小有解矩形地圖尺寸
Sequence(Segment((0, i), (2n, i)), i, 0, n + 1) Sequence(Segment((i, 0), (i, n + 1)), i, 0, 2n)	設置最小有解矩形的地圖尺寸，會隨著 n 值變動。為圖中的綠色網格。
P0 = (Random(0, 2n - 1), Random(0, n)) P = P0 + (0,1) 終點=Polygon(P0,P,4)	設定終點方格 P0 為地圖中的隨機點，P 為 P0 右移一格的點，則方格為 P0 與 P 逆時針方向所繪製的正方形。

因為各種因素，事實上**這個遊戲還未建置完成**，其中需要克服的程式問題比想像中還要多，希望建置完成後能再學校的科學週或其他活向全校師生展示我們的作品。

參、 結論

經過這次小論文，我們把科展的東西再進一步的去探討，找出了 1x1x3 積木在擴大版 8×8 地圖中、6×4 地圖在任意起點時的最小步數，並用新的架構統整先前的作品，最後努力用 GGB 軟體做出所研究出的遊戲，**雖然這個遊戲還尚未完成，但能讓積木成功右移左移、隨機產生終點方格、隨著 n 值而修正的地圖尺寸**，我們發現研究與實作中所需思考的方向是非常不同的，藉由這次比賽的機會有了研究的開端。

肆、 未來展望

針對這個主題，我們希望未來

1. 研究出不規則地圖中積木的走法規則。
2. 研究若在地圖中設置陷阱，積木的走法規則。
3. 找出其他積木尺寸 $a\times b\times c$ 在此遊戲中的走法規則，如 1×2×2 以及 1×2×3 等
4. 利用各種軟體如 GGB、Scratch 等建置更完善的滾動積木遊戲。

伍、 參考文獻資料

1. 游復廷等（2015）。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會 作品說明書
2. 滾動積木。昌爸工作坊。取自\https://archive.org/details/bloxors
3. 蔡困諺等。(2022)。中華民國第 62 屆花蓮縣中小學科展 作品說明書
4. 蔡困諺等。GGB 滾動積木遊戲。取自\https://www.geogebra.org/classic/ftkyd2ct/