投稿類別：自然科學類

篇名：

面試決策的最佳方案探討

作者：

李宜麋。花蓮縣立國風國中。國二７班

何彥澄。花蓮縣立國風國中。國二７班

陳柏恩。花蓮縣立國風國中。國二７班

壹、前言

一、研究動機

日常生活中，時時刻刻都需不斷需要做出決定，絕大部分時候，除了要做出最佳的決定，若時間不許可，則是需要在較短的時間內做出相對較佳的決定，從這個出發點，簡單考慮一個情境：當公司徵求員工時，最理想的情況之下，當然是將所有面試者逐一考核，再從中錄取最優秀的員工；然而若是求職者人數過多，逐一面試將變得非常花時間，對於公司而言可能花費過多成本。

本篇研究以這個簡單模型出發，以計數原理和古典機率的理論，討論在無法面試所有求職者的前提之下，比起隨機錄取一人，是否有較佳的方案，能夠將錄取最優秀求職者的機率盡可能提升。

再將情境進一步加入收益與成本的要素，以期望值的角度討論求職者的能力多高時，才值得公司不計成本的將其找出來。希望能藉由這個簡單的數學模型，對於平常生活中做決定的策略提供一些指標。

二、研究目的

(一) 研究在無法面試所有求職者的情況下，不同的面試策略中，能錄取最佳求職者的機率。
(二) 找出有最大機率錄取最佳者的方法
(三) 加入時間成本與員工價值的要素，討論對公司最有利的方法

三、研究方法

在公司沒有足夠的時間面試所有求職者的狀況下，比起隨機錄取一人，是否能有更好的面試方法。因此設定「參考組」概念：將面試的前 k 人中作為標準人物，從第$k+1$人開始，只要遇到比標準人物還優秀者，即直接錄取，後面的人失去面試機會。

先以較少人數直接列出所有可能討論此方法是否真的能提高最優秀者被錄取的機率。再進一步推廣到較多人數的一般性情況，以排列組合和古典機率方法討論。

最後加入面試所花費的成本和員工能帶來的價值兩個要素，以期望值觀點討論在不同情況下，對公司最有利的面試策略

貳、正文

一、文獻探討

1、計數原理

加法原理：如果要完成一件事有 k 類方式，第一類方式有 n_1 個方法，第二類方式有 n_2 個方法，…，第 k 類方式有 n_k 個方法。則完成這件事有

$$n_1+n_2+\cdots+n_k$$

個方法。

例：假設花蓮到高雄走陸路有 5 條路線，走水路有 2 條路線，走空運有 3 條路線。那小明想要到高雄，便有 $5+2+3=10$ 條路線。

乘法原理：若做完此事有 k 個步驟，做完第一個步驟有 n_1 個方法，做完第二個步驟有 n_2 個方法，…，做第 k 個步驟有 n_k 種方法。則完成這件事有

$$n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$$

種方法。

例：假設從甲地到乙地有 2 條路，從以地道丙地有 3 條路，那從甲地經過乙地到丙地共有 $2\times3=6$ 種走法

2、古典機率

隨機試驗：可重複性操作，事先能夠預期所有可能的結果，但是在操作之前無法確定結果结果。這樣的過程稱為隨機試驗。

例：拋一枚硬幣，可擲出正面和反面，但投擲前並不能得知是哪一面。

樣本空間：一個隨機試驗中所有可能的結果所成的集合。

例：考慮 3 人 A、B、C 進行排列，便會有

ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA

等方法，而這些方法所成集合便是樣本空間。

事件：樣本空間的子集合，稱為事件。

例：擲骰子，出現偶數的事件為 $\{2,4,6\}$，出現質數的事件為 $\{2,3,5\}$。

古典機率：隨機試驗中，某事件發生之可能性的度量。在樣本空間為有限集合的狀況下，事件和樣本空間中元素個數的比值定義為該事件發生的機率。

例：擲骰子時，樣本空間 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ 有 6 個元素，現偶數的事件 $E=\{2,4,6\}$ 有 3 個元素，因此擲出偶數的機率為

$P=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$。

期望值：試驗中每次可能的結果所對應的隨機變數，乘以其機率的總和。

例：擲一枚公平的六面骰子，其每次「點數」的期望值為

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=3.5$$

二、較少人數的討論

1、假設面試人員為能力由弱到強的 A、B、C 三人，若隨機錄取一人，最優秀者 C 被錄取機率為 $\frac{1}{3}$。

若以第一人為「參考組」，即淘汰第一人，錄取下一個比第一人優秀者的方法，此三人的面試順序共有

ABC 、 ACB 、 BAC 、 BCA 、 CAB 、 CBA

共 6 種順序，其中 C 被錄取的情形有

ACB 、 BAC 、 BCA

共 3 種。則最優秀者 C 被錄取的機率為 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。可以發現，能夠藉由以第一個人當作參考對象，可以提高最優秀者被錄取的機率。

2、接著將面試人員改成能力由弱到強依序為 A、B、C、D、E 的五人，若隨機錄取一人，選到最優秀者 E 的機率為 $\frac{1}{5}$。

另一方面，在設定「參考組」的情況下，試著討論參考組的人數是否會影響錄取最優秀者的機率。

A、將第一人定為參考組，E 錄取的狀況討論如下：

(i) 若第一人是 A，則 E 一定要排在第二位，後三位可隨意排列，共有 $3!=6$ 種。

$AE\square\square\square$

(ii) 若第一人是 B，則 E 可在第二位或第三位：

當 E 在第二位時，後三位隨意排列，共有 $3!=6$ 種；

而當 E 在第三位時，A 必定要在第二位，因此四五位隨意排列，共有 $2!=2$ 種方法。由加法原理，可知共有 $3!+2!=8$ 種方法。

$BE\square\square\square$　$BAE\square\square$

(iii) 若第一人是 C，則 E 可在第二、三、四位：

E 在第二位時，方法同樣是 $3!=6$ 種；

E 在第三位時，第二位可以是 A 或 B，而四、五位隨意排列，共有 $2\times 2!=4$ 種；

E 在第四位時，二、三位由 A、B 隨意排列，第五位必為 D，共有 $2!=2$ 種。由加法原理可知共有 $6+4+2=12$ 種。

$CE\square\square\square$　$C\square E\square\square$　$C\square\square E\square$

(iv) 若第一人是 D，可知 E 必定錄取，第二到第四位皆可任意排列，共 $4!=24$ 種情況。

D□□□□

討論所有情形後，可知在以第一人作為參考組的情況下，E 被錄取的狀況有 $6+8+12+24=50$ 種，而五人任意排列順序共有 $5!=120$ 種方法，因此錄取 E 的機率為 $P=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$。

B、 將前兩人定為參考組，E 錄取的狀況討論如下：

(i) 前兩位能力較佳者為 B，則前兩位必為 A、B，決定 A、B 順序後，E 必定要排在第三位，最後兩位可任意排列，共有 $1\times 2!\times 2!=4$ 種情形。

(ii) 前兩位能力較佳者為 C，則前兩位的另一人由 A、B 選出一人並決定順序後，E 可在第三位或第四位，考慮細節後，共有 $2\times 2!\times(2!+1)=12$ 種。

(iii) 前兩位能力較佳者為 D，前兩位的另一人由 A、B、C 擇一並決定順序，後三位任意決定順序，E 必定會錄取，共有 $3\times 2!\times 3!=36$ 種情形。

討論所有情形後，可知 E 錄取的情形共有 $4+12+36=52$ 種。錄取機率為 $P=\frac{52}{120}=\frac{13}{30}$，比設定一人為參考組時稍微大了一些。

從前兩項討論中可以發現，改變不同的參考組人數後，最優秀者被錄取的機率也會隨之改變，甚至能從原本隨機錄取一人的 20% 增加到接近到幾乎 50%。因此可以合理推論，在面試人數較多時，應該也存在最適當的參考組人數，能讓最優秀者錄取的機率達到最大值。

三、從機率觀點著手

在推廣至一般性狀況之前，從上面的討論能夠發現，以排列組合的觀點解決這個問題，雖然可行，但是當人數增加時，計算的繁雜程度也會隨之大增。幾經討論後發現其實也能從機率的觀點著手。例如當共有 5 人，以前 2 人作為參考組時，可討論 E 在哪一個位置被錄取：

(i) E 在第三位時必定會被錄取，此時發生機率為 $\frac{1}{5}$。

(ii) E 在第四位時，只要確保前三位中能力最佳者落在參考組內(前兩位)，則可讓 E 錄取，因此機率可寫為 $\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$。

(iii) E 在第五位時，需要確保前四位中能力最佳者落在參考組內，E 方能錄取，其機率可寫為 $\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{10}$。

最後再合併所有狀況，能較簡單得到 E 錄取的機率為 $P=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{10}=\frac{13}{30}$ 。

四、推廣至一般性狀況

設共有 N 位面試者，而將前 r 位當作參考組。則最優秀者錄取的機率可由所在位置描述：當最優秀者在第 $(r+k)$ 位時，其錄取機率為

$P=$ (最優秀者落在第 $(r+k)$ 位機率) $\times$ (前 r 位中最佳者落在參考組機率)

當最優秀者在第 $(r+1)$ 位錄取時，機率為 $P=\frac{1}{N}$ 。

當最優秀者在第 $(r+2)$ 位錄取時，機率為 $P=\frac{1}{N}\times\frac{r}{r+1}$ 。

當最優秀者在第 $(r+3)$ 位錄取時，機率為 $P=\frac{1}{N}\times\frac{r}{r+2}$ 。

$\vdots$

$\vdots$

當最優秀者在第 N 位錄取時，機率為 $P=\frac{1}{N}\times\frac{r}{N-1}$ 。

合併所有狀況，最優秀者錄取機率為

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{N}+\frac{1}{N}\times\frac{r}{r+1}+\frac{1}{N}\times\frac{r}{r+2}+\cdots+\frac{1}{N}\times\frac{r}{N-1} \\
&= \frac{r}{N}\times\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+\cdots+\frac{1}{N-1}\right)
\end{aligned}
$$

當 N 為極大的數字時，這個機率可近似為 $P(r)=\frac{r}{N}\times\ln\left(\frac{N}{r}\right)$ 。

將此機率對變數 r 作微分，可得知當 $r=\frac{N}{e}$ 時，機率 $P(r)$ 有極大值，其中 e 為自然數。且最大的機率為 $P=\frac{1}{e}\approx 36.8\%$ 。

此結論表示，若共有 10000 名面試者，藉由將前面大約 3700 位設定為參考組，可以使錄取到最優秀者的機率從隨機選取一人的 0.01% ，提升到36.8%。

五、加入成本和員工價值概念

雖然每一次面試都會花費公司成本，然而若是該員工能為公司帶來足夠的價值，則值得花更多的成本找出他。在此段落以期望值想法，討論最優秀員工多優秀，才值得公司不計一切代價找他。

先從簡單情形開始考慮：

設公司面試每一位求職者，都需花費 1 單位的成本，而編號 1 到 3 單位的求職者，分別可為公司創造 1 到 3 單位的價值。

1. 最節省成本的方式，直接錄取第一人

獲益期望值： $E=\frac{1}{3}(1-1)+\frac{1}{3}(2-1)+\frac{1}{3}(3-1)=1$

2. 不計代價找出最優秀者，所有人都面試，此時最優秀者必定錄取
   獲益期望值： $E=1\times(3-3)=0$

從上述極端情況可看出，所有人面試後再決定，帶來的效益還不如隨機錄取一人，即最優秀者能力不夠好。

接著討論這兩種面試策略下，最優秀者要多優秀，才值得認真去找出來：
設共有 n 位面試者，其能力別為 1、2、3……、 $n-1$、 N ，其中 N 為最優秀者的能力。

兩種方法的期望值各為
1. 隨機錄取一人：

$$E_1=\frac{1}{n}(1-1)+\frac{1}{n}(2-1)+\cdots+\frac{1}{n}\left[(n-1)-1\right]+\frac{1}{n}(N-1)$$
$$=\frac{1}{n}\left[0+1+2+\cdots+(n-2)\right]+\frac{1}{n}(N-1)$$
$$=\frac{1}{n}\times\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{1}{n}(N-1)$$

2. 面試所有人，取最好的人時：

$$E_2=1\times(N-n)$$

當 $E_2>E_1$ 時，表示面試所有人的期望值較高，此時值得我們不計代價找出最優秀者。

$$N-n>\frac{1}{n}\times\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{1}{n}\times(N-1)$$
$$\rightarrow\ nN-n^2>\frac{n^2-3n+2}{2}+N-1$$
$$\rightarrow\ (n-1)N>\frac{n^2-3n+2}{2}-1+n^2$$
$$\rightarrow\ (n-1)N>\frac{3n^2-3n}{2}$$
$$\rightarrow\ (n-1)N>\frac{3n(n-1)}{2}$$
$$\rightarrow\ N>\frac{3}{2}n$$

在這個設定下，當最優秀者能帶來的價值大於 $\frac{3}{2}n$ 時，才值得公司不計成本找出來，否則在兩個方案中，隨機錄取一人的方案較划算。

參、結論與未來展望

一、結論

1、從本篇的討論中可以看出，若是在無法面試完所有求職者的前提下，設定參考組大致上都能夠提高最優秀者被錄取的機率。且隨著參考組中的人數不同，提升的機率也有所不同。

2、當人數非常多時，藉由將全體人數的$\frac{1}{e}$倍定為參考組，可以將最優秀者被錄取的機率做最大的提升，其機率可升高至大約36.8%左右。

3、如果進一步考慮面試時所花費的時間成本與每個員工錄取後所能帶來的效益。從粗略的設定中可以看出如果面試者普遍能力並不突出，有時不如直接隨機錄取一人，帶來的效益期望值還比逐一面試所有人要來得高。何時才值得逐一面試，這點和所有面試者的能力分佈有關。因此公司在招募員工之前，先調查每位求職者大略的能力背景是有必要的準備工作，能藉此訂出較佳的求才策略。

二、未來展望

本篇的討論中，受限於對排列組合能力的掌握，模型相當陽春，也有一些明顯的缺點。如一開始若是把最優秀者直接選進參考組中，會造成無人可錄取的情況；或是即便有參考組，有時也會直到最後一人才找出最優秀者，從結果來看還是面試了所有人，違背了最初的目的。而期望值的討論中，也還無法使用前段的面試策略，只能討論兩種最簡單與最複雜的方法。

若是有機會，可以再加入次要選項：例如當面試人數超過一定比例都沒有比參考組更好的人，就回頭錄取參考組中最佳者。對於估計期望值的設定也還有很多可以改進的空間。

此方法雖然以面試求職者為模型，但也可以作為日常生活中做決策的依據，在一連串選擇中，是要耐心挑選最佳的方案、還是在較短的時間內挑選相對較好的方法，都是可以應用的場合。

肆、參考文獻資料

一、結城浩。數學女孩秘密筆記：排列組合篇。世茂出版。
二、結城浩。數學女孩秘密筆記：機率篇。世茂出版。
三、高瞻自然科學教學資源平台。http://reurl.cc/9pNQ8O
四、高中數學課本第二冊。南一出版。