正四稜錐堆疊翻轉研究

投稿類別：自然科學

篇名：

正四稜錐堆疊翻轉研究

作者：

陳語謙。自強國中。八年三班

陳諜宇。自強國中。八年六班

指導老師：

陳禹翔老師

呂柏辰老師

正四棱錐堆疊翻轉研究

壹、前言

本研究是個簡單有趣的小遊戲，目的是透過移動最少數量的球將正四棱錐堆疊顛倒過來。並運用國中所學到的代數，嘗試導出最簡潔的最少移動個數方程式，並推算出一般式，是本研究的亮點之處。

一、研究動機：

這次的主題我們是延續上一次科展的題目，上一次的科展我們研究相鄰兩層間公差不等於 1 時的情況，最後給出所有可能的情況與推導出一般式，最後繼續推廣到立體三角錐球體堆疊的討論。在這一次的小論文，我們想讓研究變更完整，所以我們接著準備開始做正四棱錐堆疊的翻轉研究。

(一)正四棱錐堆疊的的觀察

首先，我們先從網路購物平台買一些小材料，拼湊成下圖 1 的正四棱錐堆疊示意圖，希望可以方便的觀察出一些規律。

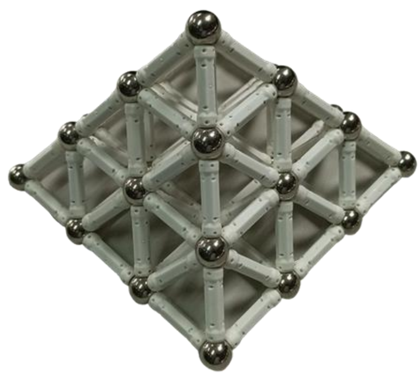
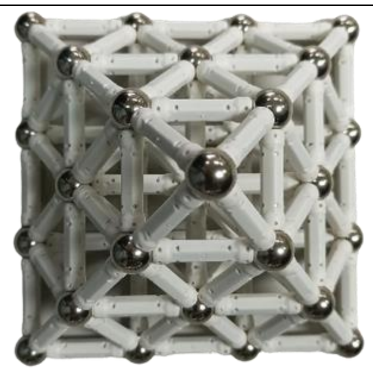
前視圖	右視圖	上視圖
		

圖 1：正四棱錐堆疊三視圖

二、研究目的：

1.透過各種輔助軟體和道具，觀察正四稜椎堆疊各層翻轉的顆數。

2.總結所有的翻轉顆數成正四稜錐堆疊的規律。

三、研究流程

表 1：研究流程

研究流程			
1.	2.	3.	4.
決定主題決定研究目的	文獻資料整理 1.閱讀書籍 2.查詢資料	1.利用 Sketchup 軟體模擬正四稜椎堆疊的翻轉。 2.利用 Gsp 軟體觀察並分解，翻轉圖形的側面與俯視圖。	研究結果整理。

本研究分為 4 個階段，如上表所示，第一階段，先決定主題和研究目的。接著查閱相關的文獻，並利用 Sketchup、Gsp 兩種軟體來進行研究，最後再把結果整理成研究結果。

四、研究方法

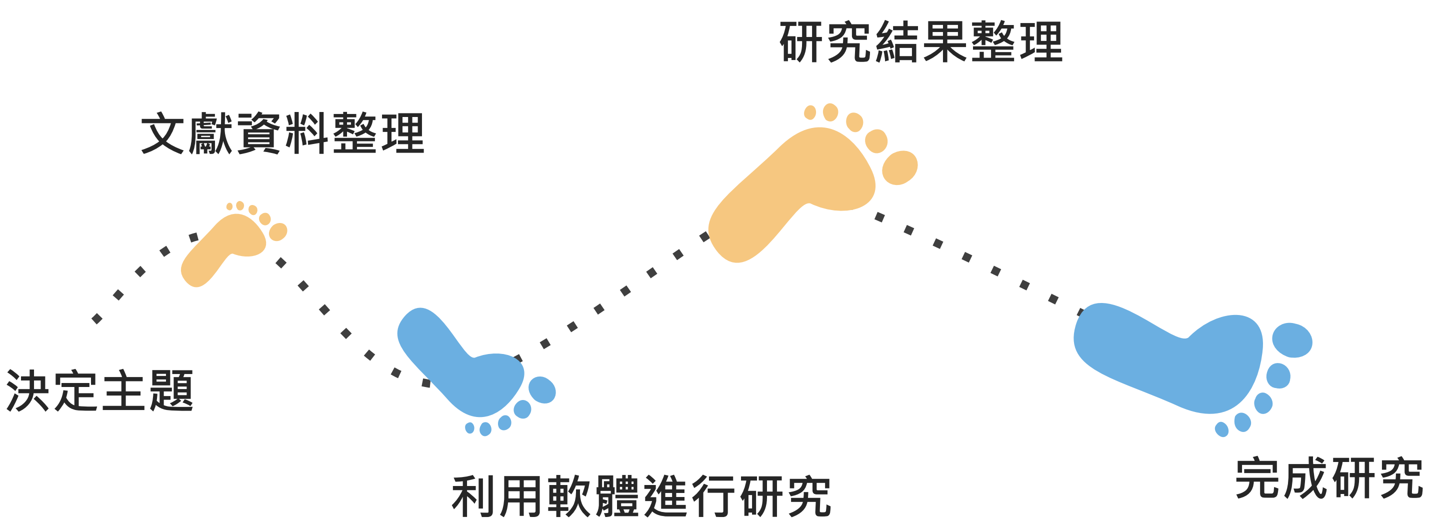


圖 2：研究方法示意圖

貳、正文

一、研究文獻

在科展第 62 屆的研究裡，我們推導出了正二棱錐堆疊(三角形)和正三棱錐堆疊(立體三角錐)的不移動顆數，並利用這一點來推算出了移動顆數的算式，還列出了一般式。公式分別為圖 2(平面)和圖 3(立體)。但在研究完成之後，我們覺得研究並不完整，。所以我們希望可以透過這次小論文，研究正四棱錐堆疊的移動顆數，把研究做的更完整。

(一)平面三角形數翻轉之科展研究結果

設層數為 n，公差為 d，則各種狀況的公式如下表：

表 2：科展的平面三角形翻轉研究結果

n	$\frac{n}{3}\ldots 0$	$\frac{n}{3}\ldots 1$	$\frac{n}{3}\ldots 2$
d	$\frac{[n(d(n-1)+2]}{6}$	$\frac{(n-1)(dn+2)}{6}$	$\frac{(n+1)[d(n-2)+2]}{6}$

(二)立體正三角錐堆疊翻轉之研究結果

在立體正三角椎 n 層圓球堆疊(n>4)的情況下，移動最少顆使尸其翻轉，若最少顆數為 F(n)，則公式如下：

1.當$\frac{n}{2}\ldots 0$時，公式為 $F(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{n(n+4)(n-1)}{12}=\frac{n(n^2+3n+8)}{12}$

2.當$\frac{n}{2}\ldots 1$時，公式為$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{(n+1)(n^2+2n+3)}{12}=\frac{(n+1)(n+3)(n-1)}{12}$

二、正四棱錐堆疊翻轉問題的定義

(一)正四棱錐堆疊的記數方式

正四棱錐堆疊：用硬幣排出n層正方形，每一層間的硬幣等距，試著移動最少硬幣數讓正四棱錐堆疊倒過來，我們將移動的最少顆數記為$f(n)$，n 為層數。如下圖 1 中 n 為 5，所以移動最少顆數為 34 顆，記為f(5)=34，如圖 3：

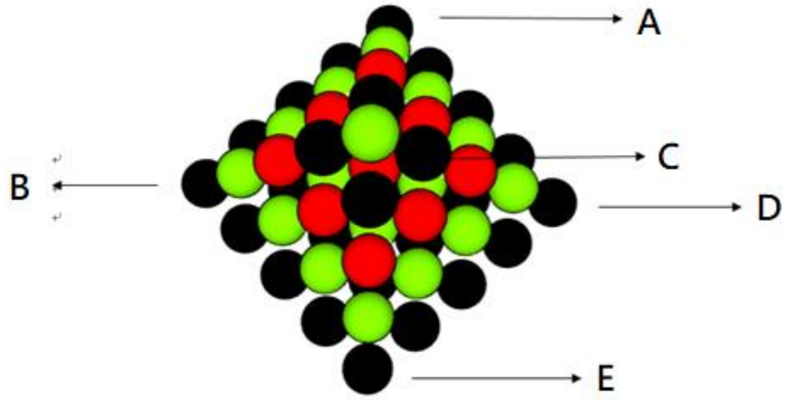


圖 3：正四棱錐堆疊位置示意圖

(二)正四棱錐堆疊的翻轉定義

將圓球堆疊成正 ABCDE，以 C 為旋轉中心點，將錐體旋轉 180 度，可以得到顛倒的正四棱錐堆疊，如果圖 8 中，正四棱錐堆疊有 5 層，移動x顆球後可變成倒立圖形，移動最少顆數記F(5)，如下圖 4 和 5：

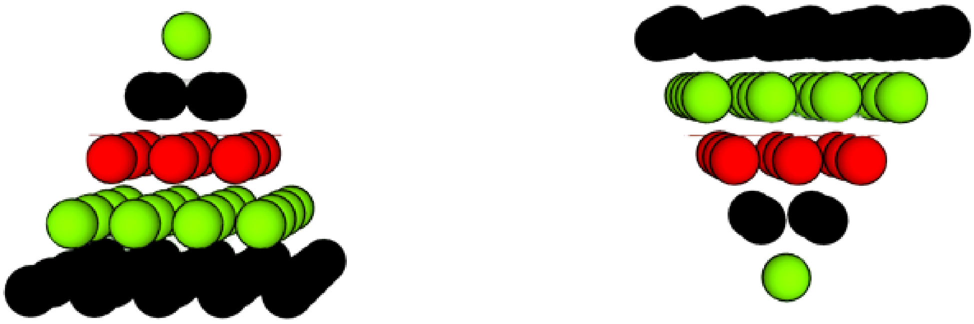


圖 4：正四棱錐翻轉示意圖

三、進行觀察

首先，為了讓我們比較方便的推算出移動的顆數，所以我們利用了 3D 的繪圖軟體-sketchup 來幫助我們來觀察重疊的部分，如下圖 6 和 7：

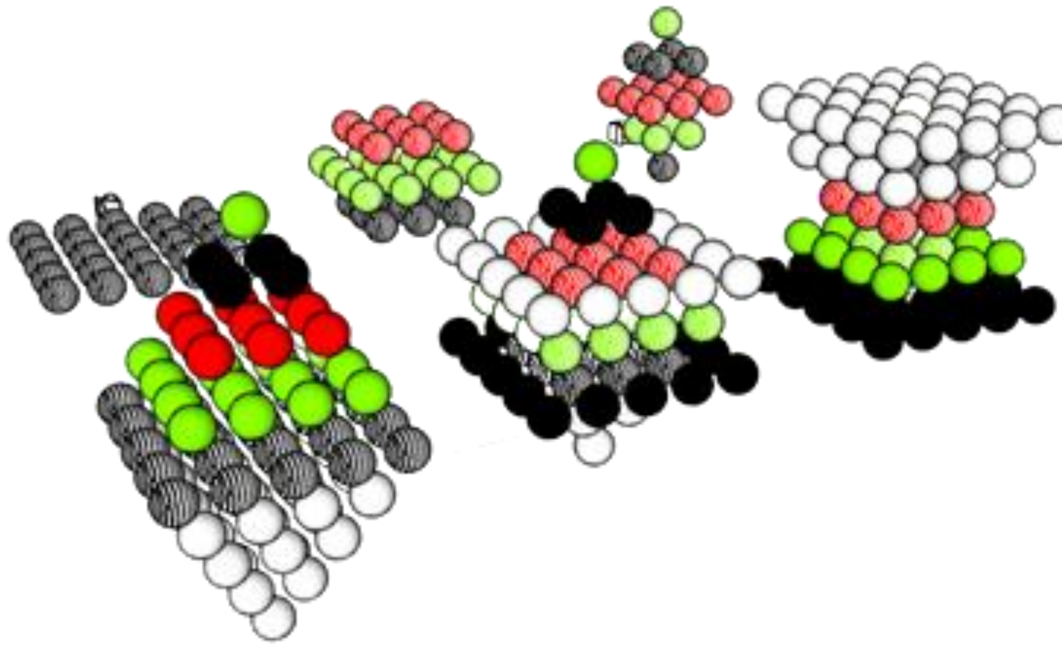


圖 6：正四棱錐堆疊翻轉過程示意圖(1)

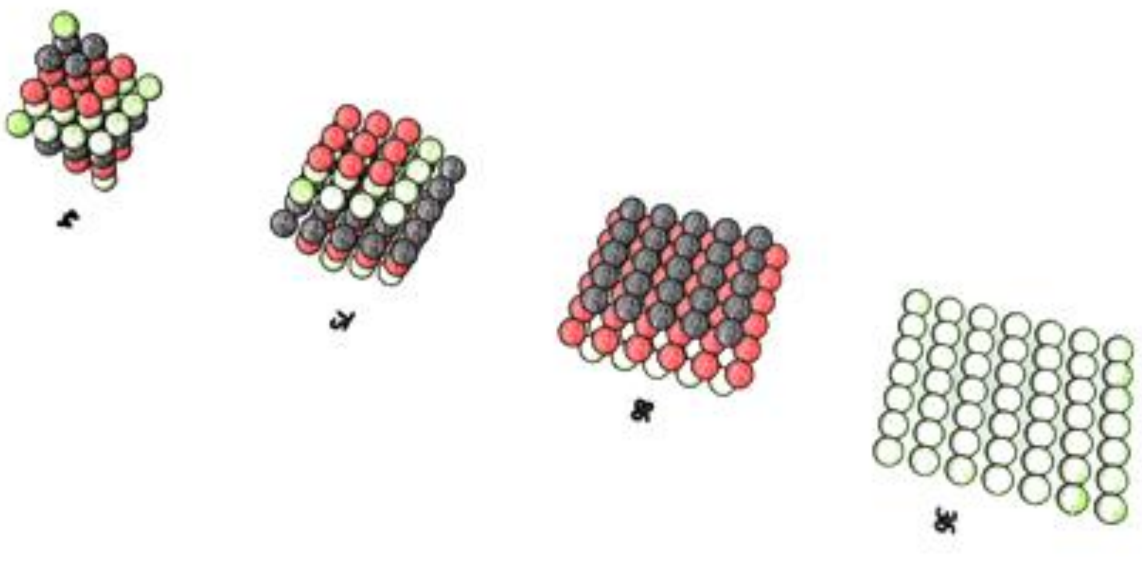


圖 7：正四棱錐堆疊翻轉過程示意圖(2)

接下來我們試著不同層數互換，看看有什麼規律。在這個過程中，我們發現最底層(n)和倒數第 3 層(n-2)互換，不移動顆數會最多。為了證明我們的想法，我們試著用 sketchup 把所有層數互

換的結果都畫出來，結果如下表 3：

表 3： n 為 3 到 7 時各層互換不移動顆數的結果

互換層換	n 和 n	n 和(n-1)	n 和(n-2)	n 和(n-3)	n 和(n-4)
重疊層數	1	2	3	4	5
重疊顆數公式	n^2	$(n-1)^2*2 = n(2n-4)+2$	$(n-1)^2 + (n-2)^2*2 = n(3n-10)+9$	$[(n-2)^2 + (n-3)^2]*2 = n(4n-20)+26$	$(n-2)^2 + (n-3)^2*2 + (n-4)^2*2 = n(5n-32)+54$
舉例 (n=3)	9	8	5		
舉例 (n=4)	16	18	17	10	
舉例 (n=5)	25	32	34	26	19
舉例 (n=6)	36	50	57	50	42
舉例 (n=7)	49	36	86	75	75

由上表可以知道，從第 5 層開始，最多不移動顆數的都是 n 和(n-2)換。接下來為了方便觀察重疊部分的樣子，我們使用另一個 2D 繪圖軟體---gsp 來進行觀察重疊的部分，如下圖 8 和 9：

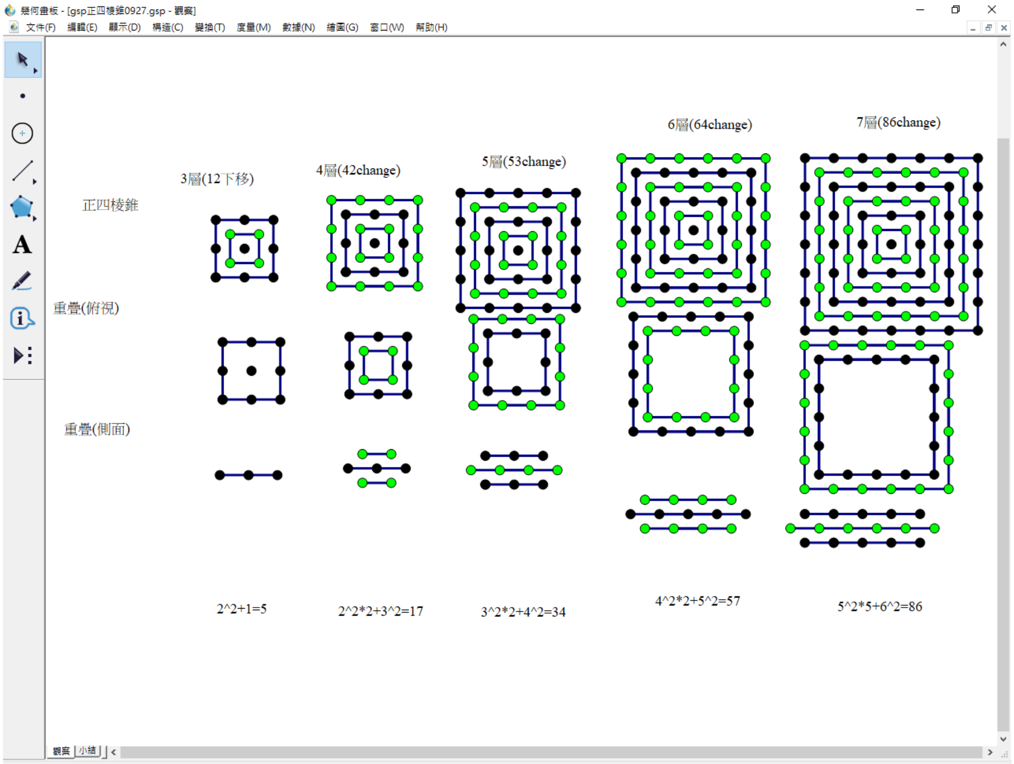


圖 8：正四棱錐堆疊重疊部分的觀察(1)

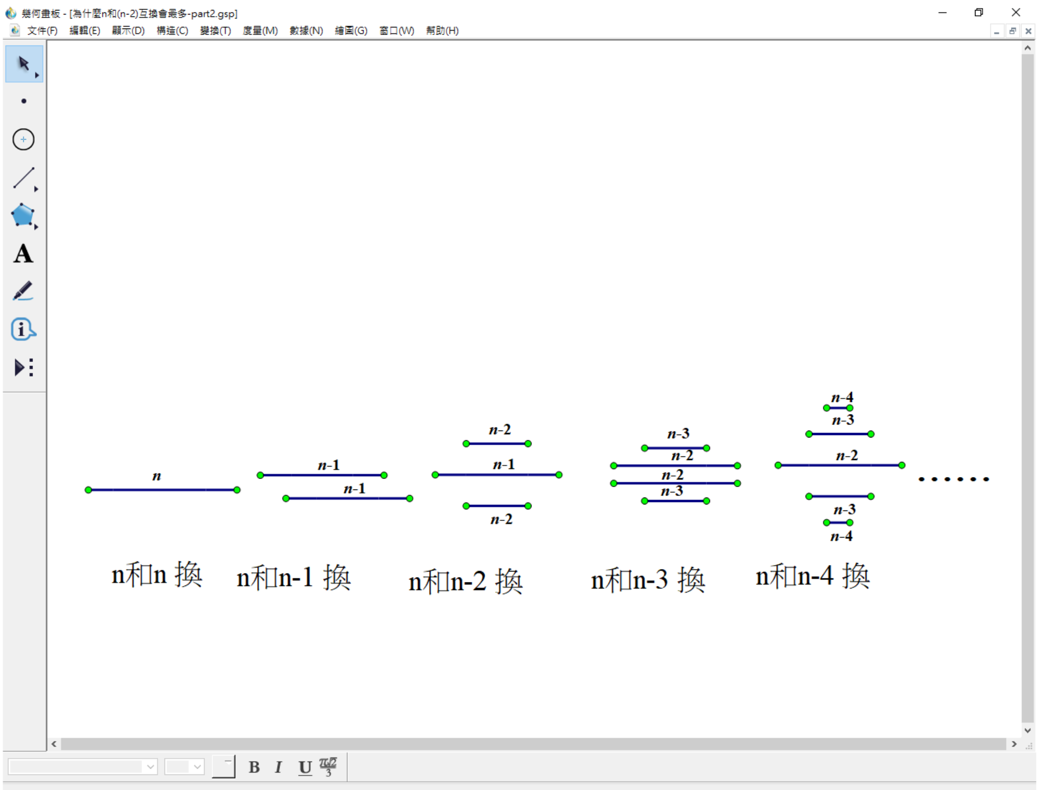


圖 9：正四棱錐堆疊重疊部分的觀察(2)

小結：

由於這次小論文的時間非常緊迫，所以我們沒有時間用公式來證明 n 和 n-2 層互換一定是最多不移動顆數的方式，但看 3~7 層的最多不移動顆數結果，我們認為我們的想法是正確的。因為 n 和 n-2 層互換的不移動顆數為$n(3n-10)+9$，正四棱錐的總顆數為$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，所以我們可以算出 n 和 n-2 互換的移動顆數為：

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n(3n-10)+9=\frac{n^3}{3}-\frac{5n^2}{2}+\frac{61n}{6}+9$$ (n>5 之後)

参、研究結論與建議

研究結論：

經過我們的研究觀察後，我們發現:

1.它移動的方式和位置有一定的規律性。

2.如果要找出最少的移動數量，則我們應該要先找出最多的不移動顆數。

3.透過觀察每一組的圖形，我們推論出不移動顆數的公式：$n(3n-10)+9$，和移動顆數的算式：$\frac{n^3}{3}-\frac{5n^2}{2}+\frac{61n}{6}+9$。其中 n 為三角形的層數。

未來展望：

1. 因為這一次我們只有一個月的時間，所以我們無法找出每個層數間的固定公式，所以希望我們未來可以做得更完整，找出可以套用每個層數的公式。並確認我們這次研究出來的公式正不正

確

2. 希望我們在今年的科展把這個研究做完，再把正五棱錐堆疊、正六棱錐堆疊、正七棱錐堆疊、正八棱錐堆疊……等棱錐堆疊。一樣找出最少的移動顆數。

肆、引註資料

一、國民中學數學課本第二冊、第五冊。

二、陳語謙。翻轉金字塔。花蓮縣第 59 屆國中小科展國小組數學科第一名。取自：https://contest.hlc.edu.tw/science/publish/upload/108-A101.pdf

三、micro 小寶。(2017)筆試題的思考:移動最少硬幣讓金字塔上下倒過來。取自: https://kknews.cc/zh-tw/education/4mmpjnv.html。

四、未出師的小工程師。(2017)AutoCAD 3D 繪圖(19)__堆疊圓珠組。取自: https://liuyunantw.pixnet.net/blog/post/461018798-autocad-3d%E7%B9%AA%E5%9C%96(19)__%E5%A0%86%E7%96%8A%E5%9C%93%E7%8F%A0%E7%B5%84?fbclid=IwAR1M7Jk8bg_DlptR-SBcDBAxZtBKvv25O5Ss0WRe1HYWzx6ciyPEicihybM。

五、Shamrockwikiedit。(2022) Σ 取自: https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%CE%A3。

六、張秀州。關於 1^2+2^2+3^2+…+n^2 的多种推导证明方法。取 https://wenku.baidu.com/view/6b9895a349649b66648d74795.html?fbclid=IwAR16L7dmJ1gq4wUsaAdheGO9yBgSZLTwSmVYnjSMf7z7GhaeXAcGcwKl0Lw。

七、棱錐。維基百科。取自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A3%B1%E9%94%A5。

八、四面體。維基百科。取自：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%9B%9B%E9%9D%A2%E9%AB%94?fbclid=IwAR2Ul7UJ04Y9xsfG6zNYzufsNN0PDPiwPJIHlpPHSXT3Zm4HDXybISI28c4

九、謝司宇、陳語謙、陳譔宇。我要翻轉金字塔。花蓮縣第 62 屆國中小科展國中組數學科第三名。取自：https://student.hlc.edu.tw/action/file/376/20220902125451165.pdf

十、Σ。維基百科。取自：https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%CE%A3

十一、GSP 融入數學幾何學習(GSP 入門教學)。Youtube。取自：https://www.youtube.com/watch?v=i3O-NlBezGQ

十二、柯西-施瓦茨不等式。維基百科。取自：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%9F%AF%E8%A5%BF-

%E6%96%BD%E7%93%A6%E8%8C%A8%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8

十三、函數。維基百科。取自：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%87%BD%E6%95%B0

十四、一些球堆成三角形.第一个是一个球,摆成了球形,第二个是用 3 个圆堆起来的三角形,第三个是用 6 个圆堆起来的三角形,第 4 个是 9 个圆堆起来的三角形……你知道第 5 堆有多少个小球吗?第 8 堆呢? 立事作业互答平台——专业的学生作业问答网站。取自：http://51ishi.com/huaxue/2019-09-18/97059.html