投稿類別:自然科學

篇名:
正 n 邊形有 m 個黑點可以連成多少個等腰三角形

作者:
林子勤。自強國中。八年五班。

指導老師:
陳禹翔　老師
徐彥哲　老師

正 n 邊形有 m 個黑點可以連成多少個等腰三角形

壹・前言

一:研究動機

數學研究課老師給我們看了一題科學月刊森朋教官的數學題-七邊形之謎:「正七邊形的頂點有 5 個紅點,2 個黑點,用紅點當頂點可以連成多少個等腰三角形?」以這題目為契機,我在想如果把黑點數繼續增加,或是將七邊形變成多邊形,希望可以得到一個更一般化的結果,於是開始了我的研究。

二:研究目的

(一)正 n 邊形有 2 個黑點可以連成多少個等腰三角形。

(二)正 n 邊形有 3 個黑點可以連成多少個等腰三角形。

(三)正 n 邊形有 4 個黑點可以連成多少個等腰三角形。

(四)正 n 邊形有 m 個黑點可以連成多少個等腰三角形。

三:研究流程:

(一)決定主題

(二)尋找文獻資料

(三)研究討論

(四)整理資料,寫報告

貳·正文

一、文獻資料

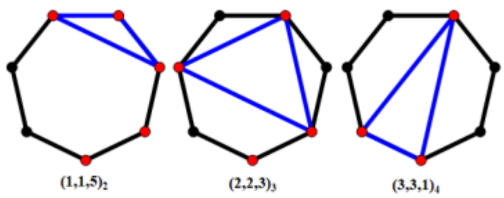
第 60 屆中小學科展國中組數學科的作品，篇名是正 n 多邊形中的等腰個數這樣算，內容也提到七邊形之謎這題目，作者發展出以紅色頂點為等腰三角形頂角的頂點，兩黑點為等腰三角形的底角頂點所能構造出的等腰三角形有多少個的問題，透過觀察得到了一些性質，並證明出正 n 邊形 2 黑點的類型分別為 n 為偶數時，會有$\frac{n(n-2)}{2}$個等腰三角形；n 為奇數時，會有$\frac{n(n-1)}{2}$個等腰三角形；接著又證明出正 n 邊形 3 黑點的類型分別為 n 為偶數時會有$\frac{n(n-1)(n-3)}{4}$個等腰三角形，n 為奇數時會有$\frac{n(n-2)^2}{4}$個等腰三角形，與本研究不同。

二、研究過程

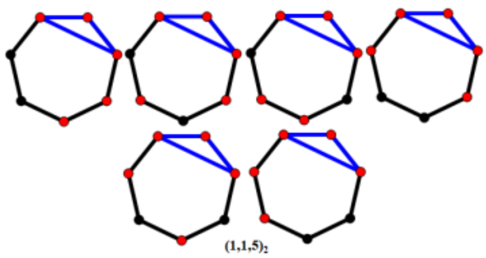
1. 定義名詞

(1) 定義等腰三角形種類與個數

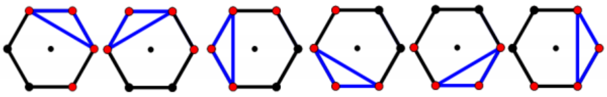
接下來研究的過程中，定義座標(a，a，b)$_m$當作正 n 邊形內等腰三角形種類，其中a表示等腰三角形腰所包含的邊數，b 表等腰三角形底所包含的邊數，$2a+b=n$，m 為黑點個數；$R_m^{(a,b)}(n)$來表示正 n 邊形在$(a,a,b)_m$的情況下等腰三角形種類個數，S_m^n表正 n 邊形有 m 個黑點時等腰三角形種類全部的個數，舉例如下：



如下圖所示，正七邊形在(1，1，5)$_2$所能構造出的等腰三角形種類數有 6 種⇒$R_2^{(1,5)}(7)=6$，



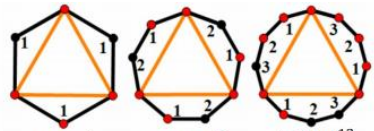
因為$R_2^{(1,5)}(7)=R_2^{(2,3)}(7)=R_2^{(3,1)}(7)=6$，因此可得$S_2^7= 6 \times 3 = 18$。在我的研究過程當中，如果正多邊形透過旋轉使等腰三角形重合，此時黑點位置若相同，皆算為同一類，如下圖都算同一種類型。



(2) 定義正三角形時黑點所在位置

如圖，為了之後研究正三角形黑點擺放的位置與紀錄個數，將正三角形 3 個頂點開始按逆時針方向將黑點可擺放位置編碼，定義分隔符號

$\langle\ |\ |\ \rangle_m^n$來表示正 n 邊形中，m 個黑點分布位置的情形，如下圖。

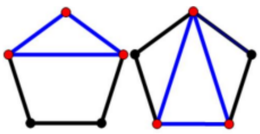


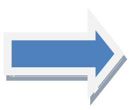
$\langle 1|0|1\rangle_2^6$　$\langle 2|2|2\rangle_3^9$　$\left\langle 3\left|\frac{2}{3}\right|0\right\rangle_3^{12}$

2. 探討正 n 邊形有 2 個黑點可以連成多少個等腰三角形。

我先從正五到正七邊形開始研究，先觀察是否有規律。因為等腰三角形只三個頂點都是紅色，所以我先將等腰三角形位置確定後，再來看黑點可能的位置有哪些。

(1)正五邊形

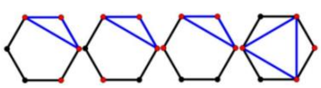




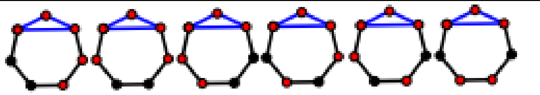
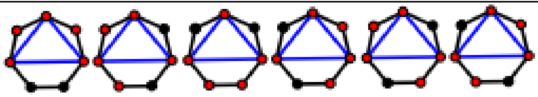
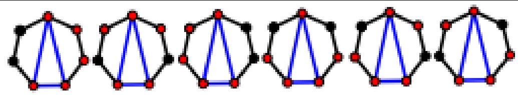
$(1,1,3)_2$個數 1 個，$(2,2,1)_2$也 1 個，所以 $R_2^{(1,3)}(5)=R_2^{(2,1)}(5)=1$，可得 $S_2^5=2$

(2)正六邊形

由下圖可知正六邊形分布在$(1,1,4)_2$的情況時有 3 種，在$(2,2,2)_2$的情況時，可推得等腰三角形分布類型只會有 1 種，原因是因為兩黑點不管放置在任何地方，旋轉後的位置皆重複。從這邊我們也發現如果期刊的題目改成正六邊形，那兩個黑點在對角線的話就沒有等腰三角形了，但是兩個黑點在其他位置的確有等腰三角形，個數分別為 $R_2^{(1,4)}(6)=3$，$R_2^{(2,2)}(6)=1$，可得$S_2^6=3+1= 4$。

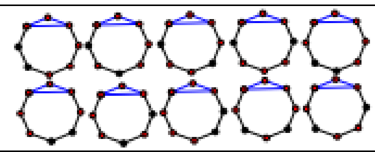
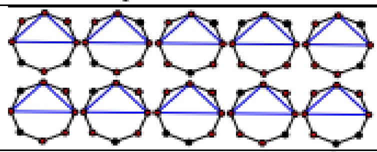
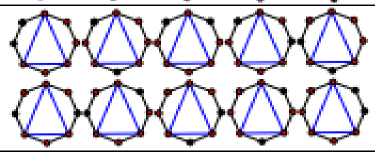


(3)正七邊形研究

正 N 邊形	S_m^n	m 值	個數	種類	圖形
7	S_2^7=18	2	6	$(1,1,5)_2$	
			6	$(2,2,3)_2$	
			6	$(3,3,1)_2$	

正七邊形的黑點分布結果如上表，可以發現$R_2^{(1,5)}(7) = R_2^{(2,3)}(7) = R_2^{(3,1)}(7) = 6$，與正六邊形不同地方在於正七邊形的每一個黑點分布方法中，旋轉後都不會彼此間互相重複，原因是因為只要等腰三角形不構成正三角形，就不會有重複圖形發生。

(4)正八邊形

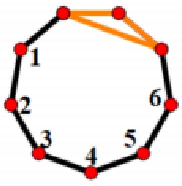
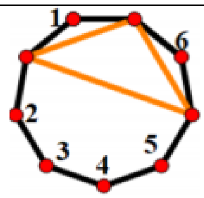
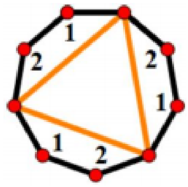
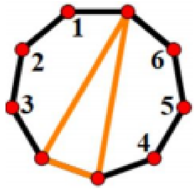
正 N 邊形	S_m^n	m 值	個數	種類	圖形
8	S_2^8=30	2	10	$(1,1,6)_2$	
			10	$(2,2,4)_2$	
			10	$(3,3,2)_2$	

由上表可發現與正六邊形不同地方在於不管兩黑點如何分布，都可以找出等腰三角形的類型，此時因為沒有正三角形的情況出現，因此每一種方法都不會互相重複出現，此時 $R_2^{(1,6)}(8) = R_2^{(2,4)}(8) = R_2^{(3,2)}(8) = 10$，$S_2^8 = 10 \times 3 = 30$。

(5)正九邊形

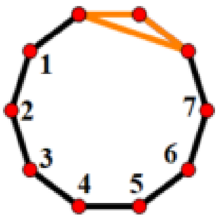
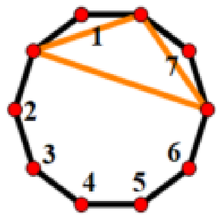
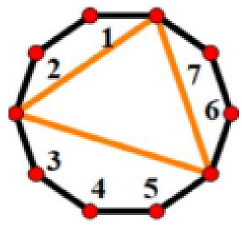
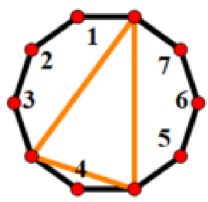
正 N 邊形	正九邊形

正 n 邊形有 m 個黑點可以連成多少個等腰三角形

總類圖				
M 值	2	2	2	2
總類	$(1,1,7)_2$	$(2,2,5)_2$	$(3,3,3)_2$	$(4,4,1)_2$
個數	$\frac{(1+5)\times5}{2}$=15	$\frac{(1+5)\times5}{2}$=15	1+2×2=5	$\frac{(1+5)\times5}{2}$=15
總數	S_2^9=15×3+5=50			

上表先幫黑點可擺放位置編碼，第一個黑點先擺在 1 的位置，第二個黑點則有 2、3、4、5、6 五個位置可選擇，同理，第一個黑點若擺在 2 的位置第二個黑點有 3、4、5、6 四個位置可選擇，依此類推總個數$\frac{(1+5)\times 5}{2}$=15 種，但是正三角形時只有$\langle {}^{1}_{2}|0|0\rangle^{9}_{2}$和$\langle 1|1|0\rangle^9_2$、$\langle 1|2|0\rangle^9_2$、$\langle 2|1|0\rangle^9_2$、$\langle 2|2|0\rangle^9_2$共 5 種。

(6)正十邊形

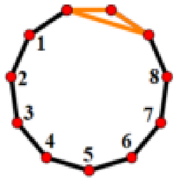
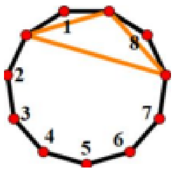
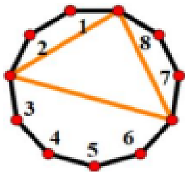
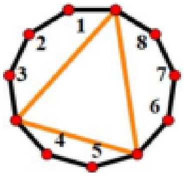
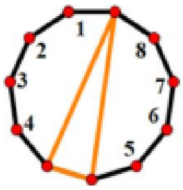
正 N 邊形	正十邊形			
種類圖				
M 值	2	2	2	2
種類	$(1,1,8)_2$	$(2,2,6)_2$	$(3,3,4)_2$	$(4,4,2)_2$
個數	$\frac{(1+6)\times6}{2}$=21	$\frac{(1+6)\times6}{2}$=21	$\frac{(1+6)\times6}{2}$=21	$\frac{(1+6)\times6}{2}$=21
總數	S_2^{10}=21×4=84			

正十邊形中的等腰三角形種類因為沒有正三角，所以不會有重複情況出現，等腰三角形的四種狀況都能找出 21 種不同的擺放位置。

(7)正十一邊形

正 N 邊形	正十一邊形

正 n 邊形有 m 個黑點可以連成多少個等腰三角形

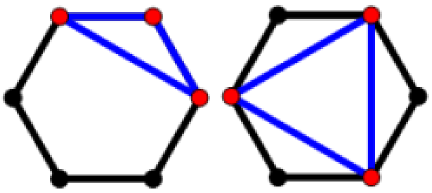
種類圖					
M 值	2	2	2	2	2
種類	$(1,1,10)_2$	$(2,2,8)_2$	$(3,3,6)_2$	$(4,4,4)_2$	$(5,5,2)_2$
個數	$\frac{(1+8)\times 8}{2}$=36	$\frac{(1+8)\times 8}{2}$=36	$\frac{(1+8)\times 8}{2}$=36	3+3×3=12	$\frac{(1+8)\times 8}{2}$=36
總數	S_2^{12}=36×4+12=156				

在正十二邊形的圖表中，和正十一邊形相同也五大類，除了正三角形 $(4,4,4)_2$外，每一類個數皆為 36 種，而正三角形可分為兩黑點在同一邊與一點一邊兩種情況來討論，兩黑點在同一邊有$\langle \binom{1}{2}|0|0\rangle_2^{12}$、$\langle \binom{2}{3}|0|0\rangle_2^{12}$、$\langle \binom{1}{3}|0|0\rangle_2^{12}$共 3 種，一點一邊的情況則有$\langle 1|1|0\rangle_2^{12}$、$\langle 1|2|0\rangle_2^{12}$、$\langle 1|3|0\rangle_2^{12}$、$\langle 2|1|0\rangle_2^{12}$、$\langle 2|2|0\rangle_2^{12}$、$\langle 2|3|0\rangle_2^{12}$、$\langle 3|1|0\rangle_2^{12}$、$\langle 3|2|0\rangle_2^{12}$、$\langle 3|3|0\rangle_2^{12}$共 9 種。

3. 探討正 n 邊形有 3 個黑點可以連成多少個等腰三角形。

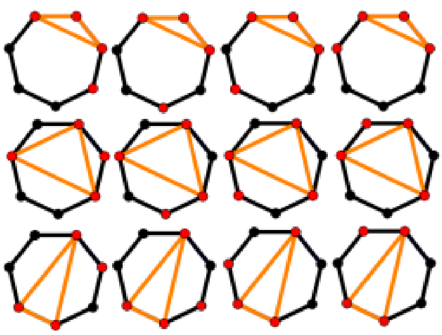
和兩個黑點時相同，我從正六和正七邊形開始研究，先觀察其規律。

(1)正六邊形



$(1,1,4)_2$個數 1 個，$(2,2,2)_2$也 1 個，所以 $R_2^{(1,4)}(5)=R_3^{(2,2)}(5)=1$

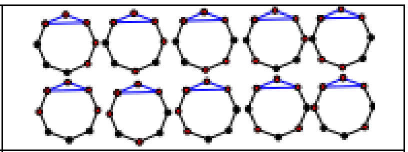
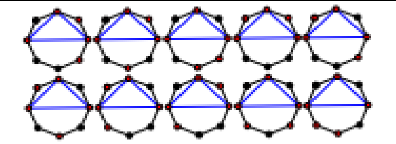
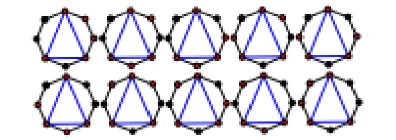
(2)正七邊形



如圖可知 $R_2^{(1,5)}(7)=R_3^{(2,3)}(7)=R_3^{(3,1)}(7)=4$

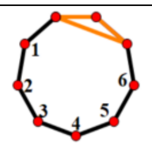
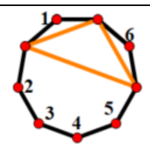
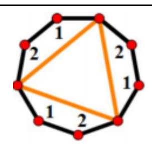
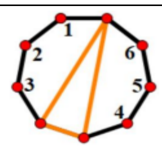
(3)正八邊形

正 N 邊形	S_2^8	m 值	個數	種類	圖形

8	30	3	10	$(1,1,6)_3$	
			10	$(2,2,4)_3$	
			10	$(3,3,2)_3$	

上表中，圖形的找法為從等腰三角形頂點左邊開始，先放第一個黑點，第二個和第三個黑點順序都找出來以後，再將第一個黑點往後前進一格，一樣找出第二個和第三個黑點的所有可能性後，以此規則重複下去，最後把所有可能性列舉出來。

(4)正九邊形

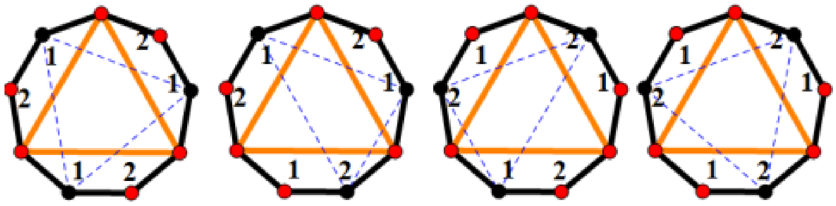
正 N 邊形	正九邊形			
種類圖				
種類	$(1,1,7)_3$	$(2,2,5)_3$	$(3,3,3)_3$	$(4,4,1)_3$
個數	1+3+6+10=20	1+3+6+10=20	2×2+2×2=8	1+3+6+10=20
總數	S_3^9=20×3+8=68			

上表中，$(1,1,7)_3$、$(2,2,5)_3$、$(4,4,1)_3$這三組中，如果將第一個黑點先放 1 的位置，第二個黑點 2 到 5，第三個黑點對應往後放 3~6、4~6、5~6、6，依此推出方法數有$\frac{(1+4)4}{2}=10$，若第一個黑點先放 2 的位置，第二個黑點放 3 則第三個黑點可放 4、5、6 四個位置，方法數$\frac{(1+3)3}{2}=6$，繼續依此規則可得

$R_3^{(1,7)}(9)=R_3^{(2,5)}(9)=R_3^{(4,1)}(9)=\frac{(1+4)4}{2}+\frac{(1+3)3}{2}+\frac{(1+2)2}{2}+1=20$。

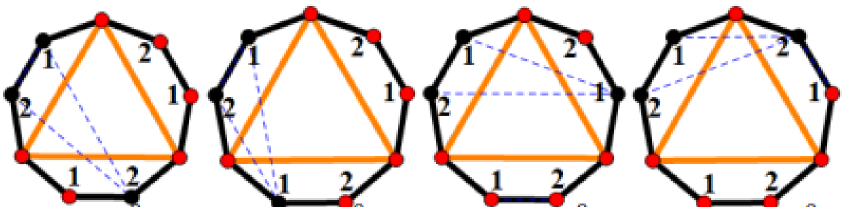
在$(3,3,3)_3$這組中，因為正三角形會有重複出現問題，因此以下列方式計算個數：

(1) 三個黑點分散有$\langle 1|1|1\rangle_3^9$、$\langle 1|2|1\rangle_3^9$與其對稱型$\langle 2|2|2\rangle_3^9$、$\langle 2|1|2\rangle_3^9$四種。



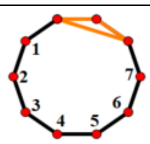
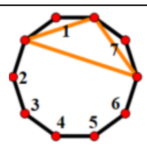
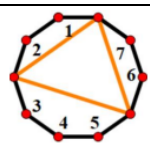
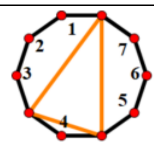
$\langle 1|1|1\rangle_3^9$ $\langle 1|1|2\rangle_3^9$ $\langle 2|2|1\rangle_3^9$ $\langle 2|2|2\rangle_3^9$

(2) 三個黑點其中兩個同一邊有$\left\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2} \middle| 1 \middle| 0 \right\rangle_3^9$、$\left\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2} \middle| 2 \middle| 0 \right\rangle_3^9$與其對稱型$\left\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1} \middle| 2 \middle| 0 \right\rangle_3^9$、$\left\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1} \middle| 1 \middle| 0 \right\rangle_3^9$四種。



$\left\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2} \middle| 1 \middle| 0 \right\rangle_3^9$ $\left\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2} \middle| 2 \middle| 0 \right\rangle_3^9$ $\left\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2} \middle| 0 \middle| 1 \right\rangle_3^9$ $\left\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2} \middle| 0 \middle| 2 \right\rangle_3^9$

(5)正十邊形

正 N 邊形	正十邊形			
種類圖				
種類	$(1,1,8)_3$	$(2,2,6)_3$	$(3,3,4)_3$	$(4,4,2)_3$
個數	1+3+6+10+15=35	1+3+6+10+15=35	1+3+6+10+15=35	1+3+6+10+15=35
總數	S_3^{10}=35×4=140			

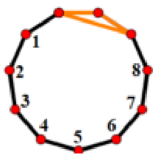
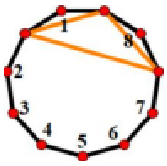
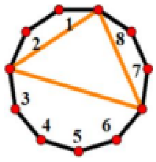
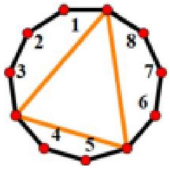
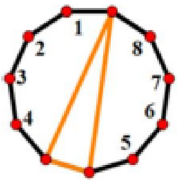
如上表，在$(1,1,8)_3$、$(2,2,6)_3$、$(3,3,4)_3$、$(4,4,2)_3$這四組中，如果將第一個黑點先放 1 的位置，第二個黑點從 2 到 6、第三個黑點對應往後放 3~7、4~7、5~7、6~7、7，依此方法數有$\frac{(1+5)5}{2}$=15，繼續依此規則可得

$R_3^{(1,8)}(10)=R_3^{(2,6)}(10)=R_3^{(3,4)}(10)=R_3^{(4,2)}(10)=\frac{(1+5)5}{2}+\frac{(1+4)4}{2}+\frac{(1+3)3}{2}+\frac{(1+2)2}{2}+1=35$。

(6)正十一邊形

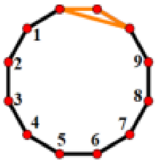
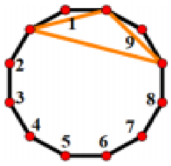
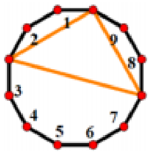
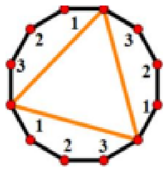
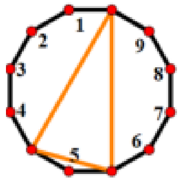
正 N 邊形	正十一邊形

正 n 邊形有 m 個黑點可以連成多少個等腰三角形

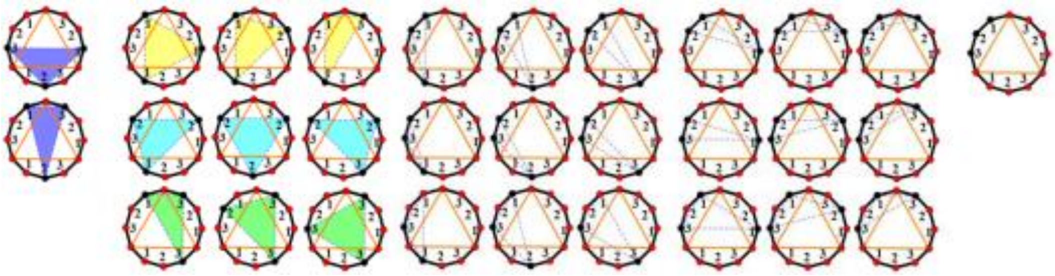
種類圖					
種類	$(1,1,9)_3$	$(2,2,7)_3$	$(3,3,5)_3$	$(4,4,3)_3$	$(5,5,1)_3$
個數	56	56	56	56	56
總數	S_3^{11}=56×5=280				

如上表，$R_3^{(1,9)}(11)=R_3^{(2,7)}(11)=R_3^{(3,5)}(11)=R_3^{(4,3)}(11)=R_3^{(5,1)}(11)=\frac{(1+6)6}{2}+\frac{(1+5)5}{2}+\frac{(1+4)4}{2}+\frac{(1+3)3}{2}+\frac{(1+2)2}{2}+1=56$。

(7)正十二邊形

正N邊形	正十二邊形				
種類圖					
種類	$(1,1,10)_3$	$(2,2,8)_3$	$(3,3,6)_3$	$(4,4,4)_3$	$(5,5,2)_3$
個數	84	84	84	84	84
總數	$S_3^{12}=84\times4+[(3\times3+2)+(3\times3\times2+1)]=366$				

上表中 $R_3^{(1,10)}(12)=R_3^{(2,8)}(12)=R_3^{(3,6)}(12)=R_3^{(5,2)}(12)=\frac{(1+7)7}{2}+\frac{(1+6)6}{2}+\frac{(1+5)5}{2}+\frac{(1+4)4}{2}+\frac{(1+3)3}{2}+\frac{(1+2)2}{2}1=84$，而$R_3^{(4,4)}$=(3×3+2)+(3×3×2+1)=30，原因如下圖。



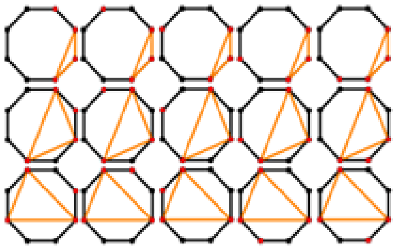
4. 探討正 n 邊形有 4 個黑點可以連成多少個等腰三角形。

先從正七和正八邊形開始研究，先觀察其規律。

(1)正七邊形

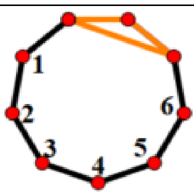
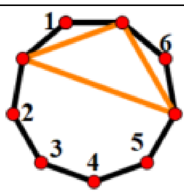
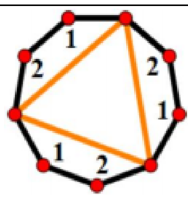
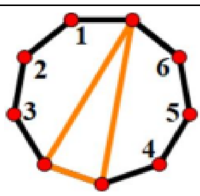
如圖可知
$R_4^{(1,5)}(7)=R_4^{(2,3)}(7)=R_4^{(3,1)}(7)=1$

(2)正八邊形



如圖可知
$R_4^{(1,6)}(8)=R_4^{(2,4)}(8)=R_4^{(3,2)}(8)=5$
，可得$S_4^8=15$

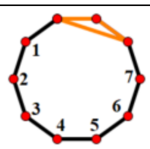
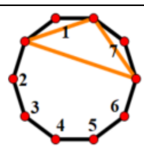
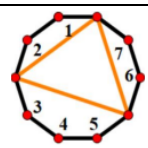
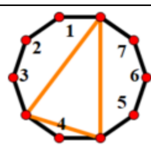
(3)正九邊形

正 N 邊形	正九邊形			
種類圖				
種類	$(1,1,7)_4$	$(2,2,5)_4$	$(3,3,3)_4$	$(4,4,1)_4$
個數	1+4+10=15	1+4+10=15	2×2+1=5	1+4+10=15
總數	$S_4^9=15\times3+5=50$			

當第一個黑點擺在 1 的位置時，第二、三、四個黑點會有 5 個位置可放置，此時擺放方法有 10 種，若第一個黑點移到 2 的位置時，第二、三、四個黑點會有 4 個位置可放置，此時方法數有 4，若第一個黑點移到 3 的位置時，只有一種擺法。

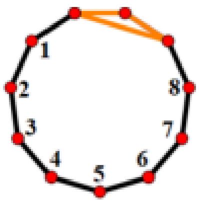
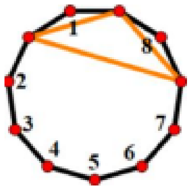
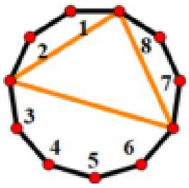
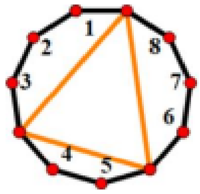
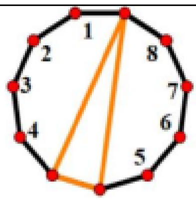
而正三角形此時有$\langle\frac{1}{2}|\frac{1}{2}|0\rangle_4^9$和$\langle\frac{1}{2}|1|1\rangle_4^9$、$\langle\frac{1}{2}|1|2\rangle_4^9$、$\langle\frac{1}{2}|2|1\rangle_4^9$、$\langle\frac{1}{2}|2|2\rangle_4^9$共 5 種擺法。

(4)正十邊形

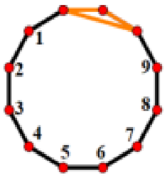
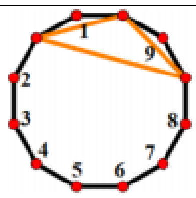
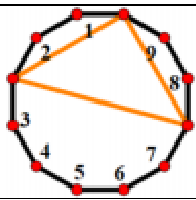
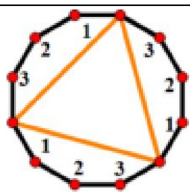
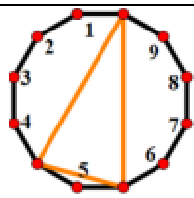
正 N 邊形	正十邊形			
種類圖				
種類	$(1,1,8)_4$	$(2,2,6)_4$	$(3,3,4)_4$	$(4,4,2)_4$
個數	1+4+10+20=35	1+4+10+20=35	1+4+10+20=35	1+4+10+20=35
總數	$S_4^{10}=35\times4=140$			

正十邊形因為沒有正三角形的情況出現，因此每一種方法都不會互相重複出現，當第一個黑點擺在 1 的位置時，第二、三、四個黑點會有 6 個位置可放置，此時擺放方法有 20 種，若第一個黑點移到 2 的位置時，第二、三、四個黑點會有 5 個位置可放置，此時方法數有 10，依此類推，等腰三角形共有 35 × 4 = 120 個。

(5)正十一邊形

正 N 邊形	正十一邊形				
種類圖					
種類	$(1,1,9)_4$	$(2,2,7)_4$	$(3,3,5)_4$	$(4,4,3)_4$	$(5,5,1)_4$
個數	1+4+10+20+35=70	1+4+10+20+35=70	1+4+10+20+35=70	1+4+10+20+35=70	1+4+10+20+35=70
總數	S_4^{11}=70×5=350				

(6)正十二邊形

正 N 邊形	正十二邊形				
種類圖					
種類	$(1,1,10)_4$	$(2,2,8)_4$	$(3,3,6)_4$	$(4,4,4)_4$	$(5,5,2)_4$
個數	126	126	126	42	126
總數	S_4^{12}=126×4+(6+9+27)=546				

參・結論

透過這次的研究，我的結論如下：

一、正 n 邊形有 2 個黑點可以連成多少個等腰三角形 ：

1. 由以上歸納出，正 n 邊形有 2 個黑點時，若$a \neq b$，則$R_2^{(a,b)}$(n)為三角形數。

2. 正 n 邊形 n 為奇數時，等腰三角形的種類會有$\frac{n-1}{2}$種；n 為偶數時，種類會有$\frac{\mathrm{n}-2}{2}$種。

3. 正 n 邊形有 2 個黑點時，若$a \neq b$，則$\mathrm{R}_2^{(a,b)}(\mathrm{n}) = \frac{(\mathrm{n}-3)(\mathrm{n}-4)}{2}$。

4. 正 n 邊形有 2 個黑點時，若$a = b$，則$\mathrm{R}_2^{(a,b)}(\mathrm{n}) = \frac{(\mathrm{n}-3)(\mathrm{n}-4)}{6}$。

二、正 n 邊形有 3 個黑點可以連成多少個等腰三角形 ：

1. 正 n 邊形有 3 個黑點時，若$a \neq b$，則$\mathrm{R}_3^{(a,b)}(\mathrm{n}) = \frac{(\mathrm{n}-3)(\mathrm{n}-4)(\mathrm{n}-5)}{6}$。

2. 正 n 邊形有 3 個黑點時，若$a = b$，則$R_3^{(a,a)}(\mathrm{n}) = \frac{(\mathrm{n}-3)[(n-3)^2-3(\mathrm{n}-3)+6]}{18}$。

三、正 n 邊形有 4 個黑點可以連成多少個等腰三角形 ：

1. 正 n 邊形有 4 個黑點時，若$a \neq b$，則$\mathrm{R}_4^{(a,b)}(\mathrm{n}) = \frac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}{24}$。

2. 正 n 邊形有 4 個黑點時，若$a = b$，則$R_4^{(a,a)}(\mathrm{n}) = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{72}$。

四、正 n 邊形有 m 個黑點可以連成多少個等腰三角形 ：

1. 正 n 邊形有 4 個黑點時，若$a \neq b$，則$R_4^{(a,b)}(\mathrm{n}) = \frac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}{24}$。

2. 正 n 邊形有 4 個黑點時，若$a = b$，則$R_4^{(a,a)}(\mathrm{n}) = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{72}$。

肆・引註資料

一、游森棚(民 108 年 2 月)。森鵬教官的數學題-七邊形之謎。科學研習期刊，58-2。取自 https://www.ntsec.edu.tw/LiveSupply-Content.aspx?cat=6842&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&lsid=15533。

二、紀珮羽、吳珈榛，正 n 多邊形中的等腰個數這樣算，中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品說明書。

三、張幼賢(2020)。國民中學數學課本第 1、2、3、4 冊，台南：翰林。