

投稿類別:自然科學類

篇名:

用基礎數學原理解奧數—排列組合

作者:

王昱臻。新北市崇林國中。七年五班。

黃品樺。新北市崇林國中。七年十七班。

指導老師: 羅陽青老師

壹●前言

一、研究動機

在一次課後的數學社團裡，我們對數學的熱愛讓我們想挑戰一些更難的題目。我們決定試試高中奧數的題目，但當我們開始學習數論、幾何和代數時，發現這些真的有點難懂。

經過討論和老師的建議，我們決定轉向排列組合。排列組合聽起來好像簡單，其實裡面有很多有趣的數學思想。我們想到生活中常見的問題，比如怎麼安排座位、選不同口味的冰淇淋，這些都跟排列組合有關。我們也對計算不同情況下的可能性感到非常好奇。

因此，我們決定從這裡開始，深入研究這個既熟悉又有挑戰的領域。我們希望通過這次研究，不僅能提高自己的數學能力，還能找到一些有趣的規則，把學到的知識整理成小論文，參加科學展覽，和更多對數學有興趣的同學分享！

二、研究目標

1. 透過深入探索排列組合的基本概念與原理：通過系統性的學習，掌握排列組合的核心思想，如排列、組合、二項式定理等，為解決複雜問題奠定基礎。

2. 學習並提升數學思維與解題能力：挑戰高中奧數中的排列組合問題，培養嚴謹的邏輯推理和分析能力，學習多種解題方法。

3. 發現並總結規律：在研究過程中，嘗試發現題目背後的模式和規律，總結出有效的解題技巧，為未來的學習提供參考。

4. 撰寫小論文並參加科展：將研究成果以論文形式呈現，參加科學展覽，鍛鍊表達和展示能力，同時接受他人的意見和建議。

5. 激發對數學的持續興趣：通過深入的研究和實踐，增強對數學的熱情，激勵自己和他人繼續探索更高層次的數學知識。

6. 我們希望這次的研究不僅能讓我們學到更多東西，還能幫助我們在數學這麼大的一個領域找到自己的興趣和方向。我們相信，只要保持對數學的熱情和好奇心，將來一定能有更多進步，甚至取得一些小小的成就！

三、研究方法

我們需要做到以下幾個步驟：

1. 搜集和分析已有的中學數學教材、研究文獻，特別是關於排列組合的部分，了解其中涉及的基本概念與解題技巧。尋找並總結中學數學中與排列組合相關的基礎概念，分析這些概念如何應用於解決更高級別的排列組合問題。

2. 問題選擇與範圍確定：明確選取要研究的高中排列組合問題，確保這些問題在一定程度上可以利用國中數學概念來解決。確定研究範圍，包括所涉及的排列組合問題的難度級別和範疇。

3. 數學概念分析：詳細分析國中數學中涉及的基本概念，如因子、排列、組合等，並說明這些概念如何轉化為解決高中排列組合問題的工具。舉例說明如何使用這些國中數學概念來解決具體的排列組合問題。

4. 問題求解過程：逐步展示如何利用國中數學概念解決選定的排列組合問題，包括步驟說明和過程中的關鍵推理。比較國中數學方法與高中數學方法在解題中的異同，分析這些異同如何影響解題過程和結果。

5. 實驗與驗證：通過實際解題過程，檢驗國中數學概念在解高中排列組合問題中的應用效果。收集和分析學生使用這些概念解題的結果，評估其有效性和可行性。

6. 結果分析與討論：分析通過國中數學概念解題的成功與失敗案例，討論這些概念的應用範圍和限制。討論如何通過進一步的學習或教學方法改進這些概念的應用。

7. 結論與建議：總結研究的主要發現，確認國中數學概念在解高中排列組合問題中的作用和意義。提出未來研究或教學的建議，如何更有效地將這些概念融入到數學教育中

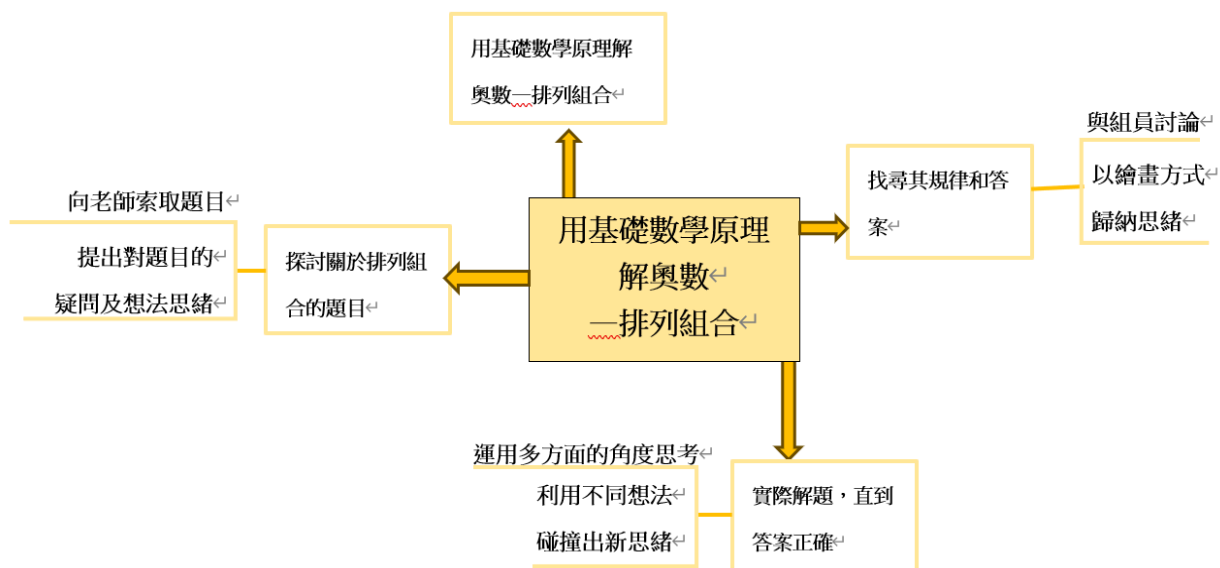
● 文獻回顧：

1. 組合：組合則是不考慮順序，單純選擇物件的方式。也就是說，順序無關重要時使用組合。

公式： $C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

解釋：從 n 個元素中選擇 r 個元素，而不考慮順序。

四、研究架構



貳•正文

一、文獻蒐集

組合數學相當於離散數學，狹義的組合數學是組合計數、圖論、代數結構、數理邏輯等的總稱。但這只是不同學者在叫法上的區別。總之，組合數學是一門研究可數或離散對象的科學。隨著計算機科學日益發展，組合數學的重要性也日漸凸顯，因為計算機科學的核心內容是使用算法處理離散數據。

例如：

1. 船夫過河問題：船夫要把一匹狼、一隻羊和一棵菜運過河。只要船夫不在場，羊就會吃白菜、狼就會吃羊，但船每次只能運送一種東西。怎樣把所有東西運過河？這是線性規劃題。任務分配問題（也稱分配問題）：有一些員工要完成一些任務。各員工完成不同任務用的時間都不同。每個員工只分配一項任務。每項任務只分給一個員工。怎樣分配員工與任務以使所花費的時間最少？也是線性規劃題。
2. 地圖著色問題：為地圖填色，每區用一色。如果要鄰區顏色相異，是否只需四色？這是圖論題。

3. 中國郵差問題：由中華民國組合數學家管梅谷教授提

出。郵差要穿過城市的每一條路至少一次，怎樣行走走過的路程最短？這不是NP完全問題，存在多項式複雜度算法：先求出度為奇數的點，用匹配算法算出這些點間的連接方式，然後再用歐拉路徑算法求解。也是圖論題。

(二)組合公式

排列組合公式

$$A_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m}$$

公式描述：公式中A(n,m)为排列数公式；C(n,m)为组合数公式。44178736

圖1 排列組合公式圖

(二)數學題目討論

例題1

- 小朋友要下 12 階樓梯，每一步他可以下 1 階或 2 階樓梯，且過程中不會倒退。則小朋友共有 10 11 12 種不同的下樓梯走法。

1

圖2.排列組合數學題目

答案是233

4

原因：Fn 為下到第 n 階的所有走法數。注意到走到第 n+2 步的方法數，等於走到第 n+1 階的方法數，加上走到第 n

階後直接走到第 $n+2$ 階的方法數(也就是沒有踏到第 $n+1$ 階), 也就是 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 。又 $F_1 = 1, F_2 = 2$, 故由費氏數列, $F_{12} = 233$ 。

但因為這是高中的解法, 所以我們把算式以簡單的方法解釋並計算。

小朋友下**1**階有幾種法:**1**種

小朋友下**2**階有幾種法:**2**種

小朋友下**3**階有幾種法:**3**種

小朋友下**4**階有幾種法:**5**種

從上可得知小朋友走三階的走法 = 小朋友下**1**階的走法 + 小朋友下**2**階的走法。

因此:

- $f(0)=1, f(1)=1$
- $f(1)=1, f(2)=2$

根據這個遞推關係, 我們可以計算出 $f(n)$ 的值, 直到 $n=12$:

$$f(2)=f(1)+f(0)=1+1=2$$

$$f(3)=f(2)+f(1)=2+1=3$$

$$f(4)=f(3)+f(2)=3+2=5$$

$$f(5)=f(4)+f(3)=5+3=8$$

$$f(6)=f(5)+f(4)=8+5=13$$

$$f(7)=f(6)+f(5)=13+8=21$$

$$f(8)=f(7)+f(6)=21+13=34$$

$$f(9)=f(8)+f(7)=34+21=55$$

$$f(10)=f(9)+f(8)=55+34=89$$

$$f(11)=f(10)+f(9)=89+55=144$$

$$f(12)=f(11)+f(10)=144+89=233$$

例題2

某國有 100 座城市，其中 N 對城市之間有雙向航班。已知對於任三座城市，其中必有兩個城市之間沒有航班。求 N 的最小可能值為多少？

答案為2500

原因： $\because (100/2)^2 = 2500$ 。一般性地，考慮有 n 座城市的圖。由於此圖沒有三完全子圖，由圖倫定理，此圖邊的上界為 $(1 - 1/3 - 1) \times n^2/2 = (n/2)^2$ 。構造上，只要將城市分為等數量的兩組 A 與 B ，並讓 A 的每個城市連接 B 的每個城市即可。

一開始我們想的是可不可以把城市弄成圓形。



圖3 例題二思路圖(1)

然後再一一連線。

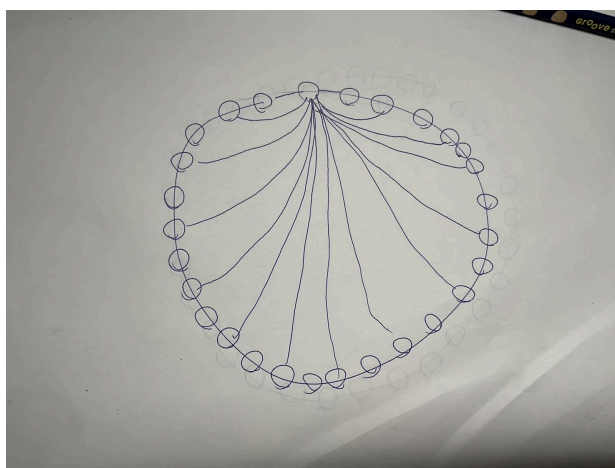


圖4 例題二思路圖(2)

這種方法雖然可以算出答案但很麻煩，且錯誤率高容易重

複算, 所以我們用其他的方法來解題。

首先將城市分為A組跟B組。

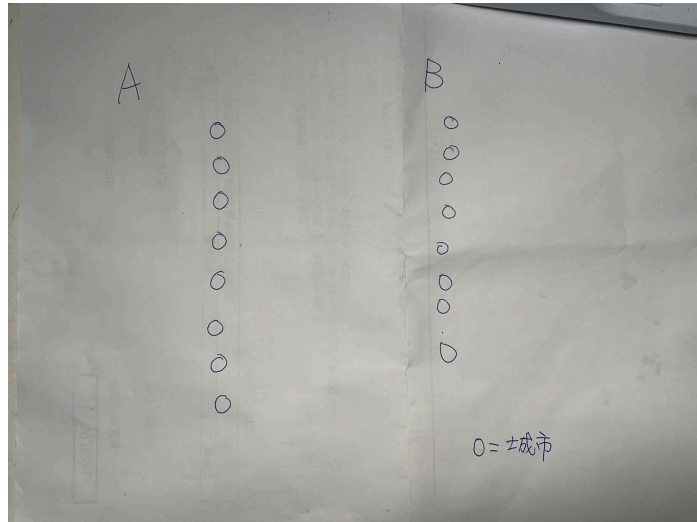


圖4 例題二思路圖(3)

接著再連線。

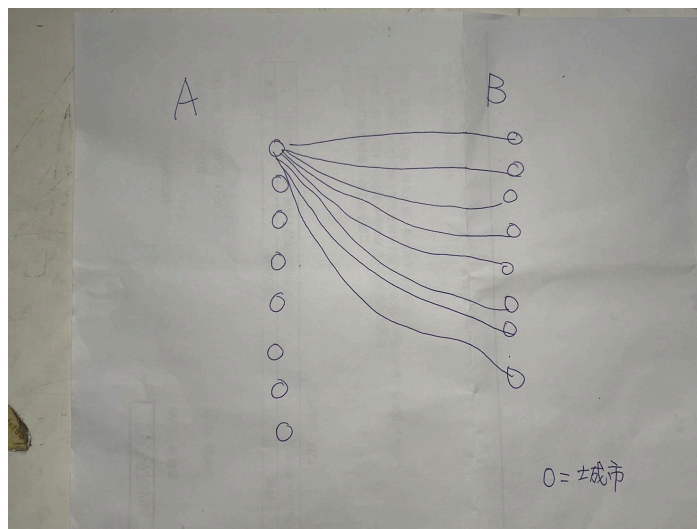


圖5 例題二思路圖(4)

也就是: 1. 將100座城市分成兩組 $100 \div 2 = 50$

2. 50座城市連另外50座城 $50 \times 50 = 2500$

所以我們可以得到答案為: 2500

例題3

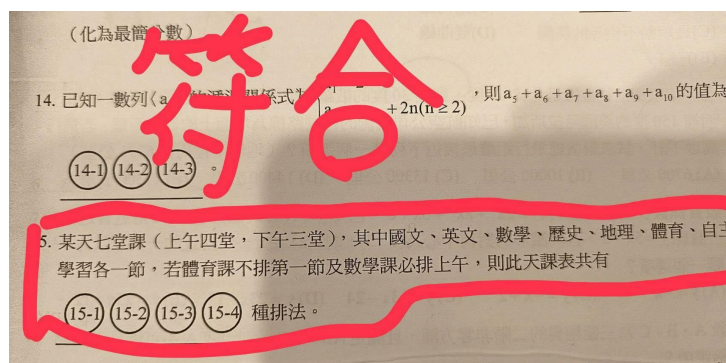


圖6 例題三題目圖

答案2520種

原因:將題目帶入公式, 也就是 $4 \times 6! - 3 \times 5!$
而我們的解題思路和方法是:先把數學可以排的課排好。

接著把體育課在第一節的排列數減掉

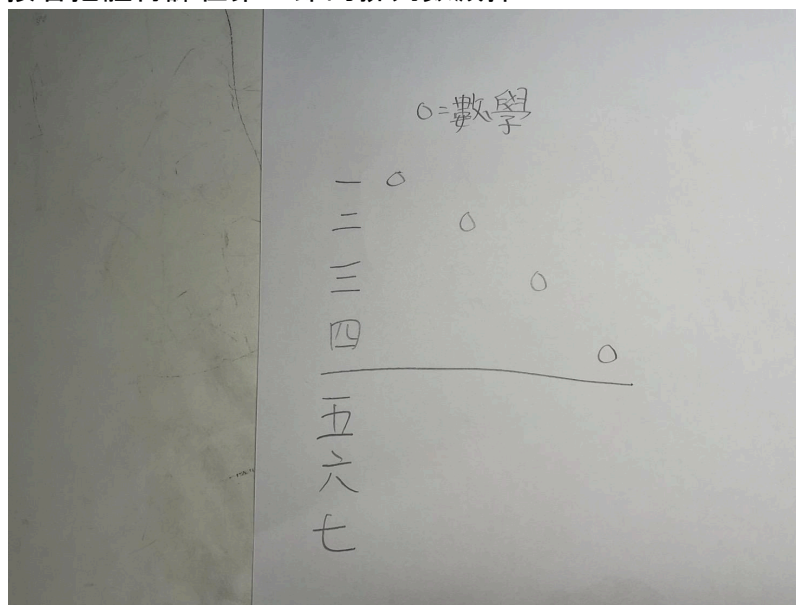


圖7 例題三思路圖(1)

也就是:1.數學在上午的4種情況再乘上剩下六節課的排法。

$4 \times 6!$

2.然後再減上體育課在第一節課, 且數學課在上午的3種情況, 再乘上剩下五節課的排法。

$3 \times 5!$

所以我們可以得到答案為:2500

一、討論

老師給我們布置了高中數學的題目，起初我們計畫涵蓋代數、組合、幾何和數論四個領域。然而，在實際嘗試解題後，我們發現缺乏高中基礎知識讓我們面對代數、幾何和數論的問題時感到困難重重。這讓我們意識到，基礎的重要性不容忽視。而在四個領域中，組合是我們覺得相對來說比較好理解及容易梳理思緒的領域。因此，我們決定將今年的題目集中在組合數學上，這樣不僅能夠加深對組合概念的理解，還能有效提升我們的數學能力。透過聚焦於組合問題，我們能夠更好地掌握必要的解題技巧，為未來學習其他數學領域打下良好的基礎。

如果未來有機會繼續參加這樣的活動，我們希望能夠挑戰更多不同的題目，進一步提升我們對數學的理解。透過各種題型的練習，我們不僅能掌握基本概念，還能探索更複雜的問題，並在解題過程中，發現數學的美妙與趣味。這樣的挑戰不僅能夠增強我們的解題技巧與邏輯，還能激發我們的求知慾，讓我們對數學產生更深的興趣。與同學們一起討論和分享解題思路，能夠激勵彼此的學習，並獲得多方向的解題思路，而這能讓我們在探索數學的過程中碰撞出更多新想法、思緒及變得更加團結和互助。我們期待能在未來的活動中收穫更多的知識和成長。

二、結論

我們的結論是，組合問題其實不難，關鍵在於找出規律和方法，以避免重疊和漏數。透過細心分析和不斷的練習，我們學會了如何系統性地整理思路，從而有效地解決各種組合題目。這不僅讓我們在解題時更加自信，也提升了我們的邏輯思維能力。

此外，研究組合題目還能幫助我們將數學知識應用到日常生活中。在實際情況下，我們經常面對選擇、安排或計數等問題，掌握組合的原理可以讓我們將組合數學的技能融入生活，解決各種實際問題以擁有更有效地做出決策的能力。例如，計算聚會的座位安排或選擇活動的組合，這些都是組合數學的應用。

隨著科技的進步，許多複雜的組合問題甚至能藉助算法和人工智慧來求解。這些技術的發展無疑拓展了組合數學的應用範圍，從簡單的計數問題擴展到複雜的優化、機器學習和數據科學等領域。在這樣的背景下，學會如何系統地解決組合問題，不僅能提高我們在數學上的理解，還能讓我們更好地適應現代社會中的多樣挑戰，實現更全面的學習成長。

肆●引註資料

(一)排列組合

1.維基百科 自由的百科全書 組合數學 維基百科 自由的百科全書

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%BB%84%E5%90%88%E6%95%B0%E5%AD%A6>

2.維基教科書 自由的教學讀本 高中數學 組合計數 排列

<https://zh.wikibooks.org/zh-tw/%E9%AB%98%E4%B8%AD%E6%95%B0%E5%AD%A6/%E7%BB%84%E5%90%88%E8%AE%A1%E6%95%B0%E6%8E%92%E5%88%97>

3.中文百科排列組合(組合數學中的一種)

<https://www.newton.com.tw/wiki/%E6%8E%92%E5%88%97%E7%B5%84%E5%90%88>

4.排列組合國家教育研究院

<https://www.naer.edu.tw/upload/1/16/doc/864/%E6%99%AE%E9%AB%98%E6%8E%92%E5%88%97%E5%B8%AB.pdf>

(二)組合數學題庫

1.排列組合測驗題 國立臺灣師範大學 排列組合

2.【排列組合懶人包】盤點10大必考觀念與6個經典題型，輕鬆備戰大考

<https://tw.amazingtalker.com/blog/zh-tw/k12/74678/>

3.排列組合很可怕？最強懶人包透析排列組合觀念、題目與技巧

<https://academy.snapask.com/zh-tw/post/%E6%8E%92%E5%88%97%E7%B5%84%E5%90%88%E5%BE%88%E5%8F%AF%E6%80%95%EF%BC%9F%E6%9C%80%E5%BC%B7%E6%87%B6%E4%BA%BA%E5%8C%85%E5%9C%A8%E9%80%99%E8%A3%A1%EF%BC%81-0af5eb1c461c>

4.歷屆試題-數學奧林匹亞辦公室

<https://tpmso.org/tmo/index.php/problems/>

5.

桃園市政府教育局重點一排列例題1 試計算下列各式之值：(1) 5

<https://math.ymhs.tyc.edu.tw/chenjt99/ScrClass/1042/HomWok/Book2/%E7%BF%92%E4%BD%9C%E7%94%B22-2%20%E6%8E%92%E5%88%97.pdf>