

投稿類別: 自然科技

篇名：

魔方陣中的鑰匙：中央菱形方陣

作者：

梁坊芸。花蓮縣稻香國小。六年二班

黎妍伶。花蓮縣稻香國小。六年二班

指導老師：

張麟偉老師

林恆卉老師

壹●前言

一、研究動機

在一次偶然的機會下，我們接觸到了魔方陣。一開始，我們覺得魔方陣只是一個普通的數字表格，或是一個益智的謎題，但是當我發現它的每一行、每一列、甚至每一條對角線上的數字加起來都等於同一個數時，我們簡直驚訝極了！這實在是太神奇了，好像這些數字被正方形的表格施了魔法一樣，乖乖的排成了一個完美無缺的圖案。

我們開始思考：為什麼魔方陣會有這樣特別的規律呢？它的組成原理是麼？它背後是不是藏著什麼有趣的數學秘密？它們有沒有一個快速建陣的方法？這些問題就像磁鐵一樣深深的吸引著我，讓我們迫不及待地想要深入了解魔方陣的奧秘。因此，我們決定選擇魔方陣作為我們的研究主題，想要找出魔方陣隱藏的祕密。

二、研究目的

以下是我們的研究目的。

- (一) 探討並熟悉奇數階魔方陣各種建陣方法。
- (二) 探討魔方陣中，各個數字間的規律。
- (三) 探討在奇數階魔方陣中，其它新的建陣方式。

三、研究方法

我們先在網路上或書本中蒐集各種奇數階魔方陣的資料，瞭解各種奇數階魔方陣的建陣方法。在瞭解各種奇數階魔方陣的建陣方法後，我們選出幾種方法，然後根據這些方法建製出三階到九階的魔方陣。接著，我們在建置好的魔方陣中，找尋方陣間的數字是否具有排列、重複、對稱、等差或是倍數等規律。最後，再根據這些規律嘗試歸納出先的建陣方法

四、研究架構

以下是我們的研究架構。

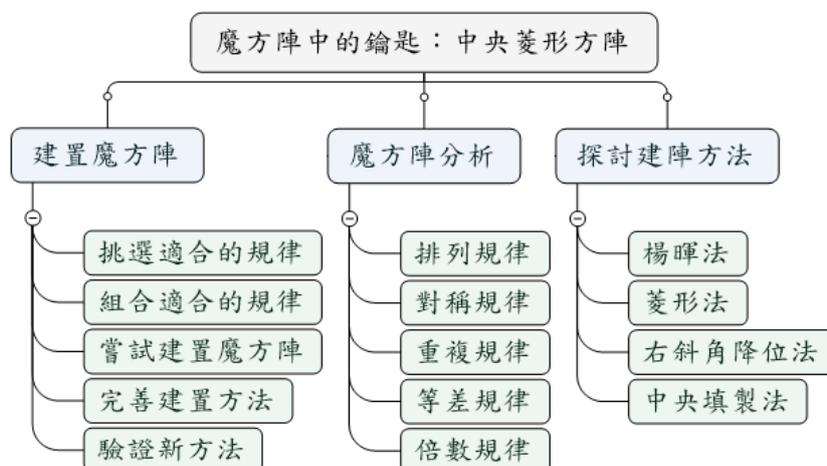


圖 1-1 研究架構圖

貳●正文

一、魔方陣的定義及起源

(一) 魔方陣的定義

魔方陣 (magic square) 又叫做幻方、鬼方陣，它是由一個 $n \times n$ 的正方形所構成的。魔方陣的定義是：在一個由 $n \times n$ 所構成的正方形方格中，用 $n \times n$ 個不同的數字填入方格內，使每一行的總和、每一列的總和、對角線的總和都相等時，就稱為 n 階的魔方陣，而這些特殊的和稱為魔術數字 (magic number) 或是幻和、令和。這個魔術數字的算法是 $n \times (n^2 + 1) / 2$ 。

其中，如果填入方陣中的數字是 1 到 n^2 的連續數字，就稱為正規魔方陣。如果填入的數字不是 1 到 n^2 的連續數字，則歸類於廣義的魔方陣。如果魔方陣還有特殊的結構，就會有別的稱呼。本研究所探討的魔方陣都是正規魔方陣。

(二) 魔方陣的起源

魔方陣相傳是起源於中國的「洛書」(或「洛圖」)，當時是三階魔方陣。但魔方陣真正最早的正式記錄，是在西元前 6 世紀春秋時期的《大戴禮記》，當時把三階魔方陣稱為「九宮算」，這是世界最早的記錄。(李國賢，2009) 後來的數學家如程子華、甄鸞等人更將三階魔方陣的解法編成歌訣。另外，中國宋代的數學家楊輝不但發展出三階與四階魔方陣的建陣方法，還提到四階到十階魔方陣的解，算是第一位有系統研究魔方陣的數學家。(李國賢，2009)

二、瞭解建陣方法

魔方陣因階數奇偶的構成不同，因此在討論魔方陣建陣的方法時，都是將魔方陣分為奇數階魔方陣與偶數階魔方陣兩種類別進行討論。由於我們的時間及能力有限，再加上我們最先接觸的是三階魔方陣是奇數階魔方陣，所以我們便將研究重點放在奇數階魔方陣上。

有關奇數階魔方陣建陣的方法有很多種，例如：楊輝法、定義法、菱形法、右斜角升位(降位法)、左斜角升位(降位法)、中央填製法、輔助方陣法(包括方陣合成、方陣相加)等等。受限於能力及時間的因素，因此我們挑選幾個看起來也比較好理解，建陣方法也不複雜的建陣方法進行探討。

我們選擇了楊輝法、菱形法、右斜角降位法、中央填製法這四種方法，做為我們的研究對象。我們先將上面四種方法各自建構了三階到九階的魔方陣，接著再比對這四種所建製出的魔方陣，探討這些魔方陣中的關係，以及方陣中數字之間，有沒有的特殊數量關係。以下是我們探討的過程和發現。

(一) 從三階魔方陣中尋找規律

1. 我們發現，楊輝法的三階魔方陣和中央填製法的三階魔方陣是全等魔方陣。右斜角降位法的三階魔方陣是楊輝法和中央填製的鏡射變形。菱形法的三階魔方陣是它們三種的旋轉變形。

魔方陣中的鑰匙：中央菱形方陣

8	1	6
3	5	7
4	9	2

圖 2-1 右斜角降位法

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 2-2 中央填製法

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 2-3 楊輝法

2	7	6
9	5	1
4	3	8

圖 2-4 菱形法

2.我們發現這四種方法所建製的魔方陣中，它們的中央十字連線，或是對角線上的數字，會以中心數為對稱中心，兩兩數字的和相等，而且同一條線的對稱和再加上中心數時，會等於魔術數字。例如： $4+6=10$ ， $10+5=15$ 。或是 $1+9=10$ ， $10+5=15$ 。另外，魔方陣的中央十字及兩條對角線的數字，它們之間的差都一樣，其運算方式呈現對稱相反的情形。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 2-5 對角線算魔術數字

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 2-6 中央十字算魔術數字

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 2-7 等差及運算對稱規律

3.我們發現在三階魔方陣中，中央十字的頂端數字（1、3、9、7），它們斜角連線差都有規律。左上到右下的斜線都相差 2，而右上到左下的斜線都相差 6，這個差數剛好是階數的 2 倍。我們將 4 個 數字連接起來，可以在中央形成一個菱形方陣。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 2-8 三階中央菱形方陣

(二) 從五階魔方陣中尋找規律

1.我們發現楊輝法的五階魔方陣和中央填製法的五階魔方陣是全等魔方陣。菱形法是楊輝法、中央填製法的旋轉變形。

2.菱形法、楊輝法和中央填製法的中央十字數字都一樣的，而右斜角降位法則是將中央十字的數字鏡射後，再擴大到四邊的十字頂端。

3.我們發現四種方法的五階魔方陣，它們的中央十字方格與兩條對角線的數字之間的差，也都會有固定的規律。其中以右斜角降位法的中央十字差的規律最為簡單。

魔方陣中的鑰匙：中央菱形方陣

18	22	1	10	314
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
12	16	25	4	8

圖 2-9 右斜角降位法

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

圖 2-10 菱形法

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

圖 2-11 中央填製法

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

圖 2-12 楊輝法

4.和三階魔方陣一樣，我們發現魔方陣中央十字或是對角線上的數字，會以中心數為對稱中心，兩兩數字的和相等，而且同一條線的對稱和再加上中心數時，會等於魔術數字。例如： $11+15=26$ ， $26 \times 2 + 13 = 65$ 。

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

圖 2-13 五階魔術數字算法

5.在以右斜角降位法所建構的魔方陣中，中央十字的四個頂端數字，是中央填製法中央方陣的擴大。另外，我們也發現這四種方法的方陣，都會出現類似三階魔方陣的中央菱形方陣，但只有右斜角降位法的中央菱形方陣規律，與三階的中央菱形方陣規律一致，右上到左下斜線的數字差都是 2，左上到右下的差，都是階數的 2 倍。

18	22	1	10	14
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
12	16	25	4	8

右斜角降位

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

菱形法

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

中央填製法

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

楊輝法

圖 2-14 四種方法的中央菱形方陣

6.因為右斜角降位法的中央菱形方陣的規律與三階魔方陣的一致，因此我們將主要的研究集中在右斜角降位法。我們發現在以右斜角降位法的五階方陣中，與中央菱形方陣相接的數字差，會有下面的規律：

(1)左上與右下區域中，它們的差是將中心十字最左邊的數字（階數）乘以它右上格子的數字。例如：5 階的是 5×3 。左上區域的數字是中央菱形方陣相連的數字加上 15，右下區域的數字是用與中央菱形方陣相連的數字減去 15。

18	22	1	10	14
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
12	16	25	4	8

圖 2-15 中央菱形方陣相連的數字

魔方陣中的鑰匙：中央菱形方陣

(2) 右上區域與左下區域中，它們的差是都階數-2。右上區域將與中央菱形方陣相連的數字加上階數-2 (5-2)，左下區域的數字是將與中央菱形方陣相連的數字減去階數-2 (5-2)。

(三) 從七階以上的魔方陣中嘗試建立規律

在發現右斜角降位法中的中央菱形方陣規律後，我們便將研究的重點放在探索右斜角降位法中的中央菱形方陣。以下是我們的發現。

1. 我們發現七階以上的魔方陣中，也存在和三、五階魔方陣一樣規律的中央菱形方陣。在中央菱形方陣中，所有右上到左下斜線的數字差都是 2，而所有左上到右下的差，都是階數的 2 倍。

32	38	44	1	14	20	26
40	46	3	9	15	28	34
48	5	11	17	23	29	42
7	13	19	25	31	37	43
8	21	27	33	39	45	2
16	22	35	41	47	4	10
24	30	36	49	6	12	18

圖 2-16 中央菱形方陣 七階

50	58	66	74	1	18	26	34	42
60	68	76	3	11	19	36	44	52
70	78	5	13	21	29	37	54	62
80	7	15	23	31	39	47	55	72
9	17	25	33	41	49	57	65	73
10	27	35	43	51	59	67	75	2
20	28	45	53	61	69	77	4	12
30	38	46	63	71	79	6	14	22
40	48	56	64	81	8	16	24	32

圖 2-17 中央菱形方陣 九階

72	82	92	102	112	1	22	32	42	52	62
84	94	104	114	3	13	23	44	54	64	74
96	106	116	5	15	25	35	45	66	76	86
108	118	7	17	27	37	47	57	67	88	98
120	9	19	29	39	49	59	69	79	89	110
11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111
12	33	43	53	63	73	83	93	103	113	2
24	34	55	65	75	85	95	105	115	4	14
36	46	56	77	87	97	107	117	6	16	26
48	58	68	78	99	109	119	8	18	28	38
60	70	80	90	100	121	10	20	30	40	50

圖 2-18 中央菱形方陣 十一階

2. 我們發現在七階以上魔方陣中，與中央菱形方陣相連的數字和五階魔方陣的規律相同。

(1) 它們左上與右下區域的差，都是中心十字最左邊的數字（階數）和右上格子的數字的乘積。例如：七階的是 7×5 ，九階的是 9×7 ，十一階的是 11×9 。左上區域的數字是加上乘積，右上區域的數字是減去乘積。

(2) 它們右上區域與左下區域的差，都是都是階數-2。右上區域的數字是加（階數-2），左下區域的數字是減（階數-2）。

32	38	44	1	14	20	26
40	46	3	9	15	28	34
48	5	11	17	23	29	42
7	13	19	25	31	37	43
8	21	27	33	39	45	2
16	22	35	41	47	4	10
24	30	36	49	6	12	18

圖 2-19 七階相連的數字

50	58	66	74	1	18	26	34	42
60	68	76	3	11	19	36	44	52
70	78	5	13	21	29	37	54	62
80	7	15	23	31	39	47	55	72
9	17	25	33	41	49	57	65	73
10	27	35	43	51	59	67	75	2
20	28	45	53	61	69	77	4	12
30	38	46	63	71	79	6	14	22
40	48	56	64	81	8	16	24	32

圖 2-30 九階相連的數字

72	82	92	102	112	1	22	32	42	52	62
84	94	104	114	3	13	23	44	54	64	74
96	106	116	5	15	25	35	45	66	76	86
108	118	7	17	27	37	47	57	67	88	98
120	9	19	29	39	49	59	69	79	89	110
11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111
12	33	43	53	63	73	83	93	103	113	2
24	34	55	65	75	85	95	105	115	4	14
36	46	56	77	87	97	107	117	6	16	26
48	58	68	78	99	109	119	8	18	28	38
60	70	80	90	100	121	10	20	30	40	50

圖 2-31 十一階相連的數字

魔方陣中的鑰匙：中央菱形方陣

3.在七階以上的魔方陣中，左上與右下的區域會出現不與中央菱形方陣相連的格子。以下是它們差數的規律。

(1) 左上區域和右下區域的差都是階數 $\times 2$ 。左上區域是減去（階數 $\times 2$ ），右下區域是加上（階數 $\times 2$ ）。例如七階魔方陣中，左上不與中央菱形方陣相連數字是 $46 - 14 = 32$ 。右下不與中央菱形方陣相連數是 $4 + 14 = 18$ 。九階以上的魔方陣中，不與中央菱形方陣相連數字會變多，但規律仍然一樣。

(2) 右上區域與左下區域的差都是 2。右上區域是減 2，左下區域是加 2。例如七階魔方陣中，右上不與中央菱形方陣相連數字是 $28 - 2 = 26$ 。左下不與中央菱形方陣相連數字是 $22 + 2 = 24$ 。九階以上的魔方陣中，不與中央菱形方陣相連數字會變多，但規律仍然一樣。

32	38	44	1	14	20	26
40	46	3	9	15	28	34
48	5	11	17	23	29	42
7	13	19	25	31	37	43
8	21	27	33	39	45	2
16	22	35	41	47	4	10
24	30	36	49	6	12	18

圖 2-32 七階不相連的數字

50	58	66	74	1	18	26	34	42
60	68	76	3	11	19	36	44	52
70	78	5	13	21	29	37	54	62
80	7	15	23	31	39	47	55	72
9	17	25	33	41	49	57	65	73
10	27	35	43	51	59	67	75	2
20	28	45	53	61	69	77	4	12
30	38	46	63	71	79	6	14	22
40	48	56	64	81	8	16	24	32

圖 2-33 九階不相連的數字

72	82	92	102	112	1	22	32	42	52	62
84	94	104	114	3	13	23	44	54	64	74
96	106	116	5	15	25	35	45	66	76	86
108	118	7	17	27	37	47	57	67	88	98
120	9	19	29	39	49	59	69	79	89	110
11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111
12	33	43	53	63	73	83	93	103	113	2
24	34	55	65	75	85	95	105	115	4	14
36	46	56	77	87	97	107	117	6	16	26
48	58	68	78	99	109	119	8	18	28	38
60	70	80	90	100	121	10	20	30	40	50

圖 2-34 十一階不相連的數字

參●研究結論

一、中央十字、兩條對角線數字規律與魔術數字的算法

(一) 我們發現以楊輝法、菱形法、右斜角降位法和中央填製法所建構的奇數階魔方陣，它們的中央十字與兩條對角線的數字差，都會有固定的規律，而且運算方式對稱相反。

(二) 我們可以透過計算中央十字或是對角線上所有數字的對稱和後，再加上中心數的計算方式，算出魔方陣的魔術數字。

二、四種方法的關係

(一) 我們發現以楊輝法和中央填製法所填製出的魔方陣都是全等魔方陣，而菱形法是楊輝法、中央填製法的的旋轉變形魔方陣。

(二) 右斜角降位法所建構的魔方陣中，中央十字的四個角落數字，是中央填製法中央方陣的擴大。另外，這四種方法的中央十字的數字都一樣，只是右斜角降位法的排法有所不同。

三、奇數階魔方陣新填製方法－中央菱形方陣法

我們將上面的發現歸納出「中央菱形方陣」的奇數階建陣方式，建陣的方法如下：

(一) 填製中央菱形方陣

在中央十字的下方填 1，上方填階數的平方、左方填階數、右方填階數的對稱和互補數。再依照「左上到右下斜線的數字差都是 2，而所有右上到左下的差，都是階數的 2 倍。」的規律，填出中央菱形方陣的邊線數字後，再利用斜線填出中央菱形方陣裡的數字。以下是五階、七階和九階填製過程。

		25		
	15	19	23	
5	9	13	17	21
	3	7	11	
		1		

圖 3-1 中央菱形方陣 五階

			49			
		35	41	47		
	21	27	33	39	45	
7	13	19	25	31	37	43
	5	11	17	23	29	
		3	9	15		
			1			

圖 3-2 中央菱形方陣 七階

				81				
			63	71	79			
		45	53	61	69	77		
	27	35	43	51	59	67	75	
9	17	25	33	41	49	57	65	73
	7	15	23	31	39	47	55	
		5	13	21	29	37		
			3	11	19			
				1				

圖 3-3 中央菱形方陣 九階

(二) 填出與中央菱形方陣相連格子的數字

1. 我們先將中心十字最左邊的數字（階數）乘以它右斜下方格子的數字，這兩個數字的乘積我們稱作右斜差數 $n \times (n-2)$ 。算出右斜差數後，將左下與中央菱形方陣相連的數字加上右斜差數，填出左下相連處的數字。將右上與中央菱形方陣相連的數字減去右斜差數，填出右上相連處的數字。

		25	4	8
	15	19	23	2
5	9	13	17	21
24	3	7	11	
18	22	1		

圖 3-4 左下與右上 五階

			49	6	12	
		35	41	47	4	10
	21	27	33	39	45	2
7	13	19	25	31	37	43
48	5	11	17	23	29	
40	46	3	9	15		
	38	44	1			

圖 3-5 左下與右上 七階

				81	8	16		
			63	71	79	6	14	
		45	53	61	69	77	4	12
	27	35	43	51	59	67	75	2
9	17	25	33	41	49	57	65	73
80	7	15	23	31	39	47	55	
70	78	5	13	21	29	37		
	68	76	3	11	19			
		66	74	1				

圖 3-6 左下與右上 九階

魔方陣中的鑰匙：中央菱形方陣

2. 我們先將方陣的階數減 2，這個差數我們稱作左斜差數 (n-2)。接著，將左上與中央菱形方陣相連的數字減去左斜差數，填出左上相連處。將右下與中央菱形方陣相連的數字加上左斜差數，填出右下相連處。

12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
5	9	13	17	21
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14

圖 3-7 左上與右下五階

	30	36	49	6	12	
16	22	35	41	47	4	10
8	21	27	33	39	45	2
7	13	19	25	31	37	43
48	5	11	17	23	29	42
40	46	3	9	15	28	34
	38	44	1	14	20	

圖 3-8 左上與右下七階

		56	64	81	8	16		
	38	46	63	71	79	6	14	
20	28	45	53	61	69	77	4	12
10	27	35	43	51	59	67	75	2
9	17	25	33	41	49	57	65	73
80	7	15	23	31	39	47	55	72
70	78	5	13	21	29	37	54	62
	68	76	3	11	19	36	44	
		66	74	1	18	26		

圖 3-9 左上與右下九階

(三) 填出與中央菱形方陣不相連格子的數字

此種格子會出現在在 7 階以上的魔方陣中，左下區域是減去階數×2 (n×2)，右上區域是加上階數×2。左上區域是加 2，右下區域是減去 2。

24	30	36	49	6	12	18
16	22	35	41	47	4	10
8	21	27	33	39	45	2
7	13	19	25	31	37	43
48	5	11	17	23	29	42
40	46	3	9	15	28	34
32	38	44	1	14	20	26

圖 3-10 左上與右下不相連 七階

40	48	56	64	81	8	16	24	32
30	38	46	63	71	79	6	14	22
20	28	45	53	61	69	77	4	12
10	27	35	43	51	59	67	75	2
9	17	25	33	41	49	57	65	73
80	7	15	23	31	39	47	55	72
70	78	5	13	21	29	37	54	62
60	68	76	3	11	19	36	44	52
50	58	66	74	1	18	26	34	42

圖 3-11 左上與右下不相連 九階

(四) 中央菱形方陣的驗證

我們用上面的方法繪製許多奇數階的魔方陣，發現中央菱形方陣的不僅方便快捷，而且經過 Excel 驗證都正確無誤。另外，這種方法所產生的方陣都呈現出漂亮的對稱之美。

魔方陣中的鑰匙：中央菱形方陣

1105	84	96	108	120	132	144	169	12	24	36	48	60	72
1105	70	82	94	106	118	143	155	167	10	22	34	46	58
1105	56	68	80	92	117	129	141	153	165	8	20	32	44
1105	42	54	66	91	103	115	127	139	151	163	6	18	30
1105	28	40	65	77	89	101	113	125	137	149	161	4	16
1105	14	39	51	63	75	87	99	111	123	135	147	159	2
1105	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133	145	157
1105	168	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	131	156
1105	154	166	9	21	33	45	57	69	81	93	105	130	142
1105	140	152	164	7	19	31	43	55	67	79	104	116	128
1105	126	138	150	162	5	17	29	41	53	78	90	102	114
1105	112	124	136	148	160	3	15	27	52	64	76	88	100
1105	98	110	122	134	146	158	1	26	38	50	62	74	86
1020	1105	1105	1105	1105	1105	1105	1105	1105	1105	1105	1105	1105	1105

圖 3-12 中央菱形方陣法 十三階

451	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	441	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
454	198	218	238	258	278	298	318	338	358	399	419	439	18	38	58	78	98	118	138	158	178
454	176	196	216	236	256	276	296	316	357	377	397	417	437	16	36	56	76	96	116	136	156
454	154	174	194	214	234	254	274	315	335	355	375	395	415	435	14	34	54	74	94	114	134
454	132	152	172	192	212	232	273	293	313	333	353	373	393	413	433	12	32	52	72	92	112
454	110	130	150	170	190	231	251	271	291	311	331	351	371	391	411	431	10	30	50	70	90
454	88	108	128	148	189	209	229	249	269	289	309	329	349	369	389	409	429	8	28	48	68
454	66	86	106	147	167	187	207	227	247	267	287	307	327	347	367	387	407	427	6	26	46
454	44	64	105	125	145	165	185	205	225	245	265	285	305	325	345	365	385	405	425	4	24
454	22	63	83	103	123	143	163	183	203	223	243	263	283	303	323	343	363	383	403	423	2
454	21	41	61	81	101	121	141	161	181	201	221	241	261	281	301	321	341	361	381	401	421
454	440	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199	219	239	259	279	299	319	339	359	379	420
454	418	438	17	37	57	77	97	117	137	157	177	197	217	237	257	277	297	317	337	378	398
454	396	416	436	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195	215	235	255	275	295	336	356	376
454	374	394	414	434	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193	213	233	253	294	314	334	354
454	352	372	392	412	432	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191	211	252	272	292	312	332
454	330	350	370	390	410	430	9	29	49	69	89	109	129	149	169	210	230	250	270	290	310
454	308	328	348	368	388	408	28	7	27	47	67	87	107	127	168	188	208	228	248	268	288
454	286	306	326	346	366	386	406	26	5	25	45	65	85	126	146	166	186	206	226	246	266
454	264	284	304	324	344	364	384	404	24	3	23	43	84	104	124	144	164	184	204	224	244
454	242	262	282	302	322	342	362	382	402	22	1	42	62	82	102	122	142	162	182	202	222

圖 3-13 中央菱形方陣法 二十一階

四、研究限制與展望

(一) 中央菱形方陣法是否能適用於所有奇數階魔方陣，還有待驗證。

我們雖然已經歸納出用中央菱形方陣去建構奇數階魔方陣的方法，也成功建構了 13 階甚至 21 階的魔方陣。但可惜的是，目前我們還沒辦法用數學的算式去證明，中央菱形方陣法適用於所有奇數階的魔方陣，這可以做為我們以後的研究主題。

(二) 中央菱形方陣法是否能應用到其他建陣的方法上，還有待研究。

我們發現在其他三種方法中也發現了中央菱形方陣的存在，我們猜測中央菱形方陣應該也可以應用在這些建陣方法，找出一個比原方法快速的建陣方法，這可以做為我們以後的研究主題。

(三) 中央菱形方陣法是否有簡化的可能性，還有待研究。

我們認為中央菱形方陣雖然比其它的方法簡單快速，但是要找出四種差數還是有些麻煩，因此中央菱形方陣法是否還有簡化的可能性，讓建構奇數階魔方陣變得更簡單方便，這可以做為我們以後的研究主題。

(四) 偶數階的魔方陣是否可以用差數的方式來簡化建陣方式，還有待研究。

在這次的研究中，我們是觀察奇數階魔方陣中數字的差數，找出建陣的規律，這樣的方法是否適用於偶數階的魔方陣，可以做為我們以後的研究主題。

肆●參考資料

- 李國賢 (2009)。數學魔方陣遊戲。臺北市：新潮社文化事業有限公司。
- 巫光楨 (2023)。尤怪魔宮--魔方陣的世界。新竹市：尤怪工作室。
- 何鳳珠、張祖銘 (2021)。旋風魔方陣。台南市：聚光文創。
- 李國賢 (2002)。數學魔方陣。臺灣：益智工房。
- 柳已韻 (2016)。數學世界歷險記 7：挑戰魔方陣。中國：二十一世紀出版社。
- 林克瀛 (1968)。魔方陣。數學傳播，4(3)，20-24。
- 林克瀛 (1989)。非三倍數的奇階鬼方陣簡易填製法。數學傳播，13(1)，122-123。
- 劉任昌 (1989)。一個 $2n$ (n 為奇數) 階魔方陣的簡單解法。數學傳播，21(2)，71-75。
- 大哉言數 http://www.mathsgreat.com/magic_sq/magic_sq.html
- 楊立 <https://www.youtube.com/watch?v=hOPod9JW-Mk&t=293s>
- 恩和老師 <https://www.youtube.com/watch?v=oYuIFmdWSW4>
- 徐惠莉 https://www.youtube.com/watch?v=ZQU_KfpW9z0
- 謝經國 <https://www.youtube.com/watch?v=WC0QkqdMpSc>