

投稿類別：自然探究類

篇名:

藏在方格裡的智慧：魔術方陣的歷史與規則

作者：

趙 向。慈濟大學附屬高級中學。八年五班
劉宥陞。慈濟大學附屬高級中學。八年五班
王顥嫣。慈濟大學附屬高級中學。八年五班
張羽涵。慈濟大學附屬高級中學。八年五班

指導老師：

林瑋儒老師

壹、前言

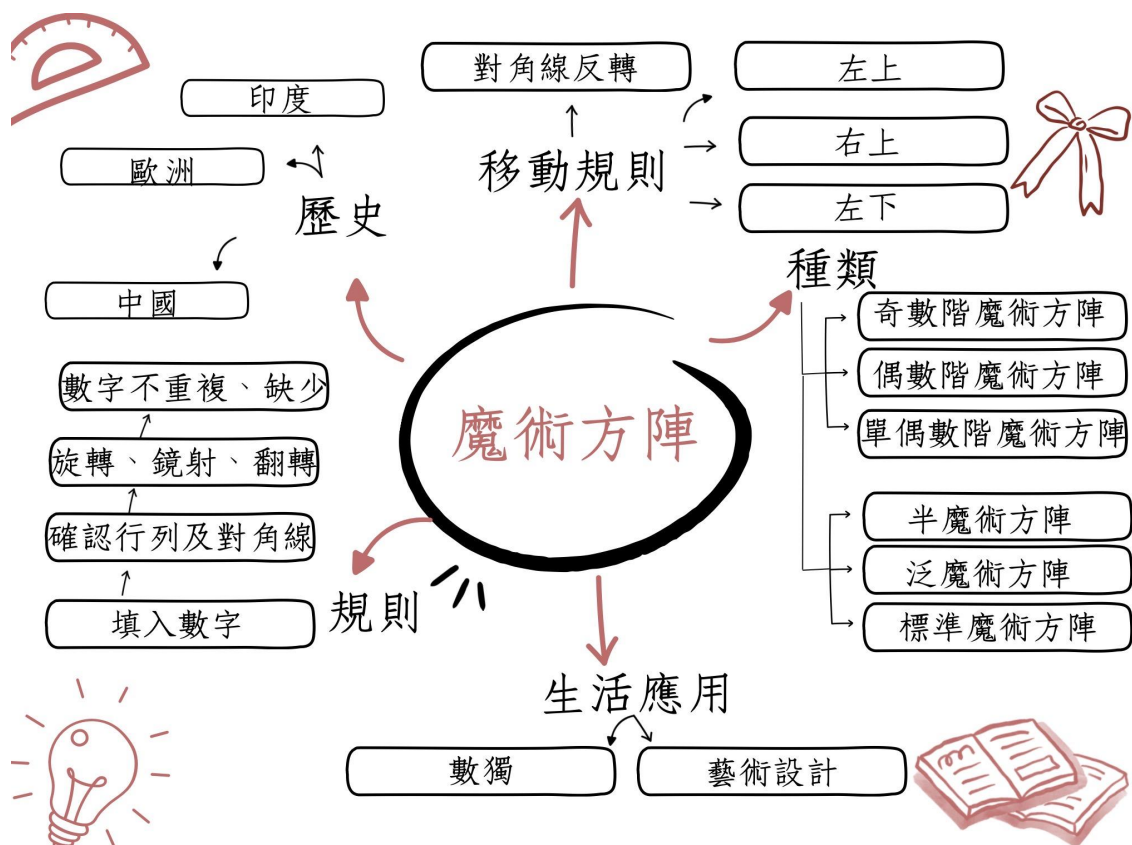
一、研究動機

在日常生活中，到處都是數學，而我們也對數學特別有興趣。偶然間，我們看到【金庸小說射鵰英雄傳】上有一個很特別的數學題目「九宮之義，法以靈龜，二四為肩，六八為足，左三右七，戴九履一，五居中央」，於是我們去查了這個數學的原理，發現它是數學魔術方陣，我們覺得很神奇，而它最大的特色就在每一角線上的數字總和都相等，它雖然看似簡單，但其中卻隱藏著深奧的數學秘密，觸動我們想進一步去做探討。透過這次小論文，我們想從數學的角度研究不同的魔術方陣它們的歷史背景、種類、規則以及生活應用。

二、研究目的

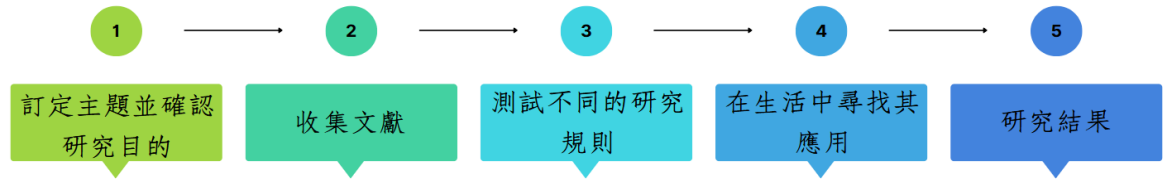
- (一) 探討魔術方陣的歷史
- (二) 尋找魔術方陣的種類
- (三) 了解魔術方陣的規則
- (四) 測試魔術方陣不同的移動規則
- (五) 尋找魔術方陣在生活中的應用

三、研究架構及流程



研究架構

研究流程



研究流程

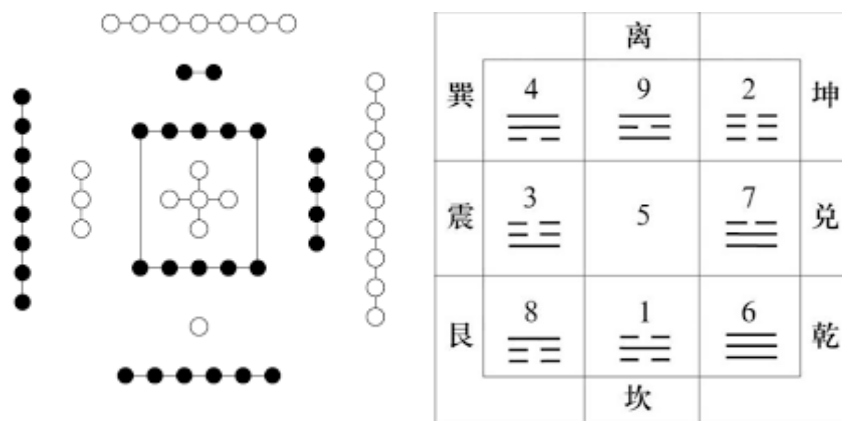
貳、正文

一、文獻探討

(一)探討魔術方陣的歷史

魔術方陣的歷史非常悠久，它遍布於不同的古老文明，並對文化有著獨特的樣貌及意義。

普遍認為，魔術方陣的起源在「中國」的「洛書」。傳說中，中國古代在公元前約2200年的大禹治水時期，在洛水的地方出現了一隻神龜，這隻烏龜的背上，刻著神祕的圖案，這個圖案的每一行、每一列和兩條對角線的和都等於15，中間數字是5，被後人解釋為三階的魔術方陣，即名為「洛書」。在漢代時期，洛書演變成「九宮算」並與占卜、術數結合，用來預測吉凶。接著，在南宋時期，一位數學家-楊輝在其著作《續古摘奇算法》中，詳細敘述了3階到10階魔術方陣的構造方法，並稱它為「縱橫圖」。他的方法比歐洲數學家提出的早數百年，這也顯示了中國在魔術方陣研究上的領先地位。



(圖一)三階魔術方陣-「洛書」(圖二)楊輝提出的「縱橫圖」

在古印度地區也發展了魔術方陣的概念，在印度北部卡朱拉霍的帕爾斯瓦納特耆那教寺廟中，有一個西元10世紀的4階魔術方陣的雕刻，其魔術常數為34。這個方陣被認為是當時印度數學家對魔術方陣研究的證明。

(二)尋找魔術方陣的種類

魔術方陣也稱作幻方，它是一種要將數字填入正方形網格中的數學遊戲，而它主要的規則是在於確保方陣中特定方向的數字和都相等。

而我們將它按照階數和性質分成兩大類。在按照階數的分類中我們會介紹奇數階

魔術方陣、偶數階魔術方陣和單偶數階魔術方陣，而在按照階數的分類中我們會說明標準魔術方陣、半數階魔術方陣及泛數階魔術方陣。

首先奇數階魔術方陣是魔術方陣中最簡單的一種，其中 n 是奇數。有幾種經典的方法，其中最常見的是「羅伯特法」，它也稱作「暹羅法」或「右斜角降位法」。這種方法主要的概念就是從中心上方開始填入數字，然後向「右上角」方向移動，如果有遇到邊界或是已填寫的格子時，就進行特定的調整。相比於奇數階魔術方陣，偶數階魔術方陣更加複雜，因為它不能使用羅伯特法來進行填充。

偶數階魔術方陣又能分為兩種類型：

1. 雙偶數階魔術方陣：階數 n 是4的倍數，例如4、8、12等。

2. 單偶數階魔術方陣是指階數 n 是偶數，但不是4的倍數，即 $n=4x+2$ 的魔術方陣，例如6階、10階、14階等。與奇數階和雙偶數階相比，這類魔術方陣的構造方法更為複雜和巧妙，而且通常會用到「疊加法」或「LUX法」。其中需要特別注意的是，2階魔術方陣是不存在的，因為無論如何排列1、2、3、4，都無法滿足每一行、每一列和每個對角線之和相等的要求。接下來是單偶數階魔術方陣的構造方法，「LUX」法是一種常見並且相對系統的方法，它主要的構思是將一個 $n \times n$ 的單偶數階魔術方陣再分解為四個 $(n/2) \times (n/2)$ 的子方陣，並利用一個奇數階魔術方陣作為基礎來構建。

標準魔術方陣又稱「標準幻」方是一種最基礎的魔術方陣，將數字填入 $n \times n$ 方陣的排列方式，要求每一列、每一行以及兩條對角線的數字總和皆相等。這些數字通常是從1到 n^2 的連續整數。

半數魔術方陣，它又叫「半幻方」或「正交魔方」，它也是魔術方陣家族中的一個成員，但它的要求相較於標準魔術方陣又較為寬鬆。而半數魔術方陣是一個 n 階的數字方陣，它需要達到每一行數字的和都相等和每一列的數字之和都相等這兩點。但是半數魔術方陣和標準魔術方陣不同的地方就在於半數魔術方陣只確保「線」(行和列)的和相等，而放寬了對角線和的限制。而半數魔術方陣的特性就在於它的靈活性更高，因為對角線的限制被移除，半數魔術方陣的構造相較於完整的魔術方陣更加容易，存在的數量也更多。雖然大多數魔術方陣都要填入1到 n 平方的連續整數，但半數魔術方陣的定義可以更廣泛，它也可以由其他非負整數組成，只要滿足行和列相等的要求，所以不一定要是1到 n 平方的連續數字。

泛魔術方陣又稱為「全對角線魔術方陣」，是魔術方陣中一種更為嚴格且特殊的類型。一個 n 階的魔術方陣，除了滿足傳統魔術方陣的規則之外，就是每行、每列以及兩條主對角線上的數字之和都等於魔術常數 M ，還必須滿足下列幾個條件：所有「斷裂對角線」的和也等於魔術常數 M ，而斷裂對角線的意思就是平行於主對角線的斷裂對角線就是從方陣的任何一個格子開始，向右下(或左上)的方向移動，如果遇到右邊的邊界就從最左邊重新開始，遇到下方的邊界就從最上面重新開始。而這種作法會形成 n 個數字的集合，而它的和都必須要等於 M 。平行於次對角線的斷裂對角線：從方陣的任何一個格子開始，向左下(或右上)方向移動，遇到左邊界就從最右邊重新開始，遇到下邊界就從最上面重新開始。所有這樣形成的 n 個數字的集合，其和也必須等於 M 。

(三)了解魔術方陣的規則

1. 奇數階魔術方陣

首先，我們將數字1放入方陣中間的最上方空格內；接著，在此數字的右上方依序填入數字，如果超出左邊就往最右邊移動，超出上方就往最下方移動；若是右上方已經有數字了，那就往下一格，最後填完就可以完成奇數階魔術方陣。

		9	2	
	8	1	6	8
	3	5	7	3
	4	9	2	

(圖三)此圖為以右上法繪出的三階魔術方陣。

2. 偶數階魔術方陣

這種魔術方陣通常採用「連續填充與對角線反轉法」。以4x4的偶數階魔術方陣為例，按照左到右、上到下的方式，從左到右照順序將1~16填入格子中，接著除了中間的2x2的小格子、四個角(左上、左下、右上、右下不動以外，其餘的數字需要反轉)，才能使每一行每一列總和相同。

2 替換為 $16 + 1 - 2 = 15$

3 替換為 $16 + 1 - 3 = 14$

5 替換為 $16 + 1 - 5 = 12$

8 替換為 $16 + 1 - 8 = 9$

9 替換為 $16 + 1 - 9 = 8$

12 替換為 $16 + 1 - 12 = 5$

14 替換為 $16 + 1 - 14 = 3$

15 替換為 $16 + 1 - 15 = 2$

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

(1)	2	3	(4)
5	(6)	(7)	8
9	(10)	(11)	12
(13)	14	15	(16)

(圖四)此圖為四階魔術方陣的規則，除了兩條對角線以外皆翻轉。

3. 單偶數階魔術方陣

這種魔術方陣的主要概念是使用奇數階魔術方陣作為基礎。將其分成四個小方陣，接著利用奇數魔術方陣進行乘法和加法排列，填到四個小方陣其中，而為了確保所有行、列、對角線的和都等於最後魔術方陣的常數，因此要執行特定的數字交換。

32	1	6	26	19	24
3	35	7	21	23	25
30	8	33	17	5	12
31	29	4	10	36	14
2	9	20	27	15	28
25	22	13	11	34	18

32	1	21	30	2	22
12	17	25	11	19	27
16	33	5	14	34	6
-----+-----					
31	3	23	29	4	24
10	18	26	12	20	28
15	35	7	13	36	8

<- 10,18,26 換成 11,19,27

<- 11,19,27 換成 10,18,26

(圖五)單偶數階魔術方陣的規則。

4. 泛魔術方陣

「泛魔術方陣」是指一種廣義的魔術方陣，也是在標準魔術方陣的基礎上，放寬一些限制或加入更廣泛的條件，例如不限數字，只要總和一樣就可以。

5	2	5	2	5	2	5	2
0	7	0	7	0	7	0	7
2	5	2	5	2	5	2	5
7	0	7	0	7	0	7	0
3	4	3	4	3	4	3	4
6	1	6	1	6	1	6	1
4	3	4	3	4	3	4	3
1	6	1	6	1	6	1	6

(圖六)只要每行總和一樣就可以，不限數字。

5.半魔術方陣

半魔術方陣是一種比起標準魔術方陣要求較少的排列：行列和相等，對角線可以不相等，而且數字可以是非連續的整數。

6	1	8	24	19	26
7	5	3	25	23	21
2	9	4	20	27	22
33	28	35	15	10	17
34	32	30	16	14	12
29	36	31	11	18	13

(圖七)只要每行、每列總和相等，對角線可以不用。

6.標準魔術方陣

標準魔術方陣為 $n \times n$ 的方陣中，填入從1到 n 平方的所有正整數，每個數只出現一次，且可以讓每一行、每一列、兩條對角線都相等，是學習魔術方陣的起點。

6	1	8
7	5	3
2	9	4

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

(圖八)每行、每列、兩條對角線都相等。

類型	階數限制	數字範圍	行和相等	列和相等	對角和相等	建構方法/特點
奇數階魔術方陣	奇數 (3、5、7...)	1到 n^2	✓	✓	✓	右斜角降位法
偶數階魔術方陣	偶數 (4、6、8...)	1到 n^2	✓	✓	✓	對角線反轉法
單偶數階魔術方陣	偶數但非4的倍數 (6、10...)	1到 n^2	✓	✓	✓	奇數魔術方陣為此魔術方陣基礎
泛魔術方陣	任意	任意 (可非連續)	✓	✓	✓	不限數字，僅總和一致
半魔術方陣	任意	任意 (可非連續)	✓	✓	✗	簡化魔術方陣，不管對角線
標準魔術方陣	任意 ($n \geq 3$)	1到 n^2	✓	✓	✓	最基本的定義型魔術方陣

(表一)此表為我們將魔術方陣按照階數和性質分成兩大類，將其特性整理為表格。

(四)測試不同方式對魔術方陣的影響

在經過文獻探討後，我們初步得先了解了魔術方陣的移動規則。

在三階的魔術方陣中，最常使用的方式是右斜角降位法;在四階魔術方陣中常用到對角線反轉的方式，使魔術方陣的每一行、每一列及對角線之和相等。

我們在此測試了三階的魔術方陣，測試每個魔術方陣起始方向如果從不同地方(例如:右下、左上、左下等)此魔術方陣是否成立，及四階的魔術方陣進行對角線的反轉後，能否為一個正確的魔術方陣。

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

(表二)四階魔術方陣對角線反轉

此為四階魔術方陣，填入數字後將其對角線進行反轉。此魔術方陣成立原因:經對角線反轉過後的四階魔術方陣每列、每行和對角線相加須為34，與此圖完全符合，因此成立。

4	1	7
8	5	2
3	9	6

(表三)三階魔術方陣從右下角開始填入數字

此為三階魔術方陣，向右下開始進行填入數字。但此魔術方陣不成立，因為此魔術方陣雖然每一列、每一條對角線的和都為15，但每一行的和相加後卻不相等，因此此魔術方陣並不成立。

6	1	8
7	5	3
2	9	4

(表四)三階魔術方陣使用左上法

此三階魔術方陣使用左上法，因為步驟只是左右顛倒而已，也因為如此，才可以與右上法完全對稱，也因為此特點，因此此魔術方陣是成立的。

7	1	4
2	5	8
6	9	3

(表五)三階魔術方陣從左下角開始填入數字

此為三階魔術方陣，向左下角開始進行填入數字。但此魔術方陣不成立，因為此魔術方陣雖然每一列、每一條對角線的和都為15，但每一行的和相加後卻不相等，因此此魔術方陣並不成立。

(五) 尋找魔術方陣在生活中的應用

我們尋找不同魔術方陣的解法後，也開始想找找看生活中有沒有關於魔術方陣的實際應用，進行魔術方陣生活應用前，我們需要先了解魔術方陣真實的意義。透過應用，能把抽象的數學概念轉化為實際體驗，增進理解，也讓魔術方陣更有生命力。

1. 數獨

數獨是一種與魔術方陣相似的益智遊戲，盤面是一個9x9的網格，目標是根據以有的提示數字，在空白格中填入1~9的數字。但在每一行、每一列及每一個3*3的小方格中，1~9的數字都只能出現一遍，不能重複使用。而數獨主要在鍛鍊專注力、觀察力以及邏輯思維。

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

(圖十)數獨



(圖十一)名作《憂鬱》

取自於網路

2. 藝術與設計

魔術方陣也展現了一種平衡之美，許多藝術家及設計師也受到啟發。在歐洲地區，有一位叫阿爾布雷希特·丟勒的藝術家在他的名作《憂鬱》巧妙地將一個4階魔術方陣融入其中。這個方陣的設計不僅數字精確，底層的數字「1514」還代表了版畫的創作年份1514年，賦予其藝術中的數學和個人意義。這顯示了文藝復興時期歐洲對數學、幾何學和神祕學的濃厚興趣。

參、研究結果及討論

在完成上述一系列研究後我們得到下列幾點的結論，在歷史方面我們了解到魔術方陣它遍布於不同的古老文明，而它最早是出現在中國的洛書中，而在神龜背上的圖案中發現其每一行、每一列及每一條的對角線相加後都等於15，在漢朝時也用於占卜及預測吉凶，後來在古印度及歐洲地區也陸續有了相關的研究，雖然歐洲流行的時間較晚，但一流行就引起很大的迴響。

而我們也利用數字填入的順序及方法，依性質可分為標準魔術方陣、泛魔術方陣與半魔術方陣，我們為了瞭解魔術方陣的移動規則，於是測試了不同方向是否可以達到魔術方陣的規則，並發現四階的魔術方陣將其對角數字翻轉後可以成立，而將三階的魔術方陣左右顛倒後結果也是成立的，另外兩組因為相加後的答案並不符合魔術方陣的規則，所以不成立。

透過本次研究，我們不僅認識了魔術方陣在中國、印度與歐洲的歷史發展脈絡，實際操作並掌握了不同階數方陣的構造方式，也了解了移動方向所影響的實驗結果，更在生活中找到魔術方陣的類似應用，這加深了我們對於數學的規律了解，也讓我們對於數學抱持著更多的好奇心。

肆、參考資料

(一)魔術方陣的歷史·取自：<http://www.mathland.idv.tw/fun/mag.html>

(二)魔術方陣的解法與思路·取自：

<https://openhome.cc/zh-tw/algorithm/matrix/evenly-even-magic/>

(三)魔術方陣的計算·取自：

<https://calculus.math.nycu.edu.tw/maple/Site/carnival/magic/203.htm>

(四)魔術方陣的解法·取自：

https://serc.tn.edu.tw/wp-content/uploads/2020/06/ES18_%E9%AD%94%E6%96%B

[9%E9%99%A3123%E7%9C%8B%E8%AA%B0%E5%85%88%E9%81%94%E9%99%A3.pdf](#)

(五)魔術方陣的歷史及規則·取自:

<https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d283/28308.pdf>