奇幻的質數馬戲團

(爵士篇)

中國科技大學
通識教育中心
自然科學教學群數理領域
曹友賓　副教授編

質數是甚麼東東?

所謂質數或稱素數，就是一個正整數，除了本身和 1 以外並沒有任何其他因子。例如 2、3、5、7 是質數，而 4、6、 8、9 則不是，後者稱為合成數。從這個觀點可將整數分為兩種，一種叫質數，一種叫合成數。(有人認為數字 1 不該稱為質數)著名的高斯「唯一分解定理」說，任何一個整數，可以寫成一串質數相乘的積。例如 $28 = 2^2 \cdot 7$、$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$、$10500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$ 、$100141 = 239 \cdot 419$。易言之，任何數都由質數構成的。以物理的觀點想像，不妨就將質數視為整數世界的原子。而中國古代數學家把質數叫做“數根”，即為凸顯其乃數的根本。

質數到底有幾個?

質數到底有幾個?

歐幾里得的著作《幾何原本》中第九卷的命題20這麼寫著：

「任意給定幾個質數，則有比它們更大的質數。」

歐幾里得(Ευκλειδης)

古希臘數學家，約生於公元前330年，約死於公元前275年。他活躍於托勒密一世(公元前323年－公元前283年)時期的亞歷山卓，被稱為「幾何之父」。他最著名的著作《幾何原本》是歐洲數學的基礎，當中提出五大公設。歐幾里得幾何，被廣泛的認為是歷史上最成功的教科書。除了《幾何原本》，歐幾里得也寫了一些關於透視、圓錐曲線、球面幾何學及數論的作品。

Euklid-von-Alexandria

如何找質數?

埃拉托斯特尼篩法

埃拉托斯特尼篩法，簡稱埃氏篩，是公元前250年由古希臘數學家埃拉托斯特尼所提出的一種簡單的檢定質數之演算法。記載於尼科馬霍斯《算術入門》第十三章中，他將一定範圍的數字寫在羊皮上，然後將 2、3、5、7…等的倍數挖掉，就好像一個上面有許多小孔的篩子，因此被稱為「埃拉托斯特尼篩法」。

這是世界上最古老的一種求質數的方法，它的原理很簡單，運用起來也很方便。憑著經過改進後的埃拉托斯特尼篩法，數學家們已把10億以內的質數全都篩出來了。

運用埃氏篩檢驗1~50之間有哪些質數?

1. 把1~50的數，按照順序列成一張50以內的表。(如下表)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

運用埃氏篩檢驗1~50之間有哪些質數?

2. 首先把1劃掉，因為1既不是質數，也不是合數。
3. 接下來一個數是2，它是最小的質數，應予保留。但2的倍數一定不是質數，應該全部劃掉。
4. 在剩下的數中，3是第一個未被劃掉的數，那麼它是個質數，應予保留。但3的倍數一定不是質數，應該全部劃掉。
5. 在剩下的數中，4已被劃掉了，其餘的數中，5成為第一個未被劃掉的數，那麼它是質數，也應予以保留。但5的倍數一定不是質數，應該全部劃掉。
6. 仿照步驟1～5，繼續劃下去，數表上最後剩下的就是1~50之間的質數了。

1~50之間的所有質數

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

埃拉托斯特尼(Ερατοσθένης)

約於公元前194年出生於昔蘭尼，即現利比亞的夏哈特；約於公元前276年逝世於托勒密王朝的亞歷山大港。是希臘數學家、地理學家、歷史學家、詩人、天文學家。埃拉托斯特尼的貢獻主要是設計出經緯度系統，計算出地球的直徑。

Eratosthenes

如何確定一個數是否為質數?

要判斷 n 是否為質數，除了使用埃拉托斯特尼篩法另外還有一個滿有效的方法，就是只要檢查 n 是不是可以被小於或等於 $\sqrt{n}$ 的質數整除?如果這些質數都無法整除 n 那麼 n 就是質數，否則為合數。

313是否為質數?

要判斷 313 是否為質數，則只要檢查 313 是不是可以被小於或等於$\sqrt{313}$的質數整除即可。

由於$\sqrt{313} \fallingdotseq 17.6918$，小於或等於$\sqrt{313}$的質數只有2、3、5、7、11、13、17 ，逐一將之去除313，無一除盡，故知 313 乃為質數也。

整數分拆

- 任兩個超過2的質數和都是偶數，是吧?為什麼?

- 反之，任一個超過4的偶數都可以表示為兩個質數的和，是嗎?為什麼?

哥德巴赫猜想

1742年6月7日，普魯士數學家克里斯蒂安·哥德巴赫在寫給瑞士數學家萊昂哈德·歐拉的通信中，提出了以下的猜想：

任一大於2的整數都可以寫成三個質數之和。

上述與現今的陳述有所出入，原因是當時的哥德巴赫遵照的是「1也是質數」的約定。現今數學界已經不使用這個約定了。哥德巴赫原初猜想的現代陳述為：

任一大於5的整數都可寫成三個質數之和。

哥德巴赫猜想

歐拉在6月30日的回信中註明此一猜想可以有另一個等價的版本：

任一大於2的偶數都可寫成兩個質數之和。

並將此一猜想視為一定理，但他卻無法證明。今日常見的猜想陳述為歐拉的版本，亦稱為「強哥德巴赫猜想」或「關於偶數的哥德巴赫猜想」。

弱哥德巴赫猜想

從關於偶數的哥德巴赫猜想，亦可推出：

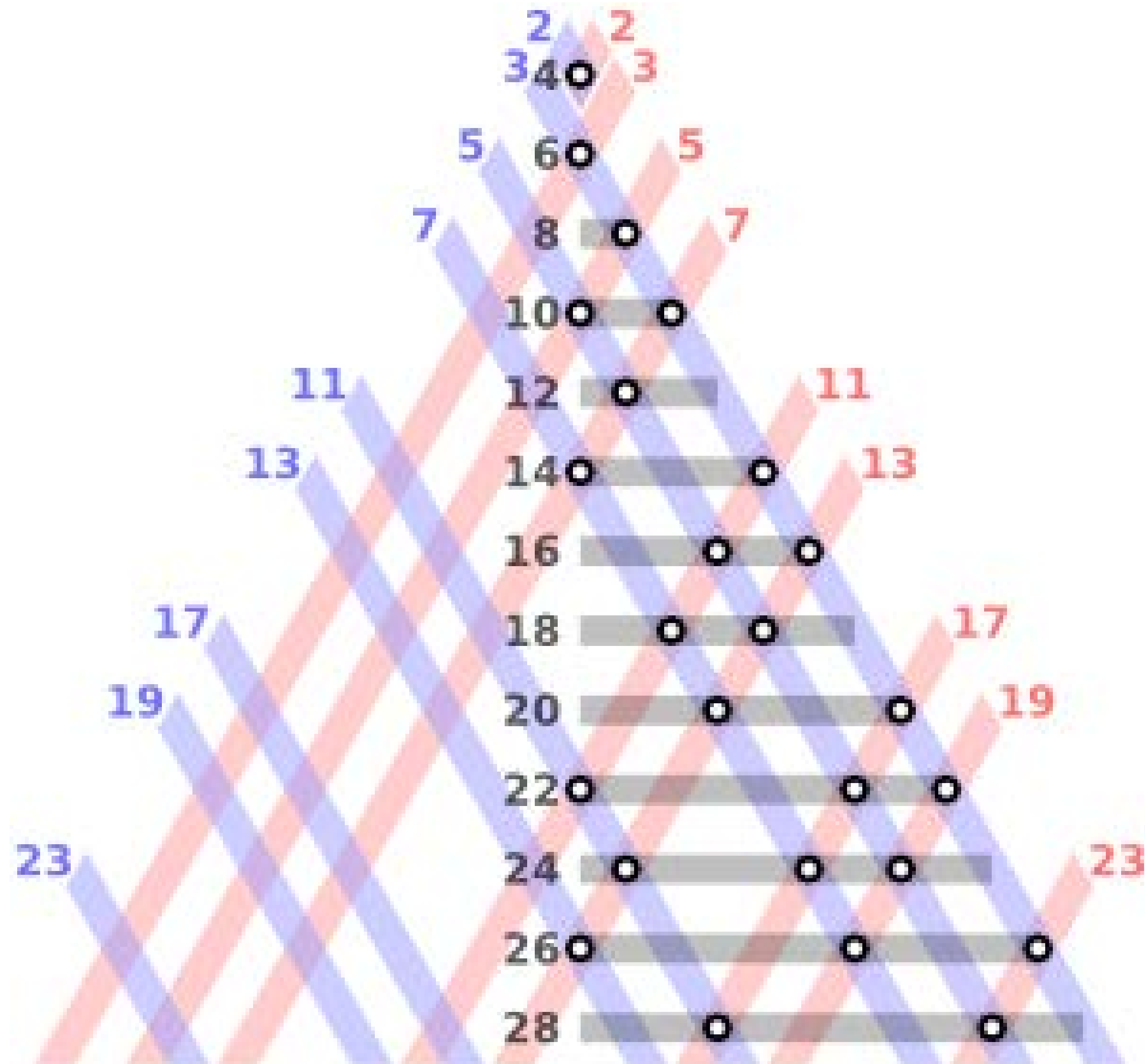
任一大於5的奇數都可寫成三個質數之和

的猜想。後者稱為「弱哥德巴赫猜想」或「關於奇數的哥德巴赫猜想」。

若關於偶數的哥德巴赫猜想是對的，則關於奇數的哥德巴赫猜想也會是對的。

偶數用兩個質數之和表示的方法總數

將一個偶數用兩個質數之和表示的方法總數，等於同一橫線上，藍線和紅線的交點數。



迴文質數(palindromic prime)

迴文質數是指既是迴文數也是質數的數。而迴文數是指一個像16461這樣「對稱」的數，即：將這個數的數字按相反的順序重新排列後，所得到的數和原來的數一樣。這裡，「迴文」是指像「媽媽愛我，我愛媽媽」這樣的，正讀、反讀都是相同的單詞或句子。

為什麼美洲蟬喜歡質數17？

為什麼美洲蟬喜歡質數17？

現今全球所知蟬的種類約有三千種，大部分的蟬每年都會出現蹤跡，只有少數品種具有多年的生命週期，而這當中又以2～8年的生命週期居多；生命週期最長的，就是藏在地底足足有17年之久的布魯德X蟬。目前在北美洲的週期蟬共有七種，其中四種蟬的生命週期是13年，另外三種則具有17年的生命週期。

從數學的角度來說，最讓人好奇的是牠們選擇的週期數：13與17，都是質數。這些蟬選擇藏在地底下度過一段質數年數，只是巧合嗎？

質數的應用

1. 質數近來被利用在密碼學上。所謂的公鑰就是將想要傳遞的訊息在編碼時加入質數，編碼之後傳送給收信人;任何人收到此信息後，若沒有此收信人所擁有的密鑰，則解密的過程中(實為尋找質數的過程)，將會因為找質數的過程(分解質因數)過久，使即使取得訊息也會無意義。

2. 在汽車變速箱齒輪的設計上，相鄰的兩個大小齒輪齒數最好設計成質數，以增加兩齒輪內兩個相同的齒相遇嚙合次數的最小公倍數，可增強耐用度減少故障。

質數的應用

3. 在害蟲的生物生長週期與殺蟲劑使用之間的關係上，殺蟲劑的質數次數的使用也得到了證明。實驗數據顯示，質數次數地使用殺蟲劑是最合理的：都是使用在害蟲繁殖的高潮期，而且害蟲很難產生抗藥性。

4. 以質數形式無規律變化的飛彈和魚雷可以使敵人不易攔截。

看看他們如何證明：「所有大於2的奇數都是質數！」

- **數學家**：3是質數、5是質數、 7是質數，根據數學歸納法，所有大於2的奇數都是質數！

  (事實上，數學歸納法不是這樣用的!)
- **物理學家**：3是質數、5是質數、7是質數、9是實驗誤差、11是質數、...
- **工程師**：3是質數、5是質數、7是質數、... ，唔，經驗告訴我們"所有奇數皆為質數"。
- **程式設計師**：3是質數、5是質數、7是質數、7是質數、7是質數、...

看看他們如何證明：「所有大於2的奇數都是質數！」

- **業務員**：3是質數、5是質數、7是質數、9?嗯，我們會盡量為您辦到！
- **電腦軟體銷售員**：3是質數、5是質數、7是質數、9在下一版軟體發行後便是，...
- **生物學家**：3是質數、5是質數、7是質數，9是質數嗎?目前尚未達到這樣的結果，...
- **行銷、廣告業者**：3是質數，5是質數，7是質數，11是質數，...，只要是能打動人心的數都是質數

看看他們如何證明：「所有大於2的奇數都是質數！」

- **律師**：3是質數、5是質數、7是質數、9?沒有足夠的證據能證實為質數，...
- **會計師**：3是質數、5是質數、7是質數、9也是是質數，但這會導致要繳10%的稅金和 5%的關稅。
- **統計學家**：讓我們隨機取幾個來試試，17是質數、23是質數、11是質數...
- **心理學家**：3是質數、5是質數、7是質數、9也是質數，但許多人壓抑這個想法，...

可不可以用一個公式，表示出所有的質數呢？

可不可以用一個公式，
表示出所有的質數呢？

靜待下回分曉！

質數搶100遊戲

　　現有100個硬幣，兩人輪流取走其中的硬幣。取的規則很簡單，就是每次只能取走質數個硬幣，能使對手無法取者為贏家。試討論贏的策略!

質數跳格子遊戲

於一個格狀矩形棋盤的格子上，從上往下、從左至右依序寫下數字 m 到 n。第一位遊戲者拿一個棋子，把它放在一個質數上，距離 m 的方格最多 k 格。第二位遊戲者拿起那個棋子，把它移到一個更大的質數上，最多超前第一位遊戲者放那個棋子的位置 k 格。接下來第一位遊戲者依循同樣的規則，把那個棋子移到一個再更大的質數上，最多超前 k 格。誰先無法根據這個規則移動棋子就輸了。

重新簡述遊戲規則如下：

(1) 棋子不可移前超過 k 格，

(2) 必定只能移到質數格，

(3) 不可移後或留在原處。

試著找出贏的(或不輸的)策略吧?!

試試$(m,n,k)=(1,100,5)$的例子

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

遊戲者1:
以網底著橄欖綠色表示

遊戲者2：
以網底著澄色表示

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

遊戲者1:
以網底著橄欖綠色表示

遊戲者2：
以網底著澄色表示

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

遊戲者1:
以網底著橄欖綠色表示

遊戲者2：
以網底著澄色表示

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

遊戲者1:
以網底著橄欖綠色表示

遊戲者2：
以網底著澄色表示

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

遊戲者1:
以網底著橄欖綠色表示

遊戲者2：
以網底著澄色表示

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

遊戲者1:
以網底著橄欖綠色表示

遊戲者2：
以網底著澄色表示

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

遊戲者1:
以網底著橄欖綠色表示

遊戲者2：
以網底著澄色表示

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

遊戲者1:
以網底著橄欖綠色表示

遊戲者2：
以網底著澄色表示

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

遊戲者1:
以網底著橄欖綠色表示

遊戲者2：
以網底著澄色表示

很明顯，1 號遊戲者輸掉比賽了。因為棋子在 23，在質數 23 前面 5 個數字中沒有質數。1 號遊戲者是否可以有個較好的開局第一步呢？

質數一子棋遊戲

給定一個$m \times n$(其中$m+n \geq 7$且$|m-n| \geq 2$)大小的格狀棋盤，左下角的那格上有一棋子。今兩人輪流移動此棋子，每次移動的方式只能向右質數格、向上質數格或向右上(即45°方向)任意格。過程中不允許不移動，能將此棋子移動至右上角者為贏家。

試著找出贏的(或不輸的)策略吧?!