投稿類別：數學類

篇名：
愛之數學，學術之愛－奧妙的回文

作者：
陳子婷。私立東大附中。高二己班
陳雅蓉。私立東大附中。高二己班
唐羽彤。私立東大附中。高二己班

指導老師：
陳淑滿老師

愛之數學，學術之愛－奧妙的回文

壹、前言

一、研究動機

一直以來我們所接觸到的「回文」二字，都是在國文的領域出現，包括「我愛媽媽媽媽愛我」、「上海自來水來自海上」等等那些來自各大出版社課本的經典例句。但大多數人不知道的是，其實數學也是有回文數這門學問的，例如「1234321」「9465649」。在什麼情行下會產生這樣特殊的數字規律呢?所以我們進行了一個探討，來一場看似為「與回文有約-國文的壯美」，實際為「奧妙的回文數」的一番研究。

二、研究目的

數學的其他主題，像是「排列組合」、「機率」、「碎形」等等，基本上都有一個類似核心的規律在運行，而我們也不禁好奇，是否這奧妙的回文數，也有著相同的情形，有著規律的核心存在，所以決定要試著找找看。

三、研究方法

回文數的基本定義為「順讀反讀、順看反看」皆相同的數，所以就部分層面而言，它即是所謂的「對稱」。我們會利用這個作為中心思考並且加以延伸，利用網路資訊和實體文獻，以及加上最重要的手算筆記後，統整所得結論，最後用屬於我們的話語，呈現出來。

貳、正文

我們整理並算出四種建構回文數的方法:

一、11 倍數之回文數

11 為最小的回文數，其平方也為回文數，所以我們認為它與我們的主題緊緊相扣。而我們得到的結論為，定義 AB、AAB、AAAB......，即，B＝A+1，A∈｛5、6、7、8｝，任意數介於 5～9，不管是幾位數，不管多長，只要都一樣，而個位數比其他位數大 1，乘以 11 後，即可得到一個回文數，例如 56×11=616、7778×11=85558、8888889×11=97777779。

(一)、定義

AB＝10A+B，A、B∈｛1、2、3、4、5、6、7、8、9｝

(二)、證明

1、AB×11，B＝A+1

(10A+B)×(10+1)＝100A+10A+10B+B＝100A+10(A+B)+B，當 A+B＝10+C 時，原是＝100A+10(10+C)+B＝100(A+1)+10C+B＝100B+10C+B＝BCB，為回文數。

2、AAB×11，B＝A+1
(100A+AB)×11＝100A×11+AB×11＝1100A+BCB＝AA00+BCB，A+B＝10+C，原式＝1000A+100(A+B)+10C+B＝1000A+100(10+C)+10C+B＝1000(A+1)+100C+10C+B＝1000B+100C+10C+B＝BCCB，為回文數。

以此類推。

二、首尾顛倒相加法

(一)、定義

任何一個正整數與它的倒序數相加，所得的和再與和的倒序數相加，如此反復進行下去，經過有限次步驟後，最後必定能得到一個回文數。

舉例說明:

1、38＋83＝121

2、69＋96＝165，165＋561＝726，726＋627＝1353，1353＋3531＝4884

例外：按照上述變換規律重複運算，仍無法得到的回文數的數字中 196 為最小。

(二)、歸類

我們把 11～99 拿來分類，如只需進行 1 次與它的倒序數相加，而得回文數，歸類在 1 次，以此類推。

1 次:11~18、20~27、29、30~36、38、40~45、47、50~54、56、 60~63、

65、 70~72、74、80~81、83、90、92。

2 次：19、28、37、39、46、48、49、55、57、58、64、66、67、73、

75、76、 82、84、85、91、93、94。

3 次：59、68、77、86、95。

4 次：69、78、87、96。

6 次：79、88、97、99。

24 次：89、98 。

(三)、結論

依照上述的分類可以發現:

在十位數加個位數為 1~9、11 時，只需進行 1 次的顛倒相加法。

十位數加個位數為 10、12、13 時，需 2 次。

十位數加個位數為 14 時，需 3 次。

十位數加個位數為 15 時，需 4 次。

十位數加個位數為 16 時，需 6 次。

十位數加個位數為 17 時，需 24 次。

三、偶數位回文的構作方法之一

(一)、定義：

A,B 為 0~9 的整數(A 不可為 0)。EX:ABAB 表示 $1000\times A+100\times B+10\times A+B$。

1、若 $1000\times A+100\times B+10\times B+A$, 得的 ABBA, 稱為 4 位回文數 H_4, 一個 n 位的回文數記作 H_n。 即由 2 位數 AB, 生成 4 位數 ABBA 的 H_4 回文數的方法。

(二)、定理 1

1、設 $[101\times AB+9\times(B-A)]$ ----(1) ，則 H_4 為回文數。

2、證明： 由定義知, 兩個不相等的數 AB 得到的 4 位 ABBA 回文數 H_4 為

$1000\times A+100\times B+10\times B+A$----(2)

3、 把 (1)式展開 $H_4=101\times(10\times A+B)+9\times(B-A)=1010\times A+101\times B+9\times B-9\times A$
$=1001\times A+110\times B$---- (3)

4、(2)−(3)得 $1000\times A+100\times B+10\times B+A-(1001\times A+110\times B)=0$

5、定理 1 證畢。

(三)、由 $H_4=[101\times AB+9\times(B-A)]$ ----(1) 舉的例子

1、A=1, B=2 時, 代入 (1) 得 $101\times12+9\times(2-1)=1212+9=1221$

2、A=5, B=2 時, 代入 (1) 得 $101\times52+9\times(2-5)=5252+(-27)=5225$

四、偶數位回文的構作方法之二

(一)、定義：

設 A、 B、 C 為不相等的 3 個整數， 用 ABC 表示： $100\times A+10\times B+C$

1、若 $100000\times A+10000\times B+1000\times C+100\times C+10\times B+A$ 得到的 ABCCBA 稱為 6 位 回文數 H_6。

(二)、定理 2

1、由 3 位數 ABC, 生成 6 位數 ABCCBA 的回文數 H_6的方法:
令 $H6=1001\times(ABC)+99\times(C-A)$----(4)， 則 H_6 為回文數。

2、證明： 由定義知, 3 個數構成的 H_6回文數為
$100000\times A+10000\times B+1000\times C+100\times C+10\times B+A$----(5)

3、把 (4) 展開：$H_6=1001\times(100\times A+10\times B+C)+99\times(C-A)$
$=100100\times A+10010\times B+1001\times C+99\times C-99\times A$
$=100001\times A+10010\times B+1100\times C$----(6)

4、(5)−(6) 得：
$100000\times A+10000\times B+1000\times C+100\times C+10\times B+A$
$-(100001\times A+10010\times B+1100\times C)=0$

5、定理 2 證畢。

(三)、由 $H_6=1001\times(ABC)+99\times(C-A)$----(4) 舉的例子

1、當 ABC=729 時, 把 ABC 代入(4)得
$H_6=1001\times729+99\times(9-7)=729729+198=729927$

2、當 ABC=196 時,把 ABC 代入(4)得
$H_6=1001\times196+99\times(6-1)=196196+495=196691$

3、當 ABC=887 (196 的顛倒數之和), 把 ABC 代入(4)得
$H_6=1001\times887+99\times(7-8)=887887+(-99)=887788$

(四)、總結

$H_4=[101\times AB+9\times(B-A)]$ 與 $H_6=[1001\times(ABC)+99\times(C-A)]$

1、由以上兩個式子，我們歸納了一個集合：
$A=\{x \mid x=(10^n-1)(A_n+A_{n-1}+\cdots..+A_1)+(10^{n-1}-1)(A_n-A_1)$，$n\geq2\ n\in z\}$

參、結論

我們根據不同的尋找回文數之方法，可以發現得到的結果不盡相同，像前面所說的首尾顛倒相加法，帶入 196 的結果不是個回文數，而如果使用偶數位回文構作方法，帶入定義之中，得知 196 卻會是個回文數，當然它的顛倒數之和也會是回文數。我們藉此讓更多人知道不只是國文領域有回文，其實數學領域也暗藏著深深的玄機，看似只是數字的排列，其中的意思卻有很多的不同，希望日後有機會更加深入地去探索這個未知的世界。

肆、引注資料

(1)蔡承志(譯)(2005)。**數學馬戲團**。台北市：遠流出版社。
(2)陳以鴻(譯)(2008)。**數學的奇妙**。上海：上海科技教育出版社。
(3)昌爸工作仿。回文數。取自 http://www.mathland.idv.tw/fun/palindrome.htm
(4)數學傳播。回文數定理與回文數幻方。 2017 年 6 月。取自
https://w3.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=41207