說好的數論課呢：概論、算術基本定理

施天民

國立清水高級中學

一、數論課呢？

高中 99 課綱已然上路二年餘，優劣各有老師支持。筆者唸高中時，用的是 84 課綱，記得高一數學第一章，號稱「高中數學第一殺手」：邏輯、集合、函數。當我看著學校數學王牌老師在黑板上證明費式數列(Fibonacci sequence)的一般式為 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$時，當補習班老師問全班二百位呈現痴呆狀的學生「『如果我有三頭六臂，那麼你會有四頭七臂』這句敘述對不對」時，我突然驚覺：原來傳說中的高中數學，真的不是我可以駕馭的。當然 84 課綱的殺手還不只這一位，在此就不舉例了，只能用「高手如雲」一語帶過！但我們似乎不是最艱辛的一代，聽一些前輩介紹失傳的東華本與實驗本，只能說戰況悽厲，死傷慘重。

但我們不能把 84 課綱污名化，因為它也曾讓我們感到溫暖，就是緊接在第一殺手之後的第二章：數與坐標系。尤其第一單元「整數」，聽到王牌老師在介紹因數與倍數，如此親切的名詞，同學們的眼眶都溼了！現在的高中生已經無法體會這種「落差式的溫暖」，因為 99 課綱雖然有一章「數與式」，但內容難度與當年的「數與坐標系」相比，還是有一段距離。

數論，簡言之就是「探討數字的理論」，尤其關注在整數，像因數與倍數就是數論中很重要的課題。99 課綱中，數論的份量銳減，這也是某些老師批評它的理由，因為很多時候(譬如帶領學生作科展時)會用到數論的相關知識。無論如何，編輯課綱的教授會這麼作，絕對有評估過、深思熟慮過，我們應該想辦法克服實務上的困難。而本文也是本著補充 99 課綱不足的想法而生，仿照歌手周杰

倫的感慨，以「說好的數論課呢」為題，希望它可以起到讓老師們回味，讓學生們學習的初衷。

二、與數論相遇

數論是一門古老的學問，因為它很容易出現在初等數學裡，而且敘述都很淺顯易懂，所以與其它數學領域比起來，它是很吸引人的一支門派。但這不代表它是容易的，許多數學人都認為數論很有吸引力——「致命的吸引力」。以筆者個人的經驗為例，當年大學修習初等數論時，覺得它與高等微積分或抽象代數之類的科目比起來，實在太親民、太有趣了！所以研究所初期，毫不猶豫地選擇踏入數論之門。一個月之後，突然有一種「誤上賊船」的感覺，總疑惑當初怎麼會選擇這條「不歸路」，所幸在許多教授的指導與鼓勵下，我還是順利完成研究所課程。

費馬最後定理 **(Fermat’s last theorem)**

若正整數 $n \geq 3$，不定方程 $x^n + y^n = z^n$ 無正整數解。

哥德巴赫猜想 **(Goldbach's conjecture)**

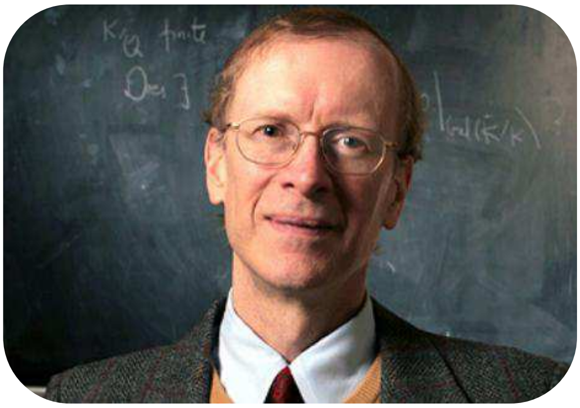
任何大於 2 的偶數皆可表示成兩個質數的和？

孿生質數猜想 **(twin prime conjecture)**

有無限多對孿生質數？
(若兩質數相差 2，則稱其為一對孿生質數。例如：3 與 5、41 與 43。)

希爾伯特(David Hilbert, 1862-1943, 德國數學家)曾說過:「一個數論問題不會過時，就像一件真正的藝術品不會過時一樣。」上述三個猜想就如同是藝術品，三幅連國中生都能瞭解的藝術品，卻難倒幾百年來的「數學藝術家」，幸好費馬最後定理被扶正了，才稍稍扳回一點面子。

國中時，坊間補習班很流行一種非常規的課程：資優數學。每次花約四十分鐘的車程到彰化市上課，雖然以現在的角度看來，不過是一些較新穎或技巧性的題目和一堆速算技巧的傳授，但有機會學習到這些不一樣的「數學」，又沒有課業壓力，對當時的我而言，其實是很快樂的！尤其當老師介紹到費馬最後定理的故事，我就如同當年的懷爾斯(當然我沒有他鍥而不捨的精神)，深深著迷。



安德魯・懷爾斯(Andrew Wiles, 1953~)，英國數學家，目前任職於美國普林斯頓大學(Princeton University)數學系。10 歲時在家鄉圖書館看到一本數學書上介紹到費馬最後定理(當時還只是個懸而未決的問題)，他曾描述當他看到這個定理時，便決定試著證明它，因為它是如此美麗，年僅 10 歲的他都能懂定理敘述。最後，他花了大約整整九年的時間，才於 1995 年將證明完成。

(圖片擷取自 http://www.princeton.edu/admission/whatsdistinctive/facultyprofiles/wiles/)

性質 1

連續 n 個整數中，恰有一個是 n 的倍數。

記得補習班老師上課的時候提到：「連續四個整數中，一定恰有一個是 4 的倍數；連續五個整數中，也恰有一個是 5 的倍數；以此類推！」譬如 458、459、460、461、462、463、464 這七個連續整數中，恰有一個數(也就是 462)是 7 的倍數。當時老師沒說原因，所以這件「驚人」的事實，對我幼小的心靈而言，彷彿投了顆震憾彈！但這不過是除法演算法(Division Algorithm)的一種體現罷了！

性質 2

連續 n 個整數的乘積必為 $n!$ 的倍數。
(符號：$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$)

大學修習數論課時，黃森山教授在解題時用到性質 2，那時心中的震驚又如同國中時一樣——難以置信！仔細思考後會發現，性質二是無法直接用性質一推得。筆者當時嘗試利用同餘法證明，最後也如願完成，雖然過程顯得繁複，但其實解題想法很單純，重點它是自己的產物，那種成就感，相信各位一定能夠感同身受。性質二的證明方法很多，且此性質還有許多實用的地方，待後續章篇説明。

性質 3

兩相鄰正奇數必互質。

求二數的最大公因數有許多方法，從列出標準分解式觀察、短除法，到輾轉相除法等等。學生總會問我：「老師，求最大公因數用短除法就好了啊！為什麼還要學輾轉相除法？」我都會請「理直氣壯」的學生告訴我 123456789 與 123456787 這兩個數的最大公因數為何，大部份學生都清楚「兩相鄰正整數會互質」，但卻沒思考過「兩相鄰正奇數」的情形，因此他們多半會先有直覺式的回答：「互質？」緊接著的是心虛狀的吱吱唔唔。當時透過這樣簡單的特例，就可以將學生們的心房打開，尊敬地迎接偉大的「輾轉相除法」。

現在坊間的商品各種標價都有可能出現，譬如 1 元的糖果、2 元的鉛筆、13 元的光碟片等等，尤其商家喜歡標示 99 或 998 這種價格，讓消費者產生「未進位」的錯覺。商家之所以可以如此肆無忌憚地標示價格，是因為我們有 1、5、10 元三種硬幣，所有的價錢都可以用這些幣值湊出。但思考一個問題，如果當初政府在製造硬幣時，只有 3 元和 7 元二種幣值，那商家可以標示的價格有哪些呢？還是所有的價格嗎？很顯然不是！因為顧客無法購買標價 1 元的商品(當然這裡我們排除「顧客付 3+7 元，商家找 3+3+3 元」這種「技術性」的找錢法)。讀者不妨在此停下來思考，想想問題的解答，想想問題的數學內涵。這是一個很有趣的問題，非常適合一般中學生思考。

諸如此類有趣的性質或問題，許多都逃不離數論的範疇。從上述幾個案例，可以窺見數論課程的重要性，這也是本文的目的，將一些基礎卻很難在教科書上

學習到的數論知識，傳授給普羅學子們。

三、算術基本定理 (The Fundamental Theorem of Arithmetic)

數學系教授耳提面命，在數學上，凡是冠上「基本」二字的定理，表示其重要性無與倫比。算術基本定理、代數基本定理(The Fundamental Theorem of Algebra)與微積分基本定理(The Fundamental Theorem of Calculus)，每一個在數學史上都佔有極重要的地位，但我們卻常常因為「基本」這兩個字而輕視它。

算術基本定理

任何大於 1 的正整數，若不是質數，則其必可表示成某些質數的乘積。
且若不考慮這些質因數的順序，則此表示法唯一。

例如：$12=2\times2\times3$，$150=2\times3\times5\times5$。若我們將相同質數用指數表示，且質數依照由小至大的順序排列，則$12=2^2\times3$，$150=2\times3\times5^2$，因此算術基本定理有另一種較精緻化的推論敘述：「任何大於 1 的正整數都可唯一表示成 $p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\cdots\times p_n^{\alpha_n}$ 的樣子。其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是正整數，$p_1,p_2,\cdots,p_n$是質數且 $p_1<p_2<\cdots<p_n$。」這不就是我們國小學的「標準分解式」嘛！

證明 (算術基本定理)

(存在性)
設$a\in\mathbb{N}$且$a>1$。
若 a 是質數，則證明完畢。
若 a 不是質數，則存在大於 1 的正整數b_1,b_2使得$a=b_1\times b_2$。
若b_1,b_2皆為質數，則證明完畢；
否則可以利用相同的方式，將其拆成兩大於 1 的正整數相乘。
最後，必可得到質數 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 使得$a=p_1\times p_2\times\cdots\times p_n$。

(唯一性)
假設$a=p_1p_2\cdots p_n=q_1q_2\cdots q_m$，

其中 $n,m\in\mathbb{N}$ ， p_i,q_i 為質數，且 $p_1<p_2<\cdots<p_n$ ， $q_1<q_2<\cdots<q_m$ 。
由上式可知存在 $1\le i\le m$ 使得 $p_1|q_i$ 。因為 p_1,q_i 皆為質數，所以 $p_1=q_i$ 。
同理，存在 $1\le j\le n$ 使得 $q_1=p_j$ 。
因為 $p_j\ge p_1=q_i\ge q_1=p_j$ ，所以 $p_1=q_1$ 。
因此 $p_1p_2\cdots p_n=q_1q_2\cdots q_m \Rightarrow p_2\cdots p_n=q_2\cdots q_m$ 。
重覆上述的討論方式可知 $n=m$ 且 $p_2=q_2$ 、 $p_3=q_3$ 、⋯、 $p_n=q_n$ 。

■

算術基本定理為什麼重要？既然重要又為什麼要取用「基本」二字？

前文提過，數論就是「探討數字的理論」，尤其我們關注的對象是整數，因為負整數只是正整數的相反數，所以兩者可以說是一體兩面的關係。而 0 和 1 相對而言是比較「單純」的數字，所以要深入研究的對象大多集中在大於 1 的正整數。

算術基本定理彷彿告訴我們：每一個大於 1 的正整數都有自己的「身份證字號」——標準分解式。而且這樣的身份證字號是彼此不同的，是獨特的，所以身份證字號不同，身份就不一樣。因此，我們要研究一個數有什麼性質的時候，只要知道它的標準分解式，甚至只要其中一部份，就可以窺得它的全貌或性質。除此之外，算術基本定理還告訴我們，這個身份證字號是由一連串的「質數」構成，所以這也是質數一直是數論中非常重要的元素與研究對象的原因。

實例 1

國小學生都知道，一個數是不是偶數取決於它的個位數字是不是偶數。
換句話說，如果一正整數的標準分解式中有質因數 2，那這個數的個位數字必為偶數。

實例 2

既然算術基本定理說大於 1 的正整數 a 有唯一的表示法 $p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\cdots\times p_n^{\alpha_n}$ ，那表示若正整數 b 是 a 的因數，則 b 的標準分解式一定是 $p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\cdots\times p_n^{\beta_n}$ 的樣子，其中 $\beta_i\in\mathbb{Z}$ 且 $0\le\beta_i\le\alpha_i$ 。

實例 3

若正整數 $a=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\cdots\times p_n^{\alpha_n}$ ，$b=p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\cdots\times p_n^{\beta_n}$ 則

(1) a、b 的最大公因數 $(a,b)=p_1^{t_1}\times p_2^{t_2}\times\cdots\times p_n^{t_n}$ ，其中 $t_i=\min\{\alpha_i,\beta_i\}$

(2) a、b 的最小公倍數 $[a,b]=p_1^{s_1}\times p_2^{s_2}\times\cdots\times p_n^{s_n}$ ，其中 $s_i=\max\{\alpha_i,\beta_i\}$

(3) 由(1)、(2)可知 $(a,b)[a,b]=ab$

實例 4

若正整數 $a=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\cdots\times p_n^{\alpha_n}$ ，則

(1) a 的正因數個數 $\tau(a)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$

(2) a 的正因數總和 $\sigma(a)=\dfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\dfrac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\times\cdots\times\dfrac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$

以上四個實例也許大家很熟悉，甚至覺得理所當然，但這些結果都建立在算術基本定理的基礎上，如果沒有它，許多我們熟悉的性質都會面臨崩潰，所以教授是對的，我們應該正視這個基本卻極重要的定理——算術基本定理。

最後，我們利用算術基本定理來解決兩個經典的證明，透過這兩個實例，應該可以讓您更瞭解它的「無所不在」。

實例 5

$\sqrt{2}$ 是無理數。

雖然在國小與國中階段，我們會默默使用過許多有理數與無理數(國小教的 π，國中教的 $\sqrt{2}$)，但這階段只侷限在計算操作上。直到高中，才會開始正式介紹有理數與無理數的概念與性質，但畢竟能夠深入的程度還是有限，且大部份集中在有理數的部份，這無非是因為無理數的概念與性質總是比有理數更難處理，譬如稠密性(density)，有理數很容易說明，但無理數就比較困難了。

證明 1　(實例 5)

設 $\sqrt{2}$ 是有理數，則存在互質的正整數 p、q 且 $p\neq 0$ 使得 $\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ 。

兩邊平方可得 $2p^2=q^2$ 。

這表示 q^2 為偶數，所以 q 亦為偶數，因此 $q=2m$ ，其中 $m\in\mathbb{N}$ 。

則 $2p^2=q^2=(2m)^2=4m^2$ ，可得 $p^2=2m^2$ 。

同理，這表示 p 必為偶數。

但這與假設「p、q 互質」矛盾！

因此，$\sqrt{2}$ 為無理數。

■

筆者高中時，實例 5 幾乎是段考必考題，因為它與歐幾里德(Euclid，希臘數學家)的「質數有無限多個」的證明，可說是反證法(reductio ad absurdum)的經典範例。可惜目前的高中生應該很難接觸到這些內容了。以往課本是用奇偶性論證法，也就是證明 1，但在這裡，我們將利用算術基本定理使證明方式更簡潔。

證明 2　(實例 5)

設 $\sqrt{2}$ 是有理數，則存在互質的正整數 p、q 且 $p\neq 0$ 使得 $\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ 。

兩邊平方可得 $2p^2=q^2$ 。

因為 $2p^2$ 所含的質因數 2 的個數必為奇數個，

但 q^2 所含的質因數 2 的個數為偶數個。矛盾！

因此，$\sqrt{2}$ 為無理數。

■

除此之外，筆者非常推薦大家閱讀蔡聰明教授的文章:〈$\sqrt{2}$ 為無理數的證明〉，裡頭共介紹了 28 種證明。

實例 6

質數有無限多個。

如前段所述，歐幾里德關於此定理的證明大概是公認最漂亮的數學證明！如同匈牙利數學家 Erdös 所言，這應該也是從天書中擷取出來的證明。讀者也許會

覺得這證明看起來還好，但您應該想想，在二千多年前，那時候的數學視野與環境，歐幾里德可以想到如此巧妙的證明，的確是難能可貴！

<u>證明 1　(實例 6)</u>

設質數為有限多個：$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$。
考慮 $N = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$
因為 $N > 1$，所以存在某一質數 p_i 使得 $p_i \mid N$。
因此 $p_i \mid N - p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$，也就是說 $p_i \mid 1$，
但這與「p_i 為質數」矛盾！
因此質數有無限多個。

■

也許是受到歐幾里得的激發，古往今來，許多數學家都提出「質數有無限多個」的證明，在此，我們要介紹其中一種證明方式，由數學家歐拉(Euler)提出，雖然無法撼動歐幾里得的歷史地位，但也是充滿巧思。

<u>證明 2　(實例 6)</u>

設質數為有限多個：$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$。
考慮調和級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$。
因為算術基本定理告訴我們，每個大於 1 的正整數都有唯一的標準分解式，所以任何正整數的倒數都會在

$$A = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^{\ 2}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^{\ 2}} + \cdots\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^{\ 2}} + \cdots\right)$$

的展開式中出現，且只會出現一次。
所以 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = A$。
另外，因為 $0 < \frac{1}{p_i} < 1$，所以 $1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^{\ 2}} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$。
可得 $A = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \times \cdots \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$，因此 $A \in \mathbb{R}$。

但調和級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 是發散的級數，矛盾！

因此質數有無限多個。

■

四、結論

三大基本定理中，通常學生最熟的是微積分基本定理，因為微積分的計算對高中生來講是全新的東西，吸引力會比較大，而且它也是課程重點之一。相反地，代數基本定理和算術基本定理，學生已視其為理所當然，尤其它們也比較少在實際解題過程中使用到，所以學生往往知道有這麼一回事，但不知道它們的鼎鼎大名，對它們的認識也不夠深入。因此，在這一系列文章的首篇，筆者決定先介紹這位不為人知的「大人物」。

最後，我們再次重申，每一個大於 1 的正整數都有自己專屬的身份證字號，也就是國小學的「標準分解式」，而從上述幾則實例看來，雖然算術基本定理看似沒有實質「參與」我們的推論過程，但有了它、有了唯一的標準分解式，我們才能將正整數作進階的、實際的代數操作，這就是算術基本定理的精神所在。

翻開 99 課綱課本，數論的知識已消失無蹤，但從前文看來，數論是一個很迷人的數學領域，無法讓高中生體會這種樂趣，實在很可惜！錯過這次，他們這輩子應該也難有機會體會數論之樂。如果哪一天，學生問我：「老師，説好的數論課呢？」我會不會吱吱唔唔！

感謝許志農與黃森山兩位教授寶貴的寫作建議，讓本文內容更加紮實，也更貼近我們的寫作初衷。

參考資料

1. 王丹華、楊海文、劉咏梅編著 (2008)：**初等數論**。北京：北京航空航天大學出版社。
2. 余文卿 (1999)：**漫談高中數學新課程**。數學傳播，23 卷第一期。
3. 張文忠 (2002)：**基礎數論—原理及題解**。台北市：中央圖書。
4. 馮志剛 (2009)：**初等數論**。上海：上海科技教育出版社。
5. 蔡聰明 (1999)：$\sqrt{2}$ **為無理數的證明**。數學傳播，23 卷第一期。
6. 高級中學課程標準暨綱要：http://www.edu.tw/high-school/content.aspx?site_content_sn=8403
7. Andrew Wiles 自傳：http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Wiles.html
8. David M. Burton (2011). ***Elementary Number Theory*** **(7th ed.).** New York: McGraw-Hill.
9. Joseph H. Silverman (2006). ***A Friendly Introduction to Number Theory*** **(3rd ed.).** New Jersey: Pearson Education.

若對本文有所指教或任何疑問，歡迎來信聯絡：poemghost@hotmail.com