[研究成果報導]

函數體上的超越數論

清華大學數學系　張介玉

數論是數學中最古老的一門，超越數論是探討一些數的自然性，研究數與數之間的關係。我們對於一些特別有意思的數稱做特殊值，通常這些數具有下列的意涵：幾何不變量或是重要函數取值。例如：π，橢圓積分，黎曼ζ-函數取值在大於 1 的正整數，Γ-函數取值在真分數等等。特殊值若有幾何背景可詮釋成廣義的“週期”，那麼數學家相信這些應該都是超越數，也就是不滿足有理係數多項式的根，但一般而言這還是很艱難的問題。古典的超越數論始於 19 世紀末的 Hermite-Lindemann 定理，此定理可推得π和 e 都是超越數：

定理(Hermite-Lindemann 1882)：
令 z 爲非零複數，則 z 和 e^z 中至少有一個是超越數。

這裡 e^x 指的是指數函數，而我們可視它爲乘法群$\mathbb{G}_m$（代數群）的指數函數，即：

$$e^x:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*=\mathbb{G}_m(\mathbb{C}).$$

探討詮釋與決定一些特殊值間的代數關係是個有意思且重要的問題。本文將介紹古典的超越數論情況，並且比較函數體上的類似問題與進展。

一、希爾伯特第七問題與 Baker 定理

我們令 $\overline{\mathbb{Q}}$ 是代數數所形成的體，然後考慮此集合：

$$\mathcal{L}:=\{\lambda\in\mathbb{C}^*;\, e^{\lambda}\in\mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}})=\overline{\mathbb{Q}}^*\}.$$

由 Hermite-Lindemann 定理，我們得知$\mathcal{L}$集合中任何元素（視爲對數 log 取值在代數數）都是超越數。在 1900 的國際數學大會上希爾伯特 (Hilebrt)提出著名的第七問題：
令α既不是 0 也不是 1 的代數數，β爲代數數但非有理數；則α^{β}應該是超越數？
據傳聞，當時希爾伯特認爲此問題比 Riemann Hypothesis 還要難；但此問題在 30 年代被 Gelfond 和 Schneider 所解決：

定理 I-1 (Gelfond-Schneider 1930s)：
令λ_1, λ_2是$\mathcal{L}$中兩個元素。假如λ_1, λ_2是$\mathbb{Q}$-線性獨立，則它們是 $\overline{\mathbb{Q}}$ -線性獨立。

在 60 年代，Alan Baker 推廣了 Gelfond-Schneider 定理到多個對數取值代數數的情況，這在 Diophantine 問題上有許多應用，因而獲得數學最高榮譽的費爾茲獎：

定理 I-2 (Baker 1960s)：
令$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是$\mathcal{L}$中 n 個元素。假如$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是$\mathbb{Q}$-線性獨立，則 $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$是 $\overline{\mathbb{Q}}$ -線性獨立。

基於 Baker 的定理，很自然地數學家下一步關心對數取值在代數數之間的代數關係，然而半個世紀過去了，此問題還是懸而未解的猜想：

<u>**猜想 I-3**</u>：令$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是$\mathcal{L}$中 n 個元素。假如$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是$\mathbb{Q}$-線性獨立，則$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是$\mathbb{Q}$-代數獨立。即：對任意非零多項式 $f\in\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$，則 $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\neq 0$。

下面我們將介紹上述的結果和問題如何在函數體的世界被完整地實現。

二、Drinfeld 模上的超越數論

令$\mathbb{F}_q$爲個數爲 q 的有限體，T 爲變元。令 A 是係數在$\mathbb{F}_q$，變元爲 T 的多項式環$\mathbb{F}_q[T]$。令 k 是此有理函數體$\mathbb{F}_q(T)$，也就是 k 中的元素都可以寫成兩個在 A 中的元素相除。在 k 上我們可以定義一個自然的（非歐幾里德）絕對值：如果 $\frac{f}{g}\in k^*$，我們定義$\left\|\frac{f}{g}\right\|:=q^{\deg f-\deg g}$。我們把 k 對此絕對值做完備化得到一個體 k_∞。我們接著固定一個 k_∞上的代數閉包(algebraic closure)，然後

把絕對值║║推廣到這個體上，然後在此體上做一次完備化得到一個代數封閉(algebraically closed)的體$\mathbb{C}_\infty$。最後我們在$\mathbb{C}_\infty$裡面固定一個 k 上的代數閉包$\bar{k}$，則和古典的世界相較，我們有下面的類比：

$$A \leftrightarrow \mathbb{Z},\ k \leftrightarrow \mathbb{Q},\ k_\infty \leftrightarrow \mathbb{R},\ \mathbb{C}_\infty \leftrightarrow \mathbb{C},\ \bar{k} \leftrightarrow \bar{\mathbb{Q}}.$$

我們在函數體上談的超越性，指的是元素在$\mathbb{C}_\infty$但不在$\bar{k}$上。令 r 是正整數且令$\Lambda \subset \mathbb{C}_\infty$爲離散，秩爲 r 的 A-模； Drinfeld (1974)考慮這個無窮乘積：

$$e_\Lambda(z) := z\prod(1-\frac{z}{\lambda}).$$

上述的乘積λ是跑遍Λ裡所有非零的元素。由於我們的絕對值是非歐幾里德且Λ是離散的關係，$e_\Lambda(z)$形成一個定義在$\mathbb{C}_\infty$上的解析函數。Drinfeld 證明我們總是有個$\mathbb{F}_q$-線性環自同態（下面的$\mathbb{G}_a$指的是加法群（代數群））

$$\rho^\Lambda : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{G}_a(\mathbb{C}_\infty))$$

使得ρ_T^Λ的映射長相爲$\rho_T^\Lambda : X \mapsto TX + b_1X^q + \cdots + b_rX^{q^r}\ (b_r \neq 0)$並且對任意的$a \in A$下列函數方程式成立：

$$\rho_a^\Lambda(e_\Lambda(z)) = e_\Lambda(az).$$

因此透過ρ_a^Λ的作用，我們可以在此加法群$\mathbb{C}_\infty$上賦予新的 A-模結構；這稱之秩爲 r 的 Drinfeld A-模，我們記成$E_\Lambda = (\mathbb{C}_\infty, \rho^\Lambda)$。而上述的函數方程陳述 $e_\Lambda(z)$是個 A-模同態，並且我們有這個 A-模短正合序列：

$$0 \to \Lambda \to \mathbb{C}_\infty \xrightarrow{e_\Lambda} E_\Lambda(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{C}_\infty \to 0.$$

（比較古典的情況：$0 \to 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{e^x} \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \to 1$）因此我們稱$e_\Lambda(z)$是 Drinfeld A-模 E_Λ的指數函數。（註：Drinfeld 證明秩爲 r 的 Drinfeld A-模和在$\mathbb{C}_\infty$中離散秩爲 r 的 A-模有一一對應的關係）

我們固定任意的 Drinfeld A-模 E_Λ並且假設它是定義在$\bar{k}$上，也就是說ρ_T^Λ的係數 $b_1, \ldots, b_r$都在$\bar{k}$內。如同古典的情況，我們考慮

$$\mathcal{L} := \{\lambda \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\};\ e_\Lambda(\lambda) \in E_\Lambda(\bar{k}) = \bar{k}\}.$$

在[3]的文章中，于靖教授證明了平行於古典的 Hermite-Lindemann 定理因而得到$\mathcal{L}$中的元素（視爲 Drinfeld 對數函數取值在代數點）都是超越數（即不滿足係數在 k 之多項式的根）。我們令 $\mathrm{End}(\Lambda) := \{z \in \mathbb{C}_\infty;\ z\Lambda \subset \Lambda\}$並且註明 End(Λ)可以被證明同構於 E_Λ 的自同態環。令 K_Λ 爲 End(Λ)的商體；它是 k 上的有限擴張。在[4]中，于靖教授證明了函數體上平行於 Baker 的定理：

定理 II-1(于靖 1997)
令$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是$\mathcal{L}$中 n 個元素。假如$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是 K_Λ-線性獨立，則 1，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是$\bar{k}$-線性獨立。

在[2]一文，筆者與 Papanikolas 推廣上述定理證明了完整的代數獨立性結果（比較猜想 I-3）：

定理 II-2 (Chang-Papanikolas 2012)：
令條件與假設如定理 II-1，則$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$是 k-代數獨立。
即：對任意非零多項式 $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$，則$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$。

三、方法與結論

在 80 年代，Anderson 引進所謂的交換 t-模，也就是 Drinfeld A-模推廣到高維的情況；這是種高維的向量群具有 A-模結構（加上一些條件），這在函數體的超越數論扮演著古典交換代數群的角色。Anderson 並且引進所謂的 t-motive，這種具有線性代數的良好結構，Anderson 進而證明交換 t-模的範疇和 t-motive 的範疇是反等價(anti-equivalence)。

在[4]一文，于靖教授發展出平行於 Wüstholz 的解析子群定理，目前稱爲于的 t 子模定裡。這個定理的意涵是說，交換 t-模的對數向量函數取值在代數點的線性關係都可以從這 t-模的子 t-模結構來詮釋。利用這個定理，定理 II-1 很快就可以得証。

在 [1] 一文，Anderson, Brownawell 和 Papanikolas 發展出一套新的線性獨立判斷準則

（簡稱 ABP-定理），這三位作者相信這應該是接近于的 t 子模定裡之 t-motivic 詮釋。基於上述的交換 t-模和 t-motive 的對應關係，對於那些所謂的 uniformizable 的交換 t-模（即它們的指數向量函數是滿射），它們所對應的 uniformizable 的 t-motive 都有個 Frobenius 差分方程式且解的性質非常好（其解是種可逆矩陣而且 entry 都是冪級數的解析函數）。ABP-定理是描述說對於這樣的解，當我們在每個 entry 取值在 T，那麼這些解析函數取值後的 $\bar{k}$ -線性關係都是來自於解函數的線性關係。

由於我們可以對上述的 Frobenius 差分方程式做張量成積(tensor product)，因此 Papanikolas [5]首先發現到由 ABP-定理馬上可以推得這些解函數取值在 T 後的所有 $\bar{k}$ -代數關係都是來自於解函數之間的代數關係，因而導出這些解函數取值在 T 的超越次數(transcendence degree)等於解函數的超越次數。

在 [5] 一文，Papanikolas 首先證明 uniformizable 的 t-motives 形成一個 Tannakian 範疇，由於這是非常好的線性代數結構的範疇，在此範疇中的任何一個 t-motive 都自然有個 Tannakian Galois group（這是一種代數群）對應，因此我們稱做 t-motivic Galois 群。

Papanikolas 接著採用古典的微分 Galois 理論，成功地證明出這 t-motivic Galois 群的維數恰好等於解函數的超越次數，因而等於解函數取值在 T 的超越次數。這個重要等式在函數體上詮釋了古典的 Grothendieck 週期猜想的論點。

要證明定理 II-2，我們很自然考慮 Drinfeld A-模所對應的 t-motive。而在這個情況，這 t-motive 對應的解函數取值在 T 恰好是這個 Drinfeld A-模的模週期（第一類和第二類週期），因此計算出這個 t-motivic Galois 群的維數是證明定理 II-2 第一道關卡（即 Drinfeld 模週期猜想）。

當時筆者猜測這個 t-motivic Galois 群應該是等於在這 Drinfeld A-模的 Tate 模上做 Galois 表現之映象的 Zariski closure（平行於古典的 Mumford-Tate 猜想的觀點），而我們在[2]文章中第一步就是證明這個等式，然後結合 Pink 在 Drinfeld 模上的 Tate 模之 Galois 表現理論結果證明了 Drinfeld 模週期猜想。接著我們考慮在 Ext^1 上造出適當的 t-motive 使得它對應的解函數取值在 T 涵蓋了我們要探討的$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$。接著我們採用同調代數的技巧在 Ext^1 上做計算使得我們可以確切算出 t-motivic Galois 群的維數，因而證明定理 II-2。

結束本文前筆者做下列的歸納：t-motivic 方法在函數體的超越數論扮演非常重要的角色且可行的方法（相對於古典的情況），我們通常採取的策略爲：

(1) 將欲探討的特殊值詮釋成 t-motive 的週期；即設法造一個 t-motive 使得它所對應的解函數取值在 T 涵蓋我們要討論的特殊值。

(2) 計算 t-motivic Galois 群的維數。

但上述兩個步驟往往是很不容易的問題。另外，並不是所有的特殊值都有辦法被解釋成 t-motive 的週期，例如：Drinfeld 指數函數取值在代數點，函數體的超越數論學家相信這不會是 t-motive 的週期。因此，我們要在函數體上的超越數論做出更多的突破，結合目前的方法我們必須想出新的路出來，這也是未來極具艱難的挑戰但也是我們得努力的方向。

參考文獻

[1] G. W. Anderson, W. D. Brownawell and M. A. Papanikolas, *Ann. of Math*., **160**, 237, (2004).

[2] C.-Y. Chang and M. A. Papanikolas, *J. Amer. Math. Soc*., **25**, 123, (2012).

[3] J. Yu, *Invent. Math*., **83**, 507, (1986)

[4] J. Yu, *Ann. of Math*., (2) **145** (1997), 215-233.

[5] M. A. Papanikolas, *Invent. Math*., **171**, 1, 123 (2008).